

2. Rutherford-Bohr-atom

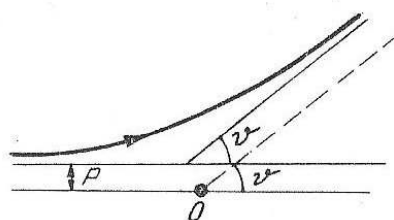
A nyugvó mag felé tartó töltött részecske az "ütközés" után eredeti irányától ϑ szöggel tér el. Ezt a szöget a

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{2 W_k b}$$

összefüggés alapján számíthatjuk, ahol Q_1 és Q_2 a részecske és a mag töltése, W_k a mag felé repülő részecske kinetikus energiája, b a részecske ütközési paramtére (lásd a 68. ábrát).

A töltött részecskék atommagokon bekövetkező szóródására vonatkozó Rutherford-féle összefüggés

$$\frac{\Delta N_0}{N_0} = N \frac{Q_1 Q_2}{4 W_k}^2 \frac{\Delta \omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$



68. ábra

alakú, amelyben $\frac{\Delta N_0}{N_0}$ a $\Delta \omega$ elemi

térszögbe szóródott részecskék hányada; ϑ a részecske eredeti mozgási irányával ϑ szöget zár be; N a felületegységre jutó szóró atommagok száma; Q_1 és Q_2 a részecske és a szóró mag töltése; W_k a részecske kinetikus energiája.

A lemez (fólia) tömegvastagsága alatt ρd [kg/m²] szorzatot értjük. Itt ρ a lemez sűrűsége, d vastagsága.

Bohr első posztulátuma kvantumfeltétel néven ismeretes. E szerint az elektron mozgása az atommag körül csak olyan pályákon mehet végbe, amelyek sugarai kielégítik az

$$m v_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

összefüggést. Itt m az elektron tömege, v a sebessége a vizsgált n -edik pályán, h a Planck-állandó, n egész szám, az úgynevezett főkvantumszám.

Bohr második posztulátuma, a Bohr-féle frekvenciafeltétel szerint az atomban létrejövő elektronátmenet révén kibocsátott elektromágneses sugárzás frekvenciája (f) és a megfelelő pályákhoz tartozó energiaértékek (W_n , illetve W_s) közötti kapcsolatot a

$$hf = W_n - W_s$$

összefüggés fejezi ki; $n < s$, ha $W = |W|$.

A hidrogénszerű atomokra vonatkozó általános Balmer-féle összefüggés

$$\bar{f} = RZ^2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

ahol \bar{f} a hullámszám, $\bar{f} = \frac{1}{\lambda}$; λ az elektromágneses sugárzás hullámhossza; R a Rydberg-féle állandó; Z a hidrogénszerű atom rendszáma; s, n a pályák sorszáma (főkvantumszámok).

A karakterisztikus röntgensugárzás hullámhosszát az

$$f = \frac{c}{\lambda} = R_c (Z - Z_n)^2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Moseley-féle összefüggés alapján határozhatjuk meg, ahol a korábbi jelölések megtartása mellett Z annak az elemnek a rendszáma, amelyből az antikatódot készítették, Z_n a leárványkolási tényező.

Feladatok

426. Határozzuk meg az atomfizikában meghonosodott energiaegységek (elektronvolt, kilo- és megaelektronvolt stb.) és az SI energiaegység közötti viszonyt. Fejezzük ki MeV-ben az egy atomi tömegegységnek megfelelő energiát. Határozzuk meg az elektron nyugalmi energiáját.

427. Nyugvó uránatommaggal centrálisan ütközik egy felé $2,25 \cdot 10^7$ m/s sebességgel tartó proton. Mekkora minimális távolságra közelíti meg a proton az uránatom magját?

428. α -részecske és Li^7 atommag centrális ütközésnél 10-13 m távolságra közelítették meg egymást. Határozzuk meg a részecskék relatív sebességének változását a közöttük levő távolság függvényében. Mekkora a relatív sebesség, ha a részecskék közötti távolság nagy?

429. 5 MeV energiájú α -részecske nyugvó aranyatom magjával ütközik. Az ütközés után az α -részecske sebességének az eredeti irányra merőleges komponense az aranyatomtól nagy távolságban 1,2 · 10⁷ m/s. Határozzuk meg a b ütközési paraméter értékét.

430. 6 MeV energiájú α -részecske aranylemezen áthaladva eredeti irányától 60°-ra térült el. Határozzuk meg az ütközési paramétert és hasonlítsuk össze a céltárgy atommagjainak effektív méretével, amelyet a $b = 0$ feltételből határozhatunk meg.

431. 1 MeV energiájú proton nyugvó urán atommaggal ütközik, a magtól nagy távolságra a proton sebességének iránya és az eredeti irány közötti szög 30°. Határozzuk meg, mekkora minimális távolságra közelítette meg a proton az urán atommagot.

431. A $\text{tg } \frac{\vartheta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{2W_k b}$ összefüggés alapján származtassuk a Rutherford-féle összefüggést.

433. 5,3 MeV energiájú párhuzamos α -részecskenyalábbal bombázzuk a 2,65 · 10⁻² kg/m² tömegvastagságú uránfóliát. A nyaláb merőlegesen esik a fóliára. A szórt α -részecskék megfigyelését a részecskenyaláb eredeti irányához képest 60°-os szög alatt elhelyezett, a szórt részecskék irányára merőlegesen állított szcintillációs ernyőn végezzük. Az ernyő felülete 5 · 10⁻⁵ m², távolsága a fóliára beeső α -részecskék becsapódási helyétől 0,1 m. Az ernyőn percenként 1 felvillanást észlelünk. Határozzuk meg a beeső nyaláb intenzitását.

434. Az előző feladat eredménye (a beeső α -részecskenyaláb intenzitása $N_0 = 2 \cdot 10^4$ részecske/cm² s) és megfelelő adatai alapján határozzuk meg az 1 s alatt a $\vartheta_1 = 30''$ és $\vartheta_2 = 1'$ szögtartományban szóródott ϑ -részecskék számát. Indokoljuk meg a kapott eredményt.

435. $W = 3,5$ MeV energiájú α -részecskékből álló keskeny sugárnyaláb a fólia normálisával $\varphi = 60^\circ$ -os szöget alkotva esik egy ezüsfóliára, amelynek tömegvastagsága 1,05 · 10⁻² kg/m². A szórt α -részecskék számlálását a sugárnyaláb eredeti irányához képest $\vartheta = 20^\circ$ -ra elhelyezett számlálóval végezzük; a bemenő nyílás felülete $A = 0,6$ cm², a szórcentrumoktól mért távolsága $s = 12$ cm. A-részecskeszámlálóba jutó α -részecskék relatív intenzitása $\eta = 2,9 \cdot 10^{-5}$. Határozzuk meg az ezüstatom magtöltését.

436. Polónium által kibocsátott α -részecskék bombáznak bizmut fóliát 30°-os szög alatt. A fólia vastagsága 10⁻⁴ cm. Határozzuk meg a $\vartheta_1 = 60^\circ$ és $\vartheta_2 = 90^\circ$ szögintervallumba szórt α -részecskék hányadát.

437. Határozzuk meg az elektron első három Bohr-féle pályájának sugarát.

438. Határozzuk meg a hidrogénatomban az elektron keringési idejét és szögsebességét.

439. A hidrogénatom első és második pályájára számítsuk ki az elektromos télerősség, potenciál és a Coulomb-féle vonzóerő értékét.

440. a) Határozzuk meg a hidrogénatomban az elektron összenergiáját, kinetikus és potenciális energiáját az első és második Bohr-féle pályán.

b) A hidrogénatom elektronjának összenergiája milyen körülmények között egyenlő az alapállapotú elektron potenciális energiájának felével?

c) Határozzuk meg a hidrogén atommag és az elektron közötti Coulomb-féle és a gravitációs vonzóerők arányát.

441. Kétatomos molekula tömege 2m, az atommagok egyensúlyi távolsága 2r. Ezt állandónak tekintve a Bohr-féle kvantumfeltétel alapján határozzuk meg a molekula forgási energiájának lehetséges értékeit.

442. Határozzuk meg a kétatomos molekula oszcillációs energiáját a Bohr-Sommerfeld-féle kvantumfeltétel alapján. A számításoknál tételezzük fel, hogy az atomok egyensúlyi helyzetük körül harmonikus rezgéseket végeznek (lineáris oszcillátor) és a zavaró kölcsönhatások elhanyagolhatók.

443. Egy Q töltésű tömegpontra a kitéréssel arányos vonzóerő hat. Ezt a lineáris oszcillátort mozgásirányával párhuzamos homogén E elektromos erőtérbe helyezzük. A Bohr-Sommerfeld-féle kvantum-feltétel alapján határozzuk meg, hogy az elektromos erőtér jelenléte mekkora változást okoz a lineáris oszcillátor energiájában. Hogyan befolyásolja az elektromos erőtér az oszcillátor által kisugárzott elektromágneses sugárzás rezgésszámát?

444. Határozzuk meg az atommag körül keringő elektron pályájának egyenletét.

445. Mutassuk ki, hogy adott magtöltés esetén azonos nagytengelyű ellipszispályákhoz ugyanakkora energiaérték tartozik.

446. Mutassuk ki, hogy a fél nagytengelyek hossza csak meghatározott értékeket vehet fel.

447. Számítsuk ki, hány-szorosára növekszik a hidrogénatomban az alap-

állapotban levő elektron pályájának sugara, ha az atomot 12,09 eV-os energiakvantummal gerjesztjük.

448. Hidrogénatomban az elektron az n -edik pályáról az s -edik pályára megy át, eközben az atom $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ hullámhosszu fényt emittál. Határozzuk meg az n -edik pálya sugarát.

449. Határozzuk meg az elektron által képviselt köráram áramerősségét a hidrogénatom $n = 1$ főkvantumszámu pályáján. Mekkora mágneses erőteret létesít az első Bohr-féle pályán keringő elektron a pálya középpontjában?

450. A Bohr-elmélet alapján határozzuk meg az n -edik pályán keringő elektron mágneses nyomatékát. Mutassuk ki, hogy a mágneses momentum és a pályaimpulzusnyomaték viszonya minden pálya vonatkozásában állandó.

451. Hidrogéngáz atomjait az n -edik energianívóra gerjesztjük. Hány szinképvonal jelenik meg a sugárzási spektrumban?

452. Egy hidrogénatom a Paschen-sorozathoz tartozó 10935 \AA hullámhosszu spektrumvonalat bocsátja ki. Mennyivel változott meg eközben az elektron pályaimpulzusnyomatéka?

453. Gerjesztett hidrogénatom alapállapotba ment át és közben energiát sugárzott ki. A kisugárzott egymásutáni fénykvantumok hullámhossza rendre $\lambda_3 = 74558 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 12818 \text{ \AA}$ és $\lambda_1 = 1025,7 \text{ \AA}$. Határozzuk meg a gerjesztett állapot W_n energiaértékét és az állapothoz tartozó n főkvantumszámot.

454. Határozzuk meg a hidrogénatom első gerjesztési potenciálját és ionizációs potenciálját.

455. Határozzuk meg a Lyman-, Balmer-, Paschen- és Brackett-sorozatnak megfelelő spektrális sáv szélességet hullámszámban és hullámhosszban kifejezve.

456. Hidrogénspektrumban 1026, 3970, 18751 \AA hullámhosszuságú vonalakat figyeltek meg. Milyen sorozatokhoz tartoznak és milyen elektronátmeneteknek felelnek meg?

457. Hidrogéngáz atomjait elektronnyalábbal gerjesztjük. Mekkora energiával kell rendelkezniük a nyaláb elektronjainak, hogy ezen ütközési gerjesztést követően a hidrogénspektrum minden sorozatának minden egyes vonala megjelenjék? Mekkora a gerjesztő elektronok minimális sebessége?

458. Hidrogénatomokat elektronokkal gerjesztünk. Mekkora energiával rendelkezhetnek a nyaláb elektronjai, hogy a hidrogénatom gerjesztését követően a sugárzási spektrumban egyetlen szinképvonal jelenjék meg?

459. A sugárzási spektrumban a nátrium D-vonala akkor jelenik meg,

ha az atom energiája elektronátmenet révén $3,37 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ -al csökken. Határozzuk meg a nátrium D-vonalának hullámhosszát.

460. Foton kibocsátásakor az atom visszalökődik. Határozzuk meg, milyen mértékben befolyásolja ez a körülmény a hidrogénatom által kibocsátott foton hullámhosszát. Mekkora sebességre tesz szert a hidrogénatom, miközben elektronja a második pályáról az elsőre ugrik át?

461. Vizsgáljuk meg egy mozgó atom sugárzását nem relativisztikus esetben. A Doppler-effektus összefüggésének levezetésekor használjuk fel az energia és impulzus megmaradásának tételét.

462. Hidrogénatomok földi fényforrásra vonatkozó $\lambda = 4340 \text{ \AA}$ hullámhosszu szinképvonala egy távoli ködfolt szinképében a vörös felé $\Delta\lambda = 20 \text{ \AA}$ -mel tolódott el. Tételezzük fel, hogy a vöröseltolódás kizárólag a Doppler-effektus következménye. Határozzuk meg a ködfolt v sebességét a Földhöz képest.

463. Igen távoli galaxis szinképében megfigyelték, hogy a kálium földi fényforrásra vonatkozó 3969 \AA hullámhosszu vonalának vöröseltolódása 80 \AA . Tételezzük fel, hogy a vöröseltolódás a Doppler-effektus következménye. Határozzuk meg

a) a galaxis sebességét a Földhöz képest;

b) mekkora a galaxis spektrumában a $3 \rightarrow 2$ átmenet vonalának hullámhossza egyszerűen ionizált héliumatom esetén ($R_{\text{He}} = 109722,26 \text{ cm}^{-1}$).

464. Gerjesztett hidrogénnyalábot haladási irányához képest 45° alatt vizsgálunk. A $2 \rightarrow 1$ elektronátmenetnek megfelelő szinképvonal hullámhossza 1215,18 \AA . Határozzuk meg a hidrogénatomok sebességét.

465. Pontosabb számításoknál nem hanyagolhatjuk el a magnak az elektron-mag rendszer súlypontja körüli mozgását. Ennek figyelembe vételével

a) határozzuk meg az elektron-mag rendszer kinetikus energiájának kifejezését;

b) mutassuk ki, hogy a rendszer összen energiája ebben az esetben is egyenlő a potenciális energia felével;

c) határozzuk meg a Rydberg-állandó pontosabb kifejezését.

466. Az előző feladatban vázolt körülmény a hidrogén atommag véges tömegének a következménye. Ennek a ténynek a szem előtt tartásával származtassuk az általános Balmer-összefüggést, majd határozzuk meg a hidrogénatom mágneses momentumát.

467. Határozzuk meg a röntgensugárzás K-vonalának maximális hullámhosszát, ha az antikatód vasból illetve nikkelből készült.

468. Wolfram-atom $M \rightarrow L$ elektronátmenet révén $1,43 \text{ \AA}$ hullámhosszu röntgensugarat sugároz. Határozzuk meg a leárvékolási tényező értékét.

469. $L \rightarrow K$ elektronátmenet révén egy atom $0,788 \text{ \AA}$ hullámhosszu röntgensugarat sugároz. Határozzuk meg az atom rendszámát.

S
B
a

á
t

i
i
e
i
i
i

426. $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; $1 \text{ keV} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$; $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$;
 $931,15 \text{ MeV}$; $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

327. $5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$.

428. Két részecskéből álló rendszer mozgásának tanulmányozása helyettesíthető egyetlen fiktív részecske mozgásának tanulmányozásával, amely olyan messze van a két részecske tömegközéppontjától, mint amekkora a két valóságos részecske egymástól mért távolsága, tömege pedig

$$\mu = \frac{mM}{m+M}.$$

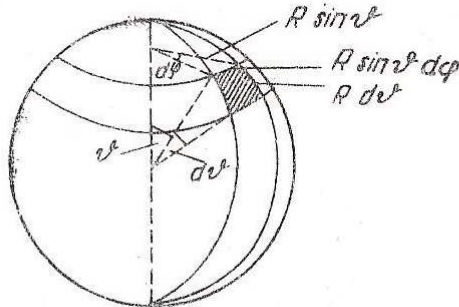
Ezt a tömeget redukált tömegnek nevezzük.

Az energiamegmaradás tételének felhasználásával

$$\frac{Q_1 Q_2}{r_{\min}} = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{Q_1 Q_2}{r}, \quad (1)$$

ahol v a két részecske relatív sebessége, r a két részecske viszonylagos távolsága. Az (1) kifejezésből

$$v = \left[\frac{2Q_1 Q_2}{\mu} \left(\frac{r - r_{\min}}{r r_{\min}} \right) \right]^{1/2} \quad (2)$$



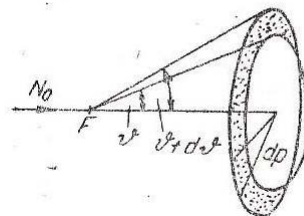
112. ábra

Jelölje v_∞ azt a relatív sebességet, amellyel a részecskék mozognak egymástól nagy r távolságban. Mivel $r \rightarrow \infty$, a (2) kifejezés

$$v \rightarrow \left[\frac{2Q_1 Q_2}{\mu r_{\min}} \right]^{1/2} = v_\infty = 25,65 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

429. $b_1 = 4,25 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$; $b_2 =$
 $= 1,735 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$.

430. $b = 3,28 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$; $r_0 = 3,78 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$.



113. ábra

431. $r_{\min} = 3,22 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$.

432. Tegyük fel, hogy a fólia felé párhuzamos sugarakból álló nyaláb tart és a fóliára időegység alatt N_0 α -részecske esik. A $\frac{dN_0}{N_0}$ részecskék hányad, azaz a $d\Omega$ térszögbe szóródott részecskék hányadának meghatározásához fejezzük ki polár koordinátarendszerben a $d\omega$ elemi térszöget. A 112. ábra és a térszög definíciója alapján

$$d\omega = \frac{R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R^2} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1)$$

Vizsgáljuk meg, átlagosan hány részecske szóródik a ϑ és $\vartheta + d\vartheta$ szögek közé eső tartományba (lásd a 113. ábrát).

Az ennek megfelelő térszöget az (1) kifejezés φ szerinti integrálja adja ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (2)$$

Mint ismeretes, az α -részek eltérítési szögét azonos feltételek esetén a b szórási paraméter határozza meg. Feltételezésünk szerint szóródás előtt az α -részecskék párhuzamos nyalábbbán haladnak. ϑ és $\vartheta + d\vartheta$ közé eső szöggel nyilvánvalóan azok az α -részecskék szóródnak, amelyeknél a szórási paraméter b és $b + db$ értékek közé esik. Ezek az α -részek a szórócentrumok köré irt b és $b + db$ sugaru körök közé eső gyűrűn haladnak át. Egy gyűrű területe $2\pi b db$, tehát azoknak az α -részeknek a száma, amelyek szóródás után ϑ és $\vartheta + d\vartheta$ szögek közé eső irányban, azaz a $d\Omega$ térszögön belül szóródnak, könnyű belátni, hogy a

$$dN_0 = N_0 N 2\pi b db \quad (3)$$

kifejezéssel adható meg, ahol N_0 a fólia felületére 1 s alatt beeső részecskék számát, N a fólia 1 cm^2 -ében levő szórócentrumok számát jelöli.

A fejezet bevezetőjében ismertetett összefüggésből

$$b^2 = \frac{Q_1^2 Q_2^2}{4W^2} \cotg^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Differenciáljuk ezt az összefüggést ϑ szerint és az eredményt helyettesítsük be (3)-ba. Ekkor (2) felhasználásával végeredményként

$$\frac{dN_o}{N_o} = N \left(\frac{Q_1 Q_2}{4W} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

(A b^2 deriválásakor fellépő negatív előjel mindössze azt jelzi, hogy az ütközési paraméter növelésével a szög csökken és megfordítva. Ezért b db-nek csak az abszolút értékével számoltunk.)

433. $N_o = 2 \cdot 10^4$ részecske s^{-1} .

434. A ϑ_1 és ϑ_2 szögintervallumban szóródott részecskék hányadát a Rutherford-féle

$$\frac{dN_o}{N_o} = N \left(\frac{Q_1 Q_2}{4W} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

összefüggés ϑ szerinti integrálásával kapjuk a

$$d\Omega = 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

egyenlőség figyelembe vételével:

$$\eta = \frac{\Delta N_o}{N_o} = \pi N \left(\frac{Q_1 Q_2}{2W} \right)^2 \left[\operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1}.$$

Az eredmény általános formájában a Rutherford-féle formula érvényességi határán belül általános érvényű, amelyben

$$N = \frac{\varphi d}{\sin \varphi} \frac{N_A}{A}.$$

és φ a beeső sugárnyaláb és a fólia síkja által bezárt szög, N_A a Loschmidt féle szám, A az atomsúly.

Az eredménybe behelyettesítve a feladat adatait lehetetlen értéket kapunk, amely szerint a vizsgált szögtartományban szóródott részecskék száma sokszorosan felülmúlja a beeső részecskék számát. Ez azzal indokol-

ható, hogy a Rutherford-féle összefüggést egészen kis szórási szögek esetén nem alkalmazhatjuk. A kísérletekben használt fóliák esetén a Rutherford féle összefüggés csak néhány fok és ennél nagyobb szórási szögek esetén alkalmazható. Kis szórási szögekre is érvényes összefüggés levezetéséhez meg kellene határozni a beeső részecskényaláb intenzitásának csökkenését a fóliában. Ez, mint tudjuk, exponenciális lefutású, de, mivel kísérletileg nem ellenőrizhető, a kutatók nem foglalkoznak behatóbban az intenzitáscsökkenés jellegével és kvantitatív meghatározásával.

435. $Q = 47 Q_e$.

436. $\gamma = 1,8 \cdot 10^{-4}$.

437. $r_1 = 0,529 \text{ \AA}; r_2 = 2,116 \text{ \AA}; r_3 = 4,761 \text{ \AA}$.

438. $1,51 \cdot 10^{-16} \text{ s}; 4,16 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}$.

439. $n=1: E=5,16 \cdot 10^{11} \text{ V/m}; U=27,2 \text{ V}; F=82,3 \cdot 10^{-9} \text{ N};$
 $n=2: E=3,21 \cdot 10^{10} \text{ V/m}; U=6,8 \text{ V}; F=5,14 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$

440. a) $n=1: W=-13,6 \text{ eV}; W_k=13,6 \text{ eV}; W_p=-27,2 \text{ eV}.$

$n=2: W=-3,4 \text{ eV}; W_k=3,4 \text{ eV}; W_p=-6,8 \text{ eV}.$

b) a végtelenben, ahol az elektron potenciális energiája zérus.

c) $2,27 \cdot 10^{39}$.

441. $W = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{\hbar^2}{2\Theta} n^2.$

442. A Bohr-féle kvantumfeltétel általános alakja

$$\oint p_i dq_i = n_i h,$$

ahol p_i és q_i a rendszer általános impulzusa, illetve általános koordinátája, $i=1, 2, 3, \dots$

E kvantumfeltételben szereplő általános koordináták száma - ha a koordináta-rendszer x -tengelyét a két atomot összekötő egyenes mentén vesszük fel és feltételezzük, hogy az atomok rezgése csak ebben az egyenesben megy végbe - eggyel egyenlő: $q=x$. Az impulzust az atomok összenergiájának kifejezéséből határozzuk meg:

$$W = \frac{D x^2}{2} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{D x^2}{2} + \frac{p^2}{2m},$$

ahol D arányossági tényező, x a két atom együttes elmozdulása, m a molekula tömege, p a két atom impulzusa. Ebből

$$p = (2 W m - D m x^2)^{1/2} = [2 m (W - W_p)]^{1/2}.$$

Ezt behelyettesítve a kvantumfeltételbe eredményként

$$W = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} n h = n h f.$$

443. Az oszcillátor energiája a feladat feltételei között

$$W = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} D x^2 - Q_e E x,$$

ahonnan

$$p = \sqrt{Dm} \left[-\frac{2W}{D} + \frac{Q_e^2}{D^2} E^2 - \left(x - \frac{Q_e E}{D} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

A koordinátarendszer alkalmas megválasztása azt eredményezte, hogy az általános koordináták száma 1-re redukálódott.

A kvantumfeltételbe behelyettesítve az integrálás elvégzése és a szükséges átalakítások után

$$W = n h f - \frac{Q_e^2 E^2}{2D}.$$

Az elektromos erőter jelenléte

$$\Delta W = - \frac{Q_e^2}{2D} E^2$$

energiaeltolódást okozott, ez független az n kvantumszámtól, azaz mindegyik energianivónál ugyanakkora. A Bohr-féle frekvenciafeltétel értelmében a kibocsátott elektromágneses sugárzás energiája a két energiaszint különbségével egyenlő, tehát az elektromos erőter jelenléte a kibocsátott sugárzás rezgésszámát nem változtatja meg.

444. Egy $+ZQ_e$ töltésű atommag körül keringő elektron mozgását vizsgáljuk. Használjuk ki azt a körülményt, hogy a mag tömege az elektron tömegénél lényegesen nagyobb és a mag és az elektron közötti vonzóerő a Cou-

lomb-féle erő. A probléma hasonló a Nap körül keringő bolygók mozgásának problémájához. A megoldáskor az energia és az impulzusmomentum megmaradási tételéből indulunk ki, amelyeket polárkoordinátás alakjukban írunk fel:

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{ZQ_e^2}{r} = W \quad (1)$$

$$m r^2 \dot{\varphi}^2 = L \quad (2)$$

Az $r = r(t)$ függvény megkeresése helyett egyszerűbb az $r = r(\varphi)$ függvény meghatározása. E célból térjünk át az idő szerinti deriváltakról a φ szög szerinti deriváltakra és vegyük figyelembe a (2) összefüggést:

$$r = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m r^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (3)$$

Helyettesítsük be (3)-at és (2)-t az (1) energia megmaradási tételbe:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2 W m}{L^2} + \frac{2 m Z Q_e^2}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \quad (4)$$

Vezessük be az $r = \frac{1}{\varphi}$ jelölést. Ekkor

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\varphi} \right)^2 \text{ és}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2 m W}{L^2} + \frac{m Z Q_e^2}{L^2} = \varphi - \varphi^2 \quad (5)$$

Általában $\frac{d\varphi}{d\varphi} \neq 0^*$. Ebből, a feltételből φ -ra egy másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet adódik:

*A $\frac{d\varphi}{d\varphi} = 0$ feltétel új megoldást nem eredményez.

$$\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{mZQ_e^2}{L^2}$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása egyenlő az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának és a megfelelő homogén egyenlet általános megoldásának összegével. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

$$\rho_1 = \frac{mZQ_e^2}{L^2};$$

a homogén egyenlet általános megoldása

$$\rho_2 = A \cos \varphi + B \sin \varphi,$$

tehát

$$\rho = \frac{mZQ_e^2}{L^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi \quad (6)$$

ahol A és B a kezdeti feltételekből meghatározható állandók. Ha a φ szöget a radiusvektornak attól a helyzetétől számítjuk, ahol $r = r_{\min}$, akkor $\varphi = 0$ esetben

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0 = -A \sin \varphi + B \cos \varphi$$

azaz $B = 0$. E miatt

$$\rho = \frac{mZQ_e^2}{L^2} + A \cos \varphi = \frac{1}{r} \quad (7)$$

Ez a $+ZQ_e$ töltésű mag körül keringő elektron pályájának egyenlete. Hasonlítsuk össze a (6) egyenletet a kupszeleteknek a fókuszpontra mint kezdőpontra vonatkoztatott polárkoordinátás egyenletével:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

ahol a a fél nagytengely, ε az excentricitás. Viszont

$$\rho = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad (8)$$

A (7) és (8) egyenletek megegyeznek egymással, ha

$$\frac{mZQ_e^2}{L^2} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}.$$

Az elektron pályája tehát kupszelet, amelynek egyik gyújtópontjában helyezkedik el a mag. Ez a kupszelet - amint azt a bolygómozgás tárgyalásakor láttuk - ellipszis, ha $W < 0$. Az atomban kötött elektron összenergiája viszont negatív, tehát az elektronok az atommag körül ellipszispályán keringenek, ami megfelel a Bohr-, illetve a Bohr-Sommerfeld-féle kvantumfeltételnek.

445. Megkíséreljük a W összenergiát az a nagytengely függvényében felírni, azaz kimutatjuk, hogy adott atom (a mag töltése $+ZQ_e$) esetében $W = W(a)$. E célból az energia- és impulzusmomentum-megmaradás tételét használjuk fel:

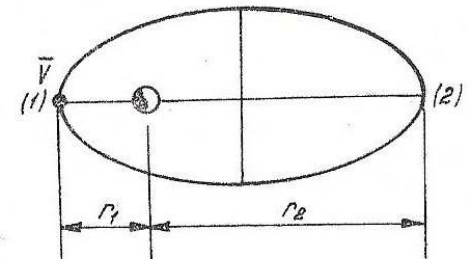
$$W_p + W_k = \text{állandó}, \quad (1)$$

$$\vec{r} \times m \vec{v} = \text{állandó}. \quad (2)$$

A 114. ábra és az (1), (2) megmaradási törvények alapján

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{ZQ_e^2}{r_1} = \\ &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{ZQ_e^2}{r_2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2$$



114. ábra

Ez utóbbi egyenletből fejezzük ki v_1 -et és helyettesítsük be (3)-ba. Átalakítások után

$$v_2^2 = \frac{2 Z Q_e^2 r_1}{r_2 (r_2 + r_1) m}$$

Az összenergia

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{Z Q_e^2}{r_2}$$

Helyettesítsük be v_2^2 -nek korábban meghatározott kifejezését és megkapjuk a $W = W(a)$ összefüggést:

$$W = - \frac{Z Q_e^2}{r_2 + r_1} = - \frac{Z Q_e^2}{2a} \quad (4)$$

Megjegyzés: ezt az eredményt az előző feladat (5) és (8) összefüggésének felhasználásával is megkaphatjuk.

446. Az előző feladat (4) eredménye alapján

$$a = - \frac{Z Q_e^2}{2W}$$

másrészt

$$W = - \frac{1}{2} \frac{Z^2 Q_e^4 m}{\hbar^2 n^2}$$

E két kifejezésből

$$a = \frac{r_1}{Z} n^2,$$

ahol $r_1 = \frac{\hbar^2}{m Q_e^2}$ az első Bohr-féle sugár. Azt találtuk tehát, hogy a kü-

lönböző kvantált állapotokhoz tartozó fél nagytengelyek hossza arányos a főkvantumszám négyzetével.

$$447. r_n = 9 r_1.$$

$$448. 7,7 \text{ \AA}.$$

$$449. 1,06 \text{ mA}; \sim 10^8 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

$$450. \mu_n = \frac{Q_e \hbar}{2mc} n = \mu_B n; \mu_B = \frac{Q_e \hbar}{2mc} \text{ a Bohr magneton. } \frac{\mu_n}{L} = \frac{Q_e}{2mc}.$$

$$451. \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$452. \Delta N = 3 \hbar.$$

$$453. W_n \approx -0,3 \text{ eV}; n=6$$

$$454. U_{(1 \rightarrow 2)} = 10,2 \text{ V}; U_{(1 \rightarrow \infty)} = 13,6 \text{ V}.$$

$$455. \Delta T_L = 27434 \text{ cm}^{-1}; \Delta T_B = 12193 \text{ cm}^{-1}; \Delta T_P = 6858 \text{ cm}^{-1}; \\ \Delta \lambda_L = 304 \text{ \AA}; \Delta \lambda_B = 2916 \text{ \AA}; \Delta \lambda_P = 10545 \text{ \AA};$$

$$\Delta T_{Br} = 4389 \text{ cm}^{-1};$$

$$\Delta \lambda_{Br} = 25920 \text{ \AA}.$$

$$456. \text{Lyman } (3 \rightarrow 1); \text{ Balmer } (7 \rightarrow 2); \text{ Paschen } (4 \rightarrow 3).$$

$$457. W = 13,6 \text{ eV}; v = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

$$458. 10,2 \text{ eV} \leq W \leq 12,1 \text{ eV}.$$

$$459. 5890 \text{ \AA}.$$

460. A fotonkibocsátás mechanizmusára írjuk fel az energia és impulzus megmaradási tételét egy olyan koordinátarendszerben, amelyet a kezdetben nyugvó atomhoz rögzítünk:

$$W_1 = W_2 + \frac{1}{2} M v^2 + \hbar f' \quad (1)$$

$$0 = M v - \frac{\hbar f'}{c} \quad (2)$$

ahol W_1 és W_2 az atom energiája a fénkvantum kibocsátása előtt és után megfelelően, M az atom tömege, v az atom sebessége a foton kibocsátása után, f' az elektromágneses sugárzás frekvenciája, ahol a vésző azt jelzi, hogy az atom visszalökődése miatt az észlelt frekvencia megváltozott. A két egyenlet egybevetéséből a hullámhossz változása

$$\Delta \lambda = \frac{h}{2Mc} \left(1 - \frac{\Delta f}{f}\right) \sim \frac{h}{2Mc} = 6,59 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}.$$

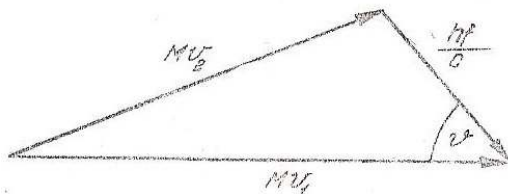
Az atom visszalökődési sebességének meghatározáshoz használjuk fel a (2) kifejezést és vegyük figyelembe, hogy a vizsgált effektus révén bekövetkező frekvenciaváltozás elhanyagolható. Átalakítások után

$$v = \frac{3 h R}{4M} = 3,25 \text{ ms}^{-1}.$$

461. Az energia és impulzus megmaradási tétele, ha W_1 , W_2 és v_1 , v_2 jelölik az atom energiáját és sebességét megfelelően a foton kibocsátása előtt és után

$$W_1 + \frac{1}{2} M v_1^2 = W_2 + \frac{1}{2} M v_2^2 + h f', \quad (1)$$

$$\bar{M} v_1 = \bar{M} v_2 + \frac{h f'}{c} \quad (2)$$



115. ábra

A (2) vektoregyenlet három skaláregyenlettel egyenértékű. A komponensek felírása helyett vegyük figyelembe, hogy az atom sugárzás előtti haladási irányára vetített impulzuskomponensekre is felírható az impulzusmegmaradási tétel (lásd a 115. ábrát).

Az atom várhatóan kevésbé tér el eredeti irányától, tehát

$$M v_1 = M v_2 + \frac{h f'}{c} \cos \vartheta \quad (3)$$

Mivel $W_1 - W_2 = h f$, az (1) és (3) egybevetéséből

$$\frac{\Delta f}{f'} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \cos \vartheta, \quad (4)$$

ahol

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}; \Delta f = f - f' \text{ és } \Delta \lambda = \lambda' - \lambda.$$

462. Az előző feladat (4) eredményét felhasználva $v = 1380 \text{ km/s}$.

463. a) $v = 6046 \text{ kms}^{-1}$; b) $\lambda' = 1674 \text{ \AA}$, szemben a földi fényforrás sugárzásakor megfigyelt $\lambda_0 = 1640 \text{ \AA}$ -mel.

464. $7 \cdot 10^4 \text{ m/s}$.

465. a) Jelölje m_m , v_m , r_m és m_e , v_e , r_e az atommagnak, illetve az elektronnak a tömegét, sebességét és a közös súlypontjuktól mért távolságukat megfelelően. A rendszert az elektron és az atommag közötti elektrosztatikus vonzóerő tartja együtt. Ezzel az erővel ellentétes irányban hat a súlypont körüli keringésnél fellépő centrifugális erő:

$$\frac{m_m v_m^2}{r_m} = \frac{Z Q_e^2}{(r_m + r_e)^2}, \quad (1)$$

$$\frac{m_e v_e^2}{r_e} = \frac{Z Q_e^2}{(r_m + r_e)^2}; \quad (2)$$

Ezekből

$$W_k = \frac{Z Q_e^2}{2(r_m + r_e)}.$$

$$b) \quad W = W_k + W_p = \frac{Z Q_e^2}{2(r_m + r_e)} - \frac{Z Q_e^2}{(r_m + r_e)} = -\frac{1}{2} W_p.$$

c) A Rydberg-állandó szerepel az energia kifejezésében, viszont az energia kvantált, tehát az $(r_m + r_e)$ mennyiség sem vehet fel tetszőleges

értéket. Először határozzuk meg $(r_m + r_e)$ diszkrét értékeit. A Bohr-féle kvantumfeltétel és az a) válasz (1), (2) egyenletei szerint

$$m_m \omega r_m^2 + m_e \omega r_e^2 = n\hbar,$$

$$m_m \omega^2 r_m = m_e \omega^2 r_e = \frac{ZQ_e}{(r_m + r_e)^2},$$

ahol ω a forgás szögsebessége.

Az egyenletekből a mag-elektron távolságra

$$r_e + r_m = \frac{\hbar^2 n^2}{Z\mu Q_e^2}$$

adódik, amelyben

$$\mu = \frac{m_e + m_m}{m_e m_m}.$$

Viszont

$$W_n = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 Q_e^2}{(r_m + r_e)} = -\frac{1}{2} \frac{Z^2 Q_e^4}{\hbar^2} \mu \frac{1}{n^2}.$$

De

$$T_n = \frac{W_n}{n^2} = -Z^2 \frac{Q_e^4 m_e}{4\pi c \hbar^3} \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_m}} \frac{1}{n^2} = -Z^2 \frac{Q_e^4 m_e}{4\pi c \hbar^3} \frac{1}{n^2} \quad (5)$$

ahol

$$R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{m_m}} \quad \text{és} \quad R_\infty = \frac{Q_e^4 m_e}{4\pi c \hbar^3}.$$

466. a) Az előző feladat (3) eredménye alapján

$$\bar{f} = \frac{W_n - W_s}{2\pi c \hbar} = Z^2 \frac{Q_e^4 m_e}{4\pi c \hbar^3} \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_m}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right) = RZ^2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

$$b) \quad \mu = \frac{Q_e \omega}{2c} (r_m^2 - r_e^2) = \frac{Q_e \hbar n}{2c} \left(\frac{1}{m_e} - \frac{1}{m_m} \right).$$

467. A Moseley-törvény szerint

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - Z_n)^2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

A K-sorozatban a legnagyobb hullámhosszu a K_α -vonal, ez a $2 \rightarrow 1$ elektronátmenetnek felel meg. A K és L héjakra $Z_n = 1$. Ezek felhasználásával

$$\lambda_{Fe} = 1,94 \text{ \AA} \quad \text{és} \quad \lambda_{Ni} = 1,67 \text{ \AA}.$$

$$468. \quad Z_n = 5,5.$$

$$469. \quad Z = 40, \text{ (Zr)}$$