

## OPTIKA

### 1. A fény mint hullám. Interferenciajelenségek előállítása

A hullámoptikában leggyakrabban az állandó amplitudójú, monokromatikus síkhullámot használjuk, melynek alakja,  $z$ -t választva a terjedés irányának, a következő:

$$\psi = A \sin 2\pi \nu \left( t - \frac{z}{v} \right).$$

Mivel a fény elektromágneses hullám,  $\psi$  fizikai jelentése akár az elektromos, akár a mágneses térerősség valamelyik komponense. A hullám terjedési sebessége kifejezhető a  $c$  vákuumbeli terjedési sebességgel:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n},$$

ahol  $n$  a közeg optikai törésmutatója. A fényhullám terjedése során a hullámhossz közegről - közegre változik, míg frekvenciája változatlan:

$$\lambda = \frac{c}{n \nu} = \frac{\lambda_0}{n},$$

tehát a hullámhossz vákuumban maximális ( $\lambda_0$ ).

Ha két közös frekvenciájú, rezgési síkú és haladási irányú síkhullám találkozik, interferencia jön létre, melynek eredményeképpen az eredő intenzitás

$$I = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\delta_1 - \delta_2)$$

lesz. Az intenzitás maximum ill. minimum feltételét kifejezhetjük akár a fázis-, akár az utkülönbséggel.

Maximális az intenzitás, ha

$$\delta_1 - \delta_2 = 2 n \pi, \text{ vagyis } z_1 - z_2 = 2n \frac{\lambda}{2}.$$

Minimum az intenzitás, ha

$$\delta_1 - \delta_2 = (2n + 1)\pi, \text{ vagyis } z_1 - z_2 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Az  $n$ , amely felveheti a  $0, 1, 2, \dots$  egész értékeket szolgáltatja általában az interferencia rendszámát.

Az eredmények némileg módosulnak, ha a két síkhullám rezgési síkban vagy haladási irányban eltér egymástól.

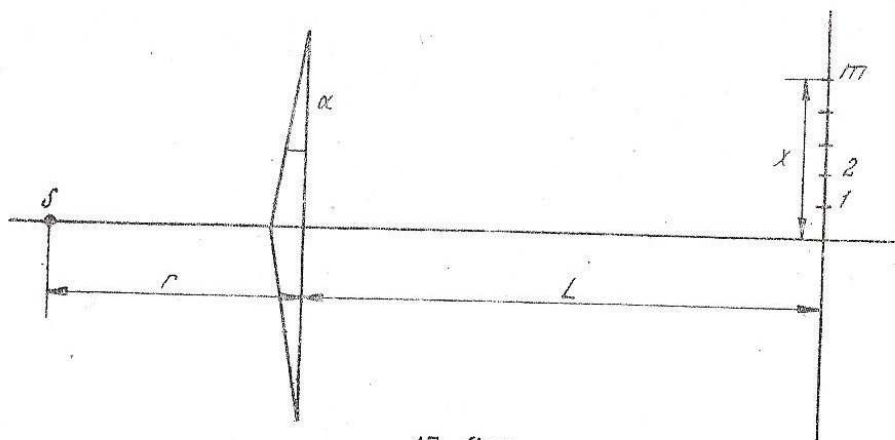
Ha egy keskeny résre monokromatikus síkhullám esik, melynek hullámfelülete párhuzamos a rés síkjával, akkor a rés egyes pontjaiból kiinduló sugarak koherensek. Különböző szög alatt figyelve a részt egy végtelenre állított távcsővel azt találjuk, hogy bizonyos meghatározott irányokban a hullámok teljesen kioltják egymást. Ezekre az irányokra fennáll, hogy

$$\sin \alpha = k \frac{\lambda}{a},$$

ahol  $k$  zérustól különböző egész szám, az interferencia rendszáma és  $a$  a rés szélessége.

Az optikai rács egyenlő távolságban levő rések sorozatából áll. A rácsra merőleges beeső síkhullám esetében az intenzitásmaximumnak irányára egy a rés esetével formailag azonos összefüggést kapunk, ahol  $k$  lehet zérus is, és  $a$  két egymás melletti rés távolsága, az úgynevezett rácsállandó.

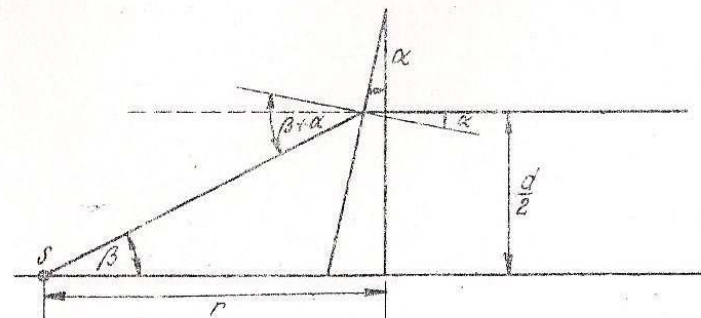
Röntgensugarak elhajlásának vizsgálata az igen kis hullámhossz miatt csak kristályrácsokkal történhet. Itt az atomok, mint szóró centrumok szekunder röntgensugarakat bocsájtanak ki, amelyek interferenciaképesek. Mivel nem látható sugarakról van szó, a megfigyelés általában foto - optikai uton történik.



47. ábra

Az interferenciakép vizsgálatával mód nyílik kristályszerkezeti problémák tanulmányozására is.

Példa: A biprizmával végzett interferenciakísérlet esetén határozzuk meg az  $m$ -edik világos csík távolságát a kép centrumától. A prizma törésmutatója  $n$ , a hullámhossz  $\lambda$  (lásd 48. ábra).



48. ábra

Megoldás: A biprizma az  $S$  fényforrás kettőzött képét állítja elő. A két látszólagos kép egymástól való távolságát jelöljük  $d$ -vel. Ennek meghatározása a 48. ábra alapján történik. Felhasználva, hogy  $\alpha$  igen kis szög, a törési törvény szerint

$$\frac{\beta + \alpha}{\alpha} = n,$$

ahonnan  $\beta = (n-1)\alpha$ , és így  $d = 2r(n-1)\alpha$ .

Ezután a Fresnel-féle kettőtűkörhöz hasonlóan az  $m$ -edik interferencia-maximum feltételeként kapjuk:

$$x = m \lambda \frac{L+r}{2r(n-1)\alpha}.$$

Példák:

327. Mekkora lesz a nátrium sárga fényének hullámhossza az  $1,5$  törésmutatójú közegben, ha levegőben  $5890 \text{ \AA}$ ?

328. Állítsuk fel az egyenletét annak a hullámnak, melyet

- pontszerű fényforrás sugároz
- végtelen fonál sugároz.

329. Két egyforma frekvenciájú elektromágneses hullám milyen esetben

szuperponálódik tetszőleges fáziskülönbség mellett úgy, hogy az eredő rezgés I intenzitása egyenlő az összetevő rezgések intenzitásának összegével.

330. Két egyforma  $\lambda$  hullámhosszusú sikhullám terjedésének iránya egymással kicsiny  $\varphi$  szöget zár be. A hullámok olyan ernyőre esnek, amelynek sija közelítőleg merőleges terjedésük irányára. A két sikhullám egyenletének felírása és a hullámok terének összetétele alapján bizonyítsuk be, hogy az ernyőn megfigyelhető két szomszédos intenzitáscsik közötti távolság

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

Hogyan változik  $\Delta x$  értéke, ha az interferáló sugarak ferdén esnek az ernyőre?

331. Bocsássunk két egymással párhuzamos résre egy  $\lambda$  hullámhosszusú monokromatikus sikhullámot. A réstávolság  $d = 5$  mm. A szemközti  $a = 5$  m távolságban elhelyezett felfogóernyőn az első interferenciamaximumnak a középső csiktól való távolsága  $x = 0,5$  mm. Mekkora a hullámhossz?

332. Határozzuk meg a Fresnel-féle tükrök által bezárt szöget a következő adatok alapján: Az interferencia csikok közötti távolság az ernyőn 1 mm, az ernyőtávolság  $L = 1$  m, a fényforrás távolsága a tükrötől 10 cm és a hullámhossz  $4861 \text{ \AA}$ . Az interferáló sugarak az ernyőre közelítőleg merőlegesen esnek be.

333. Határozzuk meg az interferenciakép centruma és az ötödik világos csíkja közötti távolságot a Fresnel-féle tükrőnél, ha  $\alpha = 20^\circ$ , a fényforrás távolság  $r = 10$  cm, ernyőtávolság  $L = 1$  m, és  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ .

334. Egy biprizma törőszöge  $\alpha = 3'26''$ . A monokromatikus ( $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ) fényforrás és a biprizma közé oly módon helyezünk el egy lencsét, hogy az interferenciacsikok távolsága az ernyő és a biprizma távolságától függetlennek mutakozzék. Mekkora a szomszédos sötét csikok közötti távolság, ha a biprizma törésmutatója  $n = 1,5$ . Mekkora a csikok száma (N) akkor, amikor az ernyőtávolság  $L = 5$  m.

335. Mekkora a biprizma segítségével előállított interferenciacsikok száma (N), ha a törésmutató  $n$ , a törőszög  $\alpha$ , a hullámhossz  $\lambda$ , a fényforrás ill. ernyőtávolság  $r$ , ill.  $L$ .

336. Az  $n$  törésmutatójú közegben állandó  $v$  sebességgel mozgó elektronok bizonyos feltételek között fényt sugározhatnak (Cserenkov-effektus). Határozzuk meg azokat a feltételeket, amelyek között fellép ez a sugárzás és a sugárzás irányát, figyelembevéve az elektron által a különböző időpillanatokban kibocsátott hullámok interferenciáját.

337. 0,5 mm széles réssel elhajlásjelenséget állítunk elő a 3 m távolságban elhelyezett ernyőn. A jobbra és balra megjelenő első sötét csikok távolsága vörös fényben 8 mm, ibolya-fényben 5,6 mm. Meghatározzuk a használt fény hullámhosszait.

338. Mekkora az optikai rács a rácsállandója, ha az 589,6 m $\mu$  hullámhosszusú fény második elhajlási maximumát  $43^\circ 15'$  szög alatt adja?

339. Nátriumfényrel megvilágított optikai rács harmadik elhajlási képe a központi képtől 16,5 cm távolságban mutatkozott az 1,5 m távoli ernyőn. Mekkora a rácsállandó?

340. Elfedhetik-e egymást a rács első és másodrendű szinképei, ha azt látható fényvel (4000-7000  $\text{\AA}$ ) világítjuk meg.

341. Milyen maximális nagyságrendű szinképet lehet  $\lambda$  hullámhosszu fénynek egy  $a$  állandóju rácson való elhajlása esetén megfigyelni?

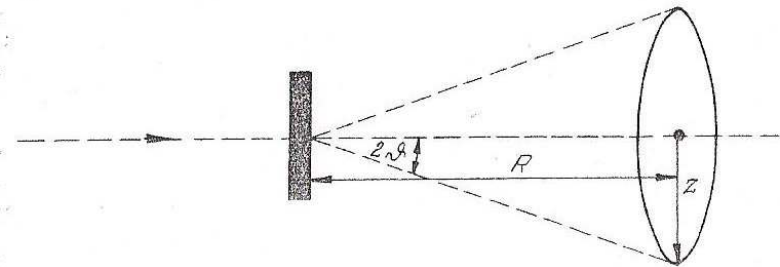
342. Határozzuk meg annak a szinképvonalnak a hullámhosszát, amelynek a rács által a harmadrendű szinképben adott képe összeesik a  $\lambda = 4861 \text{ \AA}$  hullámhosszu vonalnak a negyedrendű szinképben keletkező képével.

343. Mi határozza meg a rács szinképében nyerhető maximális hullámhosszuságot? Mekkora kell, hogy legyen annak a rácsnak az állandója, amely 100  $\mu$  hullámhosszig terjedő infravörös szinképet tud adni?

344. Határozzuk meg annak a rácsnak a szögkszórását, amelynek rácsállandója  $a = 5 \mu$ , ha  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ , és a szinkép rendszáma  $k = 3$ .

345. Siktükör rácstra a nátrium D-vonalának fénye ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ) merőlegesen esik be. Határozzuk meg a rács karcolásainak számát, amely 1 mm szakaszra esik, ha a másodrendű szinképet a merőlegeshez képest  $45^\circ$  szög alatt látjuk.

346. Derékszögű térrácsra a rácsot alkotó paralelepipedon egyik élének irányában röntgen-sugárnyaláb esik be. Határozzuk meg a diffrakciós maximumok irányait és azokat a feltételeket, amelyek esetén ezek a maximumok megfigyelhetővé válnak.



49. ábra

347. Határozzuk meg az a állandóju kockaalaku rácson keletkező fény-elhajlásnál a Röntgen-sugarak tetszőleges beesése esetében a diffrakciós maximumnak irányait. Milyen feltételt kell  $\lambda$  -nak kielégítenie, hogy maximumokat figyelhessünk meg?

348. Kis kristályokból álló mintát monokromatikus Röntgen-sugarak útjába állítunk (Debye-Scherer módszer). Milyen elhajlási kép figyelhető meg a beeső nyalábra merőleges ernyőn? Hogyan függ a maximális intenzitás helyének a centrális folttól való  $z$  távolsága a modellnek az ernyőtől való  $R$  távolságától (49. ábra)?

$$327. \lambda = 3927 \text{ \AA}.$$

$$328. a) \psi = \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{c}\right); \quad b) \psi = \frac{1}{\sqrt{r}} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

329. Vegyük szemügyre a két hullámnak megfelelő rezgések eredőjét a tér valamely pontjában. Az egyik rezgés legyen

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_{10} \cos \omega t,$$

a másik

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_{20} \cos (\omega t + \delta).$$

Az eredő rezgés kifejezésének négyzete:

$$E^2 = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2)^2 = \bar{E}_{10}^2 \cos^2 \omega t + \bar{E}_{20}^2 \cos^2 (\omega t + \delta) + 2 \bar{E}_{10} \cdot \bar{E}_{20} \cos \omega t \cos (\omega t + \delta)$$

Az intenzitás arányos ennek időbeli középértékével:

$$I \sim \frac{1}{2} (\bar{E}_{10}^2 + \bar{E}_{20}^2) + 2 \bar{E}_{10} \cdot \bar{E}_{20} \cdot \langle \cos \omega t \cdot \cos (\omega t + \delta) \rangle.$$

A feladat feltétele szerint tetszőleges  $\delta$  esetén az utolsó tag el kell, hogy tűnjön. Ez csak akkor lehetséges ha,  $\bar{E}_{10} \cdot \bar{E}_{20} = 0$ , azaz, ha a rezgések egymásra merőleges síkban történnek.

330. Az interferáló sugarak legyenek:

$$\psi_1 = \psi_0 \cos (\omega t - \bar{k}_1 \bar{r} + \delta_1)$$

$$\psi_2 = \psi_0 \cos (\omega t - \bar{k}_2 \bar{r} + \delta_2)$$

Innen az eredő

$$\psi = 2\psi_0 \cos \left( \frac{\Delta \bar{k}}{2} \bar{r} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right) \cos (\omega t - \bar{k} \bar{r}),$$

ahol

$$\Delta \bar{k} = \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \quad \text{és} \quad \bar{k} = \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{2}.$$

Az intenzitás akkor lesz maximum, amikor az első koszinusztényező argumentuma minimális. Mivel  $|\bar{k}_1| = |\bar{k}_2|$  és  $\bar{k}_1$  és  $\bar{k}_2$  vektorok közötti szög kicsi, közelítésben

$$|\Delta \bar{k}| \approx |\bar{k} \varphi| = \frac{2\pi}{\lambda} \varphi.$$

Ennek a felhasználásával a szélsőértékre nyerjük, hogy

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

Ha az ernyő normálisa  $\vartheta$ -szöget zár be a beeső sugarakkal, akkor

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi \cos \vartheta}.$$

331.  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$

332.  $\alpha \approx \frac{(L+r)\lambda}{2r \cdot \Delta x} = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ radián} = 9,17'.$

333.  $\Delta x = \frac{5 \cdot \lambda (L+r)}{2r\alpha} \cdot \frac{180 \cdot 60}{\pi} = 2,78 \text{ mm}$

334.  $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}, \quad N = 10.$

335.  $N = \frac{4rL}{r+L} \cdot \frac{(n+1)^2 \alpha^2}{\lambda}$

336. Jelöljük  $V$ -vel az elektron sebességét a közegben,  $v$ -vel pedig a fény sebességét a közegben. Az elektron mozgása következtében létrejött erőtér a közeg molekuláit illetőleg atomjait gerjeszti, úgy, hogy azok fényhullámok forrásaivá válnak.

Legyenek A és B tetszőleges pontok az elektron mozgásának pályáján, P pedig a megfigyelés elegendően távoli pontja (lásd 105. ábra).

A  $t = 0$  időpillanatban az elektron által gerjesztett fényhullám induljon ki A-ból. A P megfigyelési pontba a hullám a  $t_1 = \frac{AP}{v}$  időpontban érkezik. B pontból a fényhullám  $\frac{AB}{V}$  sec-mal később indul ki. Ez a hullám a megfigyelés pontjába a  $t_2 = \frac{AB}{V} + \frac{BP}{v}$  pillanatban érkezik. Az időkülönbség így módon:

$$t_2 - t_1 = \frac{AB}{V} - \frac{AP - BP}{v}.$$

Ha a P pont elegendő nagy távolságban van, akkor írhatjuk, hogy  $AP - BP = AB \cdot \cos \vartheta$ . Ekkor

$$t_2 - t_1 = \frac{AB}{v} \left( \frac{v}{V} - \cos \vartheta \right).$$

Ha  $\frac{v}{V} - \cos \vartheta \neq 0$ , akkor bármely A ponthoz lehet rendelni olyan B pontot, hogy az A-ból és B-ből kilépő hullámok P-be ellenkező fázissal érkezzenek és kioltásuk egymást. Ha

$$\cos \vartheta = \frac{v}{V},$$

akkor az A és B pontokból kilépő hullámok - bármilyen helyzetűek legyenek is ezek a pontok, - egyidőben érkeznek P-be és erősítik egymást. Tehát ebben az irányban az elektron fényt fog sugározni. Sugárzás csak akkor lehetséges, ha  $V > v$ , azaz, amikor az elektron sebessége felülmúlja a fény sebességét az illető közegben.

337.  $\lambda_{\text{vörös}} = 667 \text{ m}\mu, \quad \lambda_{\text{ibolya}} = 467 \text{ m}\mu.$

338.  $a = 1,72 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$

339.  $a = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$

340. Az elsőrendű szinkép legnagyobb szögére érvényes, hogy

$$\sin \alpha_1 = \frac{7 \cdot 10^{-5}}{a}.$$

A másodrendű szinkép legkisebb szögére érvényes, hogy

$$\sin \alpha_2 = \frac{8 \cdot 10^{-5}}{a}.$$

Látható, hogy  $\alpha_2 > \alpha_1$  tehát a két szinkép nem fedheti egymást.

341. A maximális megfigyelhető nagyságrend egyenlő az  $a/\lambda$  értékében foglalt legnagyobb egész számmal.

$$342. \lambda = 6481 \text{ Å}.$$

343.  $\lambda_{\max} = a$ . A rácsállandó nem lehet kisebb  $10^{-2}$  cm-nél, azaz mm-enként nem lehet több 10 vonásnál.

$$344. \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{k}{a \cos \alpha} = 0,63 \cdot 10^4 \frac{\text{ra}}{\text{cm}} = 13 \frac{\text{szögmásodperc}}{\text{Å}}.$$

345. 600 karcolás/mm.

$$346. a \cos \alpha = k_1 \lambda, \quad b \cos \beta = k_2 \lambda, \quad c(1 - \cos \gamma) = k_3 \lambda,$$

ahol  $\gamma$  a beeső és az elhajlást szenvedő nyaláb közötti szög. A maximumok az ernyőnek azokon a helyein találhatók, ahol a beeső nyalábok irányával párhuzamos lineáris láncon keletkező elhajlásnak megfelelő koncentrikus körök a síkrácson keletkező elhajlásnak megfelelő hiperbolák metszéspontjain átmennek. Tetszőleges  $\lambda$  esetén maximumok általában nem figyelhetők meg.  $\lambda$ -nak a következő feltételt kell kielégítenie:

$$\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{k_3}{c}\right)^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\lambda^2}.$$

347. A diffrakciós maximum irányait a Laue-feltételek adják:

$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda,$$

$$a(\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda,$$

$$a(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = k_3 \lambda,$$

Ebből

$$\lambda = -2a \frac{k_1 \cos \alpha_0 + k_2 \cos \beta_0 + k_3 \cos \gamma_0}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$

a kívánt feltétel.

348. Koncentrikus gyűrűk rendszere figyelhető meg. Ezek középpontja az eredeti nyaláb nyoma. Fennáll, hogy  $\text{tg } 2\vartheta = \frac{z}{R}$  és  $2a \sin \vartheta = k\lambda$ .  
Ebből

$$z = R \frac{k\lambda \sqrt{4a^2 - k^2 \lambda^2}}{2a^2 - k^2 \lambda^2}. \quad (k=1, 2, \dots)$$