

De Broglie-féle hipotézis. De Broglie alapvető gondolata abban állott, hogy a fény kvantumelméletének

$$W = hf = \hbar \omega$$

és

$$I = \frac{h}{\lambda}$$

alapegyenleteit kiterjesztette a mikrorészecskék mozgásának leírására is. A felírt összefüggésekben W a fényhullám energiája, h a Planck-féle állandó, f a hullám frekvenciája, I az elektromágneses hullámhoz rendelhető foton impulzusa, λ a hullámhossz.

Minden W energiájú és I impulzusú szabad részecskéhez de Broglie egy síkhullámot rendel

$$\psi = A e^{2\pi j (ft - \vec{k}\vec{r})},$$

ahol \vec{r} a tér megfelelő pontjának rádiuszvektora, t idő, \vec{k} egy olyan vektor, amelynek iránya megegyezik a hullámsík pozitív normálisának irányával és $|\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$. A mikrorészecskéhez rendelt hullám frekvenciájának és hullámhosszának az energiával és impulzussal fennálló kapcsolatát ugyancsak a fenti egyenletek adják.

Heisenberg-féle határozatlansági reláció. Kvantumrendszerek esetében nincsenek olyan sokaságok, amelyeknél a részecskét jellemző kanonikusan konjugált mennyiségek (szorzatuk hatásdimenziója) ugyanazon időpontban teljesen meghatározott értékkel rendelkeznek:

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar$$

ahol Δq és Δp a q és p egymással kanonikusan konjugált mennyiség egyidejű mérésekor fellépő (elvi) bizonytalanságok.

Feladatok:

486. Irjuk fel egy szabad részecskéhez rendelhető de Broglie-hullám egyenletét W és I paraméterekkel, ha

a) a részecske a pozitív x -tengely irányában halad;

b) a részecske a koordinátatengelyekkel tetszőleges szöget bezáró irányban halad.

487. Határozzuk meg az m_0 tömegű, W energiájú szabad részecskéhez rendelhető hullám hullámhosszát nemrelativisztikus esetben.

488. a) Határozzuk meg az U potenciálkülönbséggel gyorsított elektronhoz és protonhoz rendelhető de Broglie-féle hullámhosszt.

b) Mekkora lesz ez az érték, ha az elektron és proton energiája egyaránt 100 eV?

489. Határozzuk meg a proton és az elektron de Broglie hullámhosszáinak arányát azonos sebességértékek esetén.

490. Homogén mágneses erőterben az elektron 1 cm sugaru körpályán mozog. A mágneses erőter indukciója $46 \cdot 10^{-4}$ Vs/m². Mekkora a de Broglie féle hullámhossz?

491. Proton de Broglie-hullámhossza 1,8 Å. A proton sebességére merőleges mágneses erőter bekapcsolása után 10 cm sugaru körpálya mentén mozog. Határozzuk meg a mágneses erőter indukcióját.

492. Az ideális gáz/molekuláinak sebesség szerinti eloszlását adott T hőmérsékleten a Maxwell-féle sebességeloszlási törvény fejezi ki. Határozzuk meg ugyanazon rendszer molekuláinak a de Broglie-hullámhossz szerinti eloszlását.

493. Hidrogéngáz molekuláinak de Broglie-hullámhossz szerinti eloszlását felhasználva (előző feladat) határozzuk meg a hidrogénmolekulához rendelhető legvalószínűbb de Broglie-hullámhosszt 27 °C-on.

494. Mekkora az elektron de Broglie-hullámhosszáinak változási sebessége abban a pillanatban, amikor a $6 \cdot 10^5$ V/m térerősségű homogén elektromos erőterben gyorsulva energiája 2 keV?

495. m tömegű és v sebességű ($v \ll c$) részecske d rácsállandójú kristályos szerkezetű anyagon szóródik. Mi a feltétele annak, hogy a részecske hullámtermészete kifejezetten megnyilvánuljon?

496. Elektronok 3 Å rácsállandójú kristályon szóródnak. Mekkora energiával kell rendelkeznie az elektronnyalábnak, hogy kifejezetten éles diffrakciós képet kapjunk?

497. Elektronmikroszkópban szubmikroszkópikus tárgyak leképezésére nagy sebességű elektronnyaláwhoz tartozó de Broglie-féle hullámot használnak. Bizonyos gyakorlati problémánál 0,1 Å felbontóképességet kell elérni. Mekkora feszültséggel kell gyorsítani az elektronokat?

498. Határozzuk meg az m tömegű részecskéhez rendelhető de Broglie-hullám hullámhosszáinak függését az U gyorsítófeszültségtől relativisztikus esetben.

499. Mekkora kinetikus energia eredményez 1 %-os hibát a de Broglie-

hullámhossz nemrelativisztikus számításakor elektron, proton és α -részecske esetében?

500. A gyorsítóberendezésekkel az atommag szerkezetének vizsgálata céljára felgyorsított elektronok energiája eléri a $6 \cdot 10^3$ MeV értéket. Mekkora az elektronok de Broglie-hullámhossza? Mivel magyarázható az a tény, hogy az atommag tanulmányozásához ekkora energiájú elektronnyaláb szükséges?

501. Mutassuk ki, hogy a Bohr-féle atomelméletben a stacionárius pályák kerülete az atomi elektronhoz tartozó de Broglie-féle hullámhossz egész számu többszöröse.

502. 1 g tömegű golyó helyét 1μ pontossággal határoztuk meg. Mekkora sebességének bizonytalansága?

503. Elektronnyaláb elektronjainak 10^5 m/s sebességét 0,1%-os pontossággal sikerült megmérni. Az adott körülmények között mekkora pontossággal határozhatjuk meg az elektron helyét a nyalábban?

504. A klasszikus elképzelések szerint (Bohr-féle atommodell) az elektron az atommag körüli pályán kering meghatározott sebességgel, amely 10^6 m/s nagyságrendű. Az atomban kötött elektron ténye azt követeli meg, hogy koordinátáját atomi méreteknek megfelelő, tehát legalább 10^{-10} m-es pontossággal határozzuk meg. Ennek megfelelően mekkorának adódik a sebesség bizonytalansága?

505. Atomok mágneses momentumának vizsgálatát a Stern-Gerlach-féle kísérleti berendezéssel végezhetjük. Egy kísérletnél a két diafragma közbeiktatásával nyert ezüst atomnyalábot $T = 1200$ °C hőmérsékletű kemencében állítottuk elő. A diafragma és a felfogó ernyő közötti távolság $s = 1$ m. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció felhasználásával határozzuk meg, mekkora az ernyőn nyerhető legkisebb nyom lineáris mérete?

506. $W = 0,06$ eV energiájú párhuzamos sugarakból álló hidrogén atomnyalábot diafragmán bocsátunk keresztül. A diafragma mögött $s = 1$ m-re helyezünk el egy felfogó ernyőt. Határozzuk meg a rés d szélességét, amely mellett a rés képe az ernyőn minimális lesz. Mekkora lesz d értéke elektronok esetén ugyanolyan W és s értékek mellett?

507. Hogyan egyeztethető össze a Heisenberg-féle határozatlansági reláció fizikai jelentésével az a körülmény, hogy a Wilson-féle ködkamrában a 10^{-4} cm méretű ködcseppekből álló részecskepálya nagy energiájú elektronok esetén jól meghatározott egyenes vonal?

$$486. \psi(\mathbf{x}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar} (Wt - \mathbf{I} \cdot \mathbf{x})};$$

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar} (Wt - \vec{I} \cdot \vec{r})};$$

$$487. \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_o W}}.$$

488. a) Ha az előző feladat eredményében az elektron energiáját elektronvoltokban fejezzük ki $W = Q_e U$, ahol Q_e az elektron töltése, U a gyorsítófeszültség voltokban

$$\lambda_e = 12,25 \frac{1}{\sqrt{U}} \text{Å}.$$

Ha elektronok helyett protonokat gyorsítunk, akkor azonos gyorsítófeszültség esetén a protonokhoz tartozó de Broglie-hullámhossz $\sqrt{1836}$ -szor kisebb az elektronokhoz tartozó de Broglie-hullámhossznál, ugyanis $m_p = 1836 m_e$:

$$\lambda_p = \frac{12,25}{\sqrt{1836}} \frac{1}{\sqrt{U}} \text{Å}.$$

$$b) \lambda_e = 1,225 \text{Å}; \lambda_p = 0,0286 \text{Å}.$$

$$489. \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = 1836 \text{ (Vegyük észre, hogy azonos gyorsítófeszültség esetén ez az arány } \sqrt{1836} \text{ volt; 488. feladat a) megoldás.)}$$

$$490. 0,9 \text{Å}.$$

$$491. 2,3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

$$492. \frac{dn}{n_o} = a \exp\left(-\frac{\hbar^2}{2m kT \lambda^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^4}, \text{ ahol } a = \frac{4\hbar^3}{\sqrt{\pi} m^3} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}.$$

k a Boltzmann-állandó, m a molekula tömege.

493. Az eloszlásfüggvény a legvalószínűbb de Broglie-hullámhossznál maximummal rendelkezik:

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0.$$

Ebből a feltételből

$$\lambda_o = \frac{h}{2\sqrt{mkT}} = 0,9 \text{Å}.$$

494. Keressük a $\frac{d\lambda}{dt}$ differenciálhányadost. E célból felírjuk a $\lambda = \lambda(t)$ függvényt. Mivel

$$v = at = \frac{Q_e E}{m} t,$$

felhasználva a de Broglie-hullámhossz és a részecske impulzusa közötti összefüggést

$$\lambda = \frac{h}{Q_e E t}.$$

Innen

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{h}{Q_e E t^2}. \quad (1)$$

A t időt az energiamegmaradás tételének felhasználásával számíthatjuk. Ugyanis

$$\frac{1}{2} m v^2 = W \quad Q_e U = Q_e E l(t) = \frac{Q_e^2 E^2}{2m} - t^2. \quad (2)$$

Az (1) és (2) kifejezésekből

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{h Q_e E}{2 m W} = - 10,92 \text{ cms}^{-1}.$$

495. $d \sim \frac{h}{mv}$.

496. $W \sim 16,75 \text{ eV}$.

497. $U = 13\,500 \text{ V}$.

498. Ha a de Broglie-hullámhossz

$$\lambda = \frac{h}{m v} \quad (1)$$

kifejezésben m helyébe az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

relativisztikus tömeget írjuk, akkor az alábbi eredményre jutunk:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Most fejezzük ki a részecske v sebességét a gyorsítófeszültséggel az

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = Q_e U$$

egyenletből

$$v = c \frac{(Q_e^2 U^2 + 2m_0 c^2 Q_e U)^{1/2}}{m_0 c^2 + Q_e U}.$$

Ezt behelyettesítve az (1) kifejezésbe

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 Q_e U} \sqrt{1 + \frac{Q_e U}{2m_0 c^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \frac{Q_e U}{2m_0 c^2}}}, \quad (2)$$

ahol λ_0 a de Broglie - hullámhossz nemrelativisztikus esetben. Az eredményből látható, hogy $Q_e U \ll 2m_0 c^2$ mellett a (2) kifejezés a 487. feladatban nyert eredménybe megy át.

499. $20,4 \text{ keV}; 37,5 \text{ MeV}; 75 \text{ MeV}$.

500. $\lambda = \frac{hc}{W} = 2,07 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$. Az atommag átmérője $10^{-12} - 10^{-13} \text{ cm}$. Adott méretű tárgy eredményes vizsgálatához a tárgy méreténél kisebb hullámhosszu nyaláb szükséges.

501. A hidrogénatom Bohr-féle elemi elméletében a stacionárius körpályákat a

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

kvantumfeltétel szerint választjuk ki. Innen

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} = n \lambda.$$

502. $\Delta v \geq 6,63 \cdot 10^{-25} \text{ m/s}$. A feladatban megadott helymeghatározás makroszkópikus viszonyok között pontos mérés, a sebességmeghatározásra kapott elvi hibahatár messze felülmúlja a sebességmeghatározásra vonatkozó gyakorlati követelményeinket. Makroszkópikus viszonyok között tehát a Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés elveszti gyakorlati jelentőségét.

503. A feladat feltételeiből $\Delta v = 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$. A Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés szerint

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim h,$$

amiből

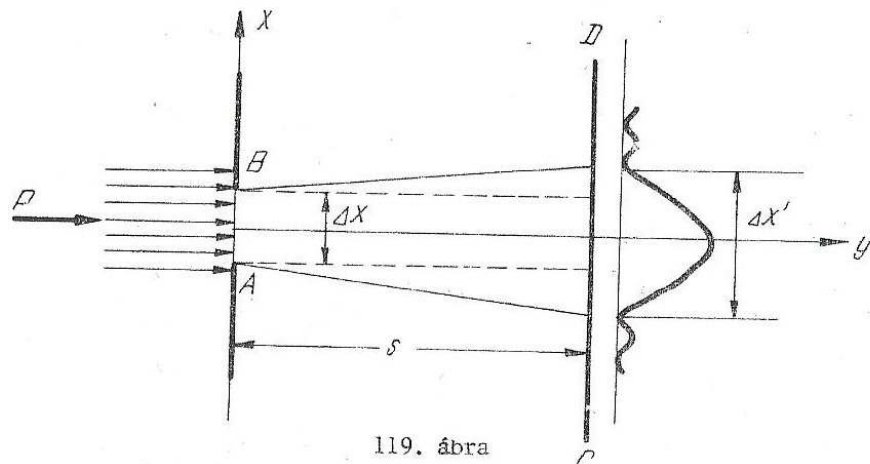
$$\Delta x = \frac{h}{m\Delta v} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Ebben az esetben tehát az elektron helyét kerekén egy századmilliméter, azaz 10μ pontossággal határozhatjuk meg, ami eléggé pontos helymeghatározás.

504. A feladat feltételeiből $\Delta x = 10^{-10} \text{ m}$. A sebesség hibája

$$\Delta v = \frac{h}{m\Delta x} \sim 6,6 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

azaz a sebesség hibája megegyezik magával a sebességgel. A Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés helyességéből következik, hogy az elektronpálya felfogás, amely ezen a pályán keringő elektronhoz meghatározott sebességet rendel, tarthatatlan, másszóval a klasszikus elképzelések atomi szinten nemcsak módosításra szorulnak, de általában alkalmazhatatlanok.



119. ábra

505. A feladat megoldásakor induljunk ki a 119. ábrán látható elvi elrendezésből. Az AB diafragma szélessége Δx , erre a résre balról be- esik az ezüstatomnyaláb. A diafragmától jobbra elhelyezett CD fluoresz- káló ernyőn észlelt szcintilláció azt jelzi, hogy az atomnyaláb egyes atom- jai áthaladtak a diafragmán. Az ezüstatom helyét a résen való áthaladás pillanatában nyilván úgy lehet meghatározni, hogy megadjuk a rés helyét a készülék többi részéhez képest. A készülékhez az ábra szerint rögzített

koordinátarendszerben az ezüstatom helyét a résen való áthaladás pillana- tában Δx bizonytalansággal ismerjük.

A résen áthaladva az ezüstatomok kölcsönhatásba lépnek a diafragma széleivel, illetve az egész diafragmával. Ennek eredményeképpen mozgási irányukat megváltoztatják, azaz az x -tengely irányában

Δp_x impulzusra tesznek szert. Ennek eredménye képpen a fluoresz- káló ernyőn a diafragma képe mintegy kiszélesedik. Bármilyen pontosan is ismertük tehát a diafragma felé balról tartó atomok impulzusát, a rés után az atomok impulzusa csak Δp_x határozatlansággal ismeretes.

A felfogó ernyőn megjelenő nyom $\Delta x'$ szélességét nyilvánvalóan be- folyásolja a rés Δx szélessége. A feladat megoldását úgy végezzük, hogy felírjuk a

$$\Delta x' = \Delta x + \Delta v_x t,$$

függvénykapcsolatot és keressük $\Delta x'$ minimumát mint szélsőértéket.

Az ábra szerint

$$\Delta x' = \Delta x + 2 \Delta v_x t,$$

ahol Δv_x a Δp_x impulzusbizonytalanság révén fellépő sebességbizony- talanság, t pedig az az idő, amely alatt a részecske a diafragmától az ernyőig terjedő távolságot megteszi. Ugyanakkor

$$t = \frac{s}{v}$$

itt v az ezüstatomok y irányu, tehát a résre merőleges sebessége. Ezt a sebességet a Maxwell-féle sebességeloszlási függvény értelmében a ke- mence T hőmérséklete egyértelműen meghatározza. Ennek felhasználásá- val v -t mint az atomok legvalószínűbb sebességét tekintve -

$$v = \left(\frac{2 kT}{m} \right)^{1/2},$$

ahol k a Boltzman- állandó, T a kemence hőmérséklete $^{\circ}\text{K}$ -ban, m egy ezüstatom tömege: $m = \frac{A}{N_A}$, itt A az atomsúly, N_A a Loschmidt-féle szám. Az előzőek szerint

$$\Delta x' = \Delta x + 2 \Delta v_x s \left(\frac{m}{2 kT} \right)^{1/2}.$$

Ebben a kifejezésben Δx az ezüstatom helyének bizonytalansága a részen való áthaladás pillanatában, $\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m}$ az ezüstatom sebességének bizonytalansága ugyanabban az időpillanatban. A kettő közötti kapcsolat a

$$\Delta x m \Delta v_x \sim h$$

Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés, amelynek felhasználásával

$$\Delta x' \sim \Delta x + \left(\frac{2h^2 s^2}{mkT} \right)^{1/2} \frac{1}{\Delta x}. \quad (1)$$

Keressük a $\Delta x'(\Delta x)$ függvény minimumát. A

$$\frac{d}{d(\Delta x)} (\Delta x') = 0$$

feltételből

$$\Delta x \sim \left(\frac{2h^2 s^2}{mkT} \right)^{1/4} \quad (2)$$

Az ernyőn megfigyelhető legkisebb távolság (1) és (2) alapján

$$\Delta x' \sim 2 \left(\frac{2h^2 s^2}{mkT} \right)^{1/4} = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

506.
$$d \sim \left(\frac{2h^2 s^2}{mW} \right)^{1/4} = 6\mu; d \sim 4\mu$$

507. A feladat feltételei és a kísérleti vizsgálatok szerint szigorúan egyenesvonalú pályákat csak elég nagy energiájú részecskéknél észlelünk. A ködcsappék átmérője 10^{-4} cm körül van, tehát a Wilson-kamrán áthaladó részecskéket $\Delta x = 10^{-4}$ cm átmérőjű gömbön belül lokalizáltuk, azaz a helymeghatározás bizonytalansága Δx . A

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés alapján

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} \sim 10^{-23} \text{ g cm s}^{-1}$$

nagyságrendű, tehát $\Delta p_x \ll p$, azaz a Wilson-kamrán áthaladó részecske az említett pontossági határok között egy klasszikus részecskéhez teljesen hasonló módon viselkedik.