Számítógépes modellezés házifeladat
2008. január 21.

Hallgató neve: Tajta István
Hallgatói státusz: levelező doktorandusz, Éptészmérnöki kar

Téma:
„Membrán analógia modellezése Poisson-féle differenciálegyenlettel”

1. A feladat kiírása:

A kitűzütt feladatban ún. membránokat és hártyákat modellezek, azaz a megadott Teljes felületű külső terhek hatására a Poisson-féle differenciálegyenlet megoldásaként megkeresem a lehetséges egyensúlyi alakot.

A szilárdságtanban a tökéletesen hajlékony szerkezeteket, amelyek saját síkjukban hajlítónyomatékot és nyíróerőt nem képesek felvenni membránoknak vagy hártyáknak szokták nevezni. A legegyszerűbb példa a szappanbuborék, mely a belső nyomást csak a húzófeszültségekkel képes egyensúlyozni. A szilárdsági tulajdonsága folytán adott erőrendszer esetén egy jellegzetes forma párosul. A gyakorlatban a kifeszített ponyvaszerkezetek alakmeghatározási módszer alapjai is a membrán analógián nyugszanak.

Az előzőekkel ellentétesen: a húzószilárdsággal nem rendelkező szerkezetek, pl. térbeli tégla- és kőszerkezetek kialakításánál is figyelembe veszik a formát, arra törekszenek, hogy a terhekre a szerkezetben csak nyomófeszültségek ébredjenek. Ily módon próbálták kialakitani, ugyan akkoriban még zömmel empirikus úton, a térbeli boltozatokat is.

A feladat a szilárdságtanban a csavarási feladatok modellezésére is alkalmas (Prandtl által javasolt membrán analógia) [1].

2. Elméleti háttér áttekintése:

A membrán minden pontja olyan síkbeli feszültségállapotban van, amelynél a nyírófeszültségek zérus volta miatt minden irány főirány, és így minden irányban ugyanakkora normálfeszültség működik.

Ha a perem mentén rögzített membránra a síkjára merőleges irányú, p(x,y) teher működik, akkor a membrán megnyúlik és a terhet egy z=z(x,y) függvénnyel jellemzett deformált alakban tud csak egyensúlyban tartani. Eközben a membránban húzóerők ébrednek, melyek minden pontban és irányban ugyanakkorák.

A membránból kivágott elemi rész egyensúlya alapján levezethető, hogy kis elmozdulások, azaz lapos membránok esetén a membrán egyensúlyi alakját leíró z=z(x,y) függvénynek ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{s}$$

Poisson-féle differenciálegyenletet és természetesen a peremfeltételeket, ahol $\frac{p}{s}$ a külső teher és a belső erő hányadosa.

(Nagyobb elmozdulások esetén másodrendű analízist célszerű alkalmazni, mely figyelembe veszi a megnyúlásokat, viszkózus és reológiai viselkedést.)

A feladat ellenkező előjelű terhekre is értelmezhető, ebben az esetben az egyensúlyt biztosító membránban nem húzóerők, hanem nyomóerők ébrednek. [1]

3. Számítógépes algoritmus kidolgozása:

Poisson-féle differenciál egyenletet numerikus véges differenciák módszerével oldom meg (Elliptikus PDE, általános eset) [1].

Jelöljük a függvényt a következőképpen:

$$U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y) = G(x,y) \qquad x,y \in R, \qquad (1)$$

$x_0 = y_0 := 0$ és $h = k$,

vagyis $x_i = i \cdot h$ és $y_i = j \cdot h$, ahol $(i, j = 0,1,2,...)$

rácshálózatot használok, ahol h nagyobb nulla. Az $U(x,y)$ valódi megoldásfüggvény kielégíti az (1)-et a belső rácspontokban:

$$U_{xx}(P_{i,j}) + U_{yy}(P_{i,j}) = G_{i,j}.$$

Ha az $U(x,y)$ valódi megoldásfüggvényről erősebb differenciálhatósági tulajdonságot tételezünk fel, akkor a parciális deriváltak közelitésére használhatjuk az alábbi formulákat:

$$\frac{U_{i+1,j} - 2\cdot U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\cdot U_{xxxx}(P_{\cdot,j}) + \frac{U_{i,j+1} - 2\cdot U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\cdot U_{yyyy}(P_{i,\cdot}) = G_{i,j}$$

Ha a bal oldalon elhagyjuk a második és negyedik tagot, amelyek másodrendű képlethibák, akkor a közelitő megoldás értékeire lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = G_{i,j}$$, rendezve az egyelnletet kapjuk:

$$4\cdot u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = -h^2 G_{i,j}.$$

Az $u_{i,j}$ ismeretlenek kettős indexe zavaró, mivel az algebrában megszoktuk, hogy egy lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek csak egy indexük van. Igy sorfolytonos elrendezéssel egyes indexre térünk át.
A véges differencia egyeneletet átrendezve mátrix alakban felirhatjuk az alábbi egyenletet:

$$A \cdot u = b \text{, ahol } u := [u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n]^T \text{, és } b := [b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n]^T$$

A b mátrix tartalmazza a peremekre vonatkozó peremfeltételeket, illetve a külső teher, és belső erő arányát.

Az A mátrix:

$$\begin{bmatrix} B & -I & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -I & B & -I & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -I & B & -I & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & B \end{bmatrix}$$

, ahol a B mátrix elemei:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

és I pedig egységmátrix.

Eképpen „A” egy $m^2 \times m^2$ méretű mátrix, ahol m a belső rácspontok számát jelenti [1].

4. A számítógépes kód leírása:

A programban megoldó algoritmus lényegében a fenti levezetésre, átrendezésre épül. A bemenő adatokat a felhasználó az ún. felhasználói felületen kommunikálva tudja megadni. Az adatok rögzitése, és számitás elinditása utána a program a megadott adatokat a felületről lekérdezve feltölti a bemenő paramétereket a kivánt értékekkel.

A megoldó mag ezután a többismeretlenes egyenletrenszert megoldja. Elsőként felölti a mátrixokat a peremfeltételek alapján, illetve létrehozza az „A” mátrixot a MATLAB-ban előre definiált Poisson mátrix séma alapján. Ezek után sorfolytonos átalakitással megoldja a fent részletezett problémát, majd a felhasználói felületen 3 dimenziós ábrázolásban megjeleniti azt.

5. A program használata:

A programhoz egy felhasználói felület, ún. GUI, készült, ahol megadhatók a bemenő paraméterek számszerű értékei. („a” – mint a felületet alkotó négyzet oldalhossza, teherérték, mely lehet poziitv és negativ előjelű is, és a belső rácspontok számát, az osztás finomságát.)

A differenciálegyenlet megoldásához meg kell adnunk a peremfeltételeket is. Két féle peremfeltételt kinál fel a program – 1. lineáris, vonalszerű peremek, illetve 2. másodfokú görbét leiró peremek. Lineáris peremek esetén a négyzetet alkotó felület sarkainak magassági értékeit tudjuk megadni. A másodfokú görbénél pedig a magassái adatok, illetve a parabolát jellemző együttható értéke állitható be szabadon.

Ezeken kivül megadható az ábrázolás módja, a MATLAB által felkinált lehetőségek közül legördülő menüből választhatunk. Ezen túlmenően megadhatjuk a szinek árnyékolását, szinátmenetek tipusát.

A számitas gomb lenyomásával a differenciálegyenlet megoldása elkezdődik, végezetül a felhasználói felületen látható rajzi ablakon jeleniti meg a számitott felületet. A felületet a láthatóság megkönnyitése végett csúszkák segitségével tudjuk megforgatni.

6. Validálás, eredmények:

A véges differenciával számolható egyensúlyi alakokok jól választott osztásközzel megegyezik az irodalmakban taglalt egyensúlyi alakokkal. Pl. Lineáris peremfeltátelek megadása esetén a jól ismert hyperbolikus paraboloidot kapjuk, illetve másodfokú függvénnyel leirható peremeknél jól láthatóan a felület „púpja” a peremekkel megegyező parabolát ir le.

Ezekből leszűrhető, hogy lapos membránok esetén (ahol nem indokolt a másd- és harmadrendű analizis) jól alkalmazható a Poisson-féle differenciálegyenlet megoldására a fent vázolt véges differenia módszer. A pontos és közelitő megoldás között a felület felosztásától függően másodrendű hibát vétünk, mely sűrűbb hálóméret esetén elenyésző, a felület alakját is jól leirja, illetve az ábrázolásban is megfelelő.

7. Konklúzió:

A véges differencia módszerével megoldott feladat alkalmas lehet a membránok modellezésére kis elmozdulások esetén. Nagy elmozdulásoknál másodrendű elmélet szükségeltetik. Emellett a feladat átértelemzésével a probléma a csavarási problémák megoldásában is használható [1].

8. Hivatkozások:

[1] Kaliszky Sándor, Kurutzné Kovács Márta, Szilágyi György: Szilárdságtan, Nemzetki Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[2] Móricz Ferenc: Differenciálegyeneletek numerikus módszerei, Polygon jegyzettár, POLYGON Szeged, 1998.

[3] Pelikán József: Tartószerkezetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1959.