

Fizika Tanszék Munkaközössége

# FIZIKA

I.

Gyakorlat II.

*Szerkesztette:*

Füzessy Zoltán

KÉZIRAT

2. javított kiadás  
12. változatlan kiadása

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1986

Munkaközösségi tagok:

Dér János adjunktus

Villamosságtan: Elektrosztatika

Dr. Füstöss László tanársegéd

Villamosságtan: Stacionárius áramok

Mágneses erőtér

Kvázistacionárius erőterek

Elektromágneses hullámok

Füzessy Zoltán adjunktus

Atomfizika

Szabó Árpád adjunktus

Optika

A kiadásért felelős:

a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karának dékánja

Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat műszaki gondozásában

Felelős osztályvezető: Kontra Zita

Műszaki szerkesztő: Császár Andrásné

Megrendelve: 1986. szeptember. Megjelent: 1986. november. Példányszám: 1028

Készült: kisírfeszítéssel, az MSZ 5601—59

és az MSZ 5602—55 szabvány szerint,

20,— (A/5) ív terjedelemben, 119 ábrával

86-2029 — Dabasi Nyomda, Budapest — Dabas

Felelős vezető: Bálint Csaba igazgató

## ELEKTROSZTATIKA

Pontszerű elektromos töltések között fellépő erőhatást Coulomb törvénye írja le:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol  $Q_1$  és  $Q_2$  az elektromos töltések nagysága,  $r$  a töltések közötti távolság és  $\epsilon$  a közeg dielektromos állandója, melyet  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  alakban is szokás írni.  $\epsilon_0$  a vákuum dielektromos állandója,  $\epsilon_r$  a közeg relatív dielektromos állandója.

Az elektromos térerősség vektort az

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

egyenlet értelmezi, ahol  $\vec{F}$  a  $Q$  pontszerű töltésre ható erő. Ha az elektromos erőteret egy pontszerű  $Q$  töltés hozza létre, akkor a térerősség abszolút értéke

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}.$$

Az elektromos eltolás vektorát a

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

összefüggés értelmezi, ahol  $\epsilon$  a dielektromos állandó. Az elektrosztatikus tér alapvetően fontos két törvénye:

a) Az elektrosztatika Gauss-tétele:

$$\oint \vec{D}_n \, dA = \sum Q_i$$

b)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

amely tulajdonképpen az elektrosztatikus erőter konzervatív voltát fejezi ki, és lehetővé teszi, hogy az  $\mathbf{E}$  vektorteret egy skalármennyiséggel, a potenciállal jellemezzük. Az erőter két pontja közötti potenciálkülönbséget a

$$\Delta U = - \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

adja. A potenciálkülönbség szemléletes jelentése a pozitív egységnyi töltés helyzeti energiájának megváltozása, miközben a töltés egyik pontból a másikba kerül. Az  $U$  függvény ismeretében a térerősséget a következő módon számíthatjuk

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U.$$

Pontszerű töltés potenciálja, ha a zérus potenciál a végtelenben van,

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}.$$

Elektromos dipólusnak nevezzük két egymástól kis távolságra levő, pontszerű  $+Q$  és  $-Q$  töltést. Ha a  $-Q$ -tól  $+Q$  helyéig mutató vektor  $\vec{l}$ , akkor az  $\vec{m} = Q\vec{l}$  vektor a dipólus momentuma. A dipólusra ható forgatónyomaték  $\vec{m} \times \mathbf{E}$ .

Vezetőkön a töltés elektrosztatikus erőterben a vezető felületén helyezkedik el. A vezető belsejében a térerősség nulla, a felületen a felületre merőleges, ezért a vezetőn az elektromos potenciál állandó.

A és B vezető legyen egymáshoz közel, de más vezetőktől távol. Az egyiket helyezzük el  $+Q$  a másikon  $-Q$  töltést. A két vezető potenciálkülönbsége

$$U = \frac{1}{C} Q,$$

C neve az A és B vezető alkotta kondenzátor kapacitása.

Az elektromos erőter energiája

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{V}.$$

alakban írható, ahol  $\varphi$  a térfogati,  $\omega$  a felületi töltéssűrűség.

1. Határozzuk meg a hidrogénatomban a proton és az elektron között ható elektromos vonzóerőt. A hidrogénatom sugara  $0,5 \cdot 10^{-8}$  cm. Az elemi töltés nagysága  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

2. Két elektromos töltés 5 cm távolságra van egymástól. Mekkora ezek a töltések, ha  $0,004$  N nagyságú erővel hatnak egymásra?

3. Két  $Q_1 = 2,10^{-8}$  ill.  $Q_2 = -3,10^{-8}$  C nagyságú pontszerű töltés egymástól mért távolsága  $r = 10$  cm. Mekkora erő hat a  $Q = 6,10^{-8}$  C nagyságú töltésre, ha ezt az előbbi két töltés közötti távolság felezőpontjában helyezzük el?

4. Az előző példában említett töltések elrendezését oly módon változtatjuk meg, hogy a harmadik töltést a  $Q_1$  töltéstől 5 cm-re, de az első két töltést összekötő egyenesre merőlegesen helyezzük el. Mekkora ebben az esetben a harmadik töltésre ható erő, és milyen irányu?

5. Egy négyzet csúcspontjaiban négyegyforma nagyságú és előjelű pontszerű töltés helyezkedik el. Mekkora negatív töltést kell elhelyezni a négyzet középpontjában, hogy egyik töltésre se hasson erő?

6. Két pontszerű töltés  $6,10^{-3}$  N erővel taszítja egymást. Mekkora erővel taszítják egymást abban az esetben, ha a töltések értéke háromszorosára növekszik, a közöttük levő távolság pedig megkétszereződik?

7. Két egyenlő sugaru fémgolyócskát 1-1 méter hosszú fonálon közös pontban felfüggesztünk. Mindkét golyóval azonos nagyságú töltést közlünk. Az elektromos taszítás hatására 20 cm-re eltávolodnak egymástól. Mekkora a golyók töltése, ha tömegük 1-1 g?

8. Két pontszerű töltés levegőben egymástól 30 cm távol van. Mekkora távolságban kell elhelyezni őket olajban, hogy kölcsönhatásuk nagysága ne változzék? Az olaj dielektromos állandója  $\epsilon_r = 4$ .

9. Két azonos súlyú és sugaru golyót egyenlő hosszú fonálon közös pontban felfüggesztünk. Egyenlő mértékben feltöltjük őket. Mekkora legyen a golyók anyagának sűrűsége ( $\rho_0$ ), hogy az elrendezést folyékony dielektrikumba helyezve a fonalak által bezárt szög megegyezzen a levegőben mért szöggel? A dielektrikum sűrűsége  $\rho$ , dielektromos állandója  $\epsilon_r$ .

30. Az  $R$  sugaru gömbfelületen egyenletesen  $\omega$  sűrűségű töltés oszlik el. Határozzuk meg, hogyan függ a térerősség a gömb középpontjától mért  $d$  távolságtól. Szerkesszük meg  $e$  mennyiségek grafikonját.

31. A Földet 6000 km sugaru gömbnek tekintve határozzuk meg a Föld töltését, ha az elektromos térerősség a Föld felületén  $100 \frac{V}{m}$ .

32.  $R$  sugaru gömbben mindenütt  $\rho$  térfogati töltéssűrűség van. Határozzuk meg a térerősséget a gömbön belül és kívül.

33. Határozzuk meg a légkör átlagos töltéssűrűségét, ha a térerősség a Föld felszínén  $100 \frac{V}{m}$  és 1,5 km magasságban  $25 \frac{V}{m}$ .

34. Két koncentrikus vékony gömbvezető sugarai 5 ill. 10 cm. A belsőn  $3 \cdot 10^{-7} C$  a külsőn  $5 \cdot 10^{-7} C$  töltés van. Határozzuk meg a térerősséget a gömbök között és a gömbökön kívül.

35. Egy  $R_1$  sugaru  $Q$  töltést hordozó fémgömböt koncentrikusan elhelyezett türes fémgömbhéj vesz körül, amelynek belső sugara  $R_2$ , külső sugara pedig  $R_3$ . A külső gömbhéj töltése nulla. Szerkesszük meg a térerősségnek, mint a centrumtól való távolság függvényének grafikonját!

36. Mint tudjuk, a folyadékhártya felületi feszültségéből eredő kapilláris nyomás fordítottan arányos görbületének sugarával. Stabilis e szappanbuborék, ha bizonyos töltést adunk rá?

37. Mekkora a térerősség a tér tetszőszerinti pontjában, ha  $\omega$  sűrűséggel egyenletesen eloszló töltést helyezünk el egy végtelen síkon és azon  $R$  sugaru gömb felületén, amelynek középpontja az adott síkban fekszik.

38. 10 mm sugaru végtelen hosszú körhenger felületén  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \frac{C}{m^2}$  a töltéssűrűség. Határozzuk meg a térerősséget a henger felületétől 1 cm távolságban.

39. Két végtelen hosszú koaxiális hengert, melynek sugarai 1 cm és 1,5 cm, egymással töltéssel töltünk fel, úgy hogy a töltéssűrűség a külső hengeren  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \frac{C}{cm^2}$ , a belsőn pedig ennek a fele. Határozzuk meg a térerősséget a tengelytől mért 1,25 cm és 2 cm távol levő pontokban.

40. Két koaxiális hengeralakú vezető töltése  $Q_1 = Q_2 = 5 \cdot 10^{-6} C$ . A hengerek sugarai 6 cm és 5 cm, a hengerek hossza 1 m. Mekkora a térerősség a tengelytől számított 5,5 cm és 10 cm távol fekvő pontokban?

41. Mekkora a térerősség az előző feladatban, ha a belső henger töltése  $Q_1 = 5 \cdot 10^{-6} C$ , a külső pedig  $Q_2 = -5 \cdot 10^{-6} C$ .

42. Két egymásra mérőlegesen végtelen sík töltéssűrűsége  $\omega$  ill.  $2\omega$ . A síkok metszésvonala egy végtelen hosszú  $R$  sugaru  $-3\omega$  töltéssűrűségű henger tengelye. Határozzuk meg ezen töltésselrendezés erőterét.

43. Létezik-e olyan elektrosztatikai erőter, amelyben az  $E$  térerősség-vektor mindenütt egyenlő irányú, de nagysága a térerősségre merőleges irányban lineárisan növekedik?

44. Az  $\oint \mathbf{D}_n dA = \sum_i Q_i$  törvény (az elektrosztatika Gauss-tétele) alapján igazoljuk, hogy két dielektrikum határán az eltolásvektor normális komponense folytonos.

45. Az elektrosztatika Gauss-tétele alapján igazoljuk, hogy egy felületi töltésekkel borított felületen az eltolásvektor normális komponensének ugrása  $\omega$ -val, a felületi töltéssűrűséggel egyenlő.

46. Igazoljuk az elektrosztatikus tér konzervatív voltát kifejező  $\oint \mathbf{E}_s ds = 0$  törvény alapján, hogy a térerősség tangenciális komponense bármely felületen folytonos.

47. 10 cm sugaru töltött gömböt 10 cm vastag dielektrikum vesz körül. Határozzuk meg a térerősség és az eltolásvektor függését a középponttól mért távolságtól.

48. Egy 2 cm vastag végtelen kiterjedésű réteg relatív dielektromos állandója  $\epsilon_r = 5$ . A rétegen belül egyenletes eloszlású  $\rho = 3 \cdot 10^{-9} \frac{C}{cm^3}$  sűrűségű tértöltés van. A rétegen kívüli tér vákuum. Határozzuk meg a térerősséget a rétegen belül és kívül.

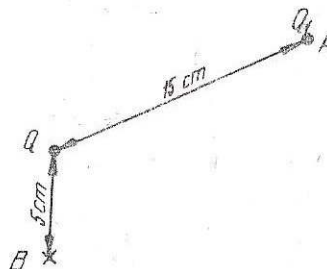
49. Egy a sugaru gömb belsejét homogén dielektrikum tölti ki. A gömbön belül egyenletesen megoszló tértöltés sűrűsége  $\rho$ . A gömböt környező tér vákuum. A szigetelő dielektromos állandója  $\epsilon_r$ . Hogyan függ a térerősség a centrumtól mért távolságtól?

50. Egy 1 cm sugaru végtelen hosszú körhenger homogén,  $\epsilon_r = 5$  dielektromos állandóju közegből készült. A hengeren belül  $\rho = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^3}$  sűrűségű tértöltés, a hengeren kívül vákuum van. Mekkora a térerősség a tengelytől mért 0,5 cm és 1,5 cm távolságban?

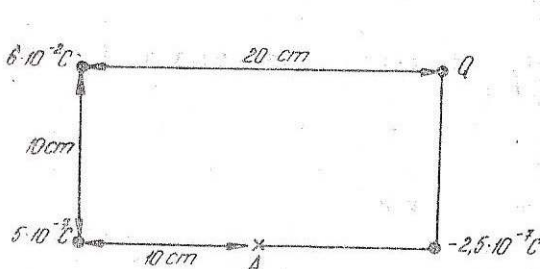
51. Mekkora a potenciálkülönbség a  $10^{-5} C$  pontszerű töltéstől 10 cm illetve 20 cm távol fekvő pontok között?

52. Mekkora munkát kell végeznünk, ha a  $Q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$  töltést az ábrán látható  $Q = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  töltés környezetében az A pontból a B pontba visszük át? (Lásd a 2. ábrát.)

53. Négy töltés a 3. ábrán látható elrendezést alkotja. Mekkora a  $Q$  töltés értéke, ha az A pontban a potenciál  $-6000 \text{ V}$ ?



2. ábra



3. ábra

54. Mekkora távolságra tudja egymást megközelíteni két elektron, ha szembe haladnak  $10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel? (Az elektron tömege  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , töltése  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .)

55. Két különböző előjelű pontszerű töltés, amelyek aránya  $n$ , egymástól  $d$  távolságban van. Bizonyítsuk be, hogy a zérus potenciálu felület gömbfelület. Határozzuk meg a gömb sugarát, valamint középpontjának a kisebbik töltéstől mért távolságát.

56. Adva egy  $Q$  töltés és tőle meghatározott távolságra egy fémsík. Igazoljuk, hogy ezen elrendezés erőtere a fémen kívül ugyanaz, mint az adott töltés és a síkhoz viszonyítva szimmetrikusan elhelyezett  $-Q$  töltés erőtere.

57. Két egyforma pozitív  $Q$  töltés van a végtelen vezető síktól egymással egyenlő  $d$  távolságban. A töltések közötti távolság  $2d$ . Határozzuk meg a töltések közötti távolság felezőpontjában a potenciált.

58. Egy végtelenig nyúló földelt vezető-síktól  $d$  távolságra  $-Q$  pontszerű töltés van. Meghatározandó a fémsíkon elhelyezkedő felületi töltéssűrűség.

59. Az előző feladatbeli sík  $r$  sugaru körlemeze mekkora töltéssel rendelkezik, ha a kör centruma a pontszerű töltés talppontja. ( $d = 4 \text{ cm}$ ,  $Q = 5 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ .)

60. Egy  $\sigma$  lineáris töltéssűrűséggel rendelkező egyenes párhuzamos egy végtelen, vezető földelt síkkal. Határozzuk meg a felületi töltéssűrűség eloszlását a síkon.

61. Mekkora a végtelen hosszú egyenes lineáris töltéssűrűsége, ha a tőle  $4 \text{ cm}$  távol fekvő  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \text{ C}$  nagyságú pontszerű töltés  $2 \text{ cm}$ -re való közelítésekor a végzett munka  $5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ ?

62. Mekkora a potenciálkülönbség az előző feladatbeli két pont között?

63. Egy végtelen síkon egyenletesen eloszló pozitív töltés van  $\omega$  felületi sűrűséggel. Határozzuk meg a potenciálkülönbséget a síktól  $d$  távolságra levő pont és a sík között.

64. Egymástól  $10 \text{ cm}$  távol párhuzamosan fekvő végtelen síkok felületi töltéssűrűsége  $\omega_1 = 3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$  és  $\omega_2 = 7 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$ . Mekkora a vezetők közötti potenciálkülönbség?

65. Két egymástól  $5 \text{ cm}$  távolságra fekvő párhuzamos fémlemez között a potenciálkülönbség  $75 \text{ V}$ . Mekkora a lemezek felületegységére eső töltés értéke?

66. Két egymástól  $3 \text{ cm}$  távol levő lemez között a potenciálkülönbség  $160 \text{ V}$ . Mekkora az elektromos térerősség a lemezek közötti térben? Ha egy  $1,6 \cdot 10^{-19}$  töltésű  $e$  elektron ütközés nélkül repül egyik lemeztől a másikig, mekkora mozgási energiára tesz szert a távolság  $\frac{1}{3}$  részének befutása után?

67. Két egyforma területű fémlemez közül, amelyek méreteikhez képest igen kicsiny  $d$  távolságban vannak egymástól, az egyiknek  $Q$ , a másiknak  $2Q$  töltése van. Mekkora a potenciálkülönbség a két fémlemez között?

68. Három párhuzamos nagy kiterjedésű lemez  $1 \text{ mm}$  távol van egymástól. Mekkora a lemezek közötti potenciálkülönbség, ha az elsőn  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$ , a másodikon  $\frac{4}{3} \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$  és a harmadikon  $1 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$  a töltéssűrűség?

69. Hogyan változik meg az előző feladat lemezei között a potenciálkülönbség, ha a lemezek közötti teret  $\epsilon_r = 2$  dielektromos állandóju szigetelő tölti ki?

70. Két párhuzamos nagy kiterjedésű vezető sík egyike földelt, a másik  $\omega_1 = 4,5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$  felületi töltéssűrűséggel rendelkezik. A lemezek távolsága  $3 \text{ cm}$ . Mekkora a lemezek közötti potenciálkülönbség?

Mekkora lesz a potenciálkülönbség, ha a lemezekkel párhuzamosan, tőlük egyenlő távolságra egy  $\omega_2 = -7 \cdot 10^{-11} \frac{C}{cm^2}$  felületi sűrűségű harmadik lemezt helyezünk?

71. Két párhuzamos lemezre egynemű töltést adunk. A töltéssűrűség az egyik lemezen  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \frac{C}{cm^2}$ , míg a másikon  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \frac{C}{cm^2}$ . A lemezek közötti távolság 1 cm. A lemezek közé párhuzamosan 5 mm vastag parafin lemezt helyezünk, melynek dielektromos állandója  $\epsilon_r = 2$ . Határozzuk meg a potenciálkülönbséget a lemezek között.

72. Mekkora a térerősség azon sikkondenzátor fegyverzetei között a levegőben, melynél a potenciálkülönbség 200 V, a lemezek közötti távolság 0,2 cm, és a lemezek között velük párhuzamosan 0,1 cm vastag üveglap van? ( $\epsilon_r = 7$ )

73. A sikkondenzátor lemezei között térben elektronáramlás megy végbe, mely térfogati töltést hoz létre. Az egyik lemez potenciálja  $U_0$ . A  $\rho$  térbeli sűrűség mely értékénél lesz nulla a térerősség és a potenciál a másik lemeznél? A lemezek közötti távolság  $d$ .

74. Sikkondenzátor fegyverzeteinek távolsága 3,84 mm, a feszültségkülönbség 40 V. A fegyverzetek síkja vízszintes és közöttük  $4,8 \cdot 10^{-19} C$  nagyságú pontszerű töltés lebeg. Mekkora a lebegő részecske tömege?

75. Számítsuk ki egy  $\omega$  felületi sűrűséggel bíró  $R$  sugaru fémgömbben levő töltés erőterének potenciálját.

76. Mekkora a potenciál az 1 cm sugaru gömb középpontjától 10 cm távolságban, ha a gömbön  $10^{-11} \frac{C}{cm^2}$  a töltéssűrűség, és a térben  $\epsilon_r = 2$  dielektromos állandóju közeg van?

77. Mekkora a potenciál az előbbi feladatban kért pontban, ha nem a töltéssűrűség adott, hanem a gömb potenciálja; 300 V.

78. Egy  $5 \cdot 10^{-8} C$  pontszerű töltés 15 cm távolságra van egy 5 cm sugaru gömb középpontjától, melynek felületén  $10^{-7} C$  töltés helyezkedik el egyenletesen. Határozzuk meg a potenciált a gömb középpontjától 15 cm távolságra a pontszerű töltéssel ellentétes irányban levő pontban.

79. Egy 15 mg tömegű test töltése  $10^{-10} C$ . Ez a test igen távolból esik egy 12 cm átmérőjű gömb felé. A gömb egyenletesen megoszló töltése  $-5 \cdot 10^{-7} C$ . Mekkora sebességgel érkezik a test a gömbre?

80. Mekkora munkát végzünk midőn egy  $2 \cdot 10^{-8} C$  nagyságú pontszerű

töltést a végtelenből 1 cm távolságra visszük egy gömb felületétől, melynek sugara 1 cm és felületi töltéssűrűsége  $10^{-9} \frac{C}{cm^2}$ ?

81. Két koncentrikus vezető gömbnek 10 cm illetve 20 cm a sugara. Mindegyiken  $\frac{50}{3} \cdot 10^{-9} C$  egyenletesen eloszló töltés van. Mekkora közöttük a potenciálkülönbség?

82. Két koncentrikus vezető gömb sugara 5 cm illetve 10 cm. A belsőn  $3 \cdot 10^{-7} C$ , a külsőn  $5 \cdot 10^{-7} C$  töltés oszlik meg egyenletesen. Mekkora a gömbök közötti potenciálkülönbség?

83. 10 cm sugaru egyenletesen töltött gömböt 20 cm vastag  $\epsilon_r = 2$  dielektromos állandóju szigetelő veszi körül. Rajzoljuk meg, hogyan függ a potenciál a centrumtól mért távolságtól.

84. A töltés egyenletesen, egyenlő sűrűséggel oszlik el két 10 cm, illetve 20 cm sugaru koncentrikus gömb felületén. Határozzuk meg a töltések sűrűségét, ha a potenciál a középpontban 300 V, a végtelenben pedig nulla.

85. Két  $R$  és  $2R$  sugaru koncentrikus vezető gömböt megtöltünk, a belsőt egy mikrocoulombnyi, a külsőt pedig két mikrocoulombnyi azonos előjelű elektromossággal. A gömbök középpontjától  $3R$  távolságban a potenciál 9000 V. Számítsuk ki  $R$ -t.

86. Számítsuk ki egy  $R$  sugaru gömbben a potenciált, ha benne mindenütt  $\rho$  sűrűségű tértöltés van.

87.  $R$  sugaru végtelen hosszú henger felületén  $\omega$  egyenletes töltéssűrűség van. Határozzuk meg a potenciált mint a tengelytől mért távolság függvényét.

88. Két végtelen hosszú koaxiális hengert egynemű töltéssel töltünk meg úgy, hogy a töltéssűrűség a külső hengeren  $\frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \frac{C}{cm^2}$ , a belsőn pedig  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \frac{C}{cm^2}$ . A hengerek sugara 10 mm, illetve 10,5 mm. Határozzuk meg a hengerek közötti potenciálkülönbséget.

89. Két koaxiális hengeralakú vezető mindegyikén  $5 \cdot 10^{-6} C$  töltés oszlik meg egyenletesen. A hengerek sugara 5 cm illetve 6 cm. A hengerek hossza 1 m. Mekkora közöttük a potenciálkülönbség?

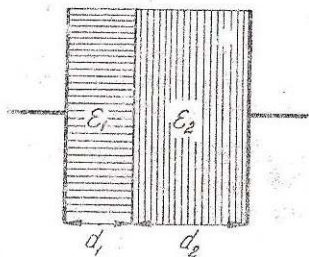
90. Egy hengeralakú kondenzátort, amelynél az egyik fegyverzet sugara kétszer nagyobb a másikénál  $\epsilon_r$  dielektromos állandóju szigetelő tölti ki. A fegyverzetek közötti potenciálkülönbség  $U$ . Határozzuk meg az elektromos erőter térerősségét a henger tengelyétől  $d$  távolságban.

91. Egy hengeralaku kondenzátor  $R_2$  sugaru belső fegyverzetének potenciálja  $U_0$ . Az  $R_1$  sugaru külső fegyverzet földelt. A kondenzátor fegyverzetei között állandó sűrűségű  $\rho$  tértöltés van. Határozzuk meg a potenciál eloszlását a kondenzátor fegyverzetei között.

92. Mekkora egy  $R$  sugaru fémgömb kapacitása?

93. Számítsuk ki a síkkondenzátor kapacitását, ha a fegyverzetek felülete  $A$  és a fegyverzetek távolsága  $d$ . A fegyverzetek között levegő van.

94. Számítsuk ki az  $r$ ,  $R$  sugaru gömbkondenzátor kapacitását. A fegyverzetek között levegő van.



4. ábra

95. Számítsuk ki a  $h$  hosszúságú  $r_1 < r_2$  sugarakkal rendelkező hengerkondenzátor kapacitását, ha a hengerek közötti teret levegő tölti ki.

96. Számítsuk ki a síkkondenzátor, gömbkondenzátor és a hengerkondenzátor kapacitását, ha a fegyverzetek közötti teret  $\epsilon_r$  dielektromos állandójú szigetelő tölti ki.

97. Síkkondenzátor, melynek  $1,5$  mm távolságra levő fegyverzetei között levegő van,  $1 \text{ m}^2$  felületű. Mekkora a kapacitása?

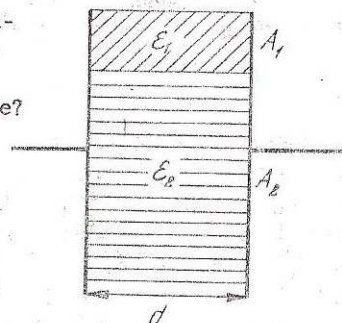
98. Egy síkkondenzátor kapacitása  $600$  pF. Mennyivel változik meg a kondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetek közé párhuzamosan olyan fémlamezt helyezünk, amelynek vastagsága a fegyverzetek közötti távolság  $\frac{1}{4}$ -e?

99. Síkkondenzátor fegyverzetei közötti teret a 4. ábrán látható módon két dielektikum tölti ki. Mekkora a kapacitás?

100. Síkkondenzátorban két dielektikumot az 5. ábrán látható módon helyezünk el. Mekkora a kapacitás?

101. Síkkondenzátor  $A$  területű lemezei közötti térrészt dielektikum tölti ki, amelynek dielektromos állandója az egyik lemezről felvett  $\epsilon_1$  értékről a másik lemezről  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  értékig csökken lineárisan. A lemezek közötti távolság  $d$ . Határozzuk meg a kondenzátor kapacitását.

102. Határozzuk meg a gömbkondenzátor és a hengerkondenzátor ka-



5. ábra

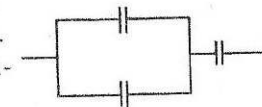
pacitását, ha a fegyverzetek sugara  $r$ , ill.  $R$  és a fegyverzetek közötti térbe  $\epsilon_1$  és  $\epsilon_2$  dielektromos állandójú szigetelőket rétegzünk úgy, hogy a két dielektikum határfelülete a sugaru koncentrikus gömb, illetve hengerkondenzátor esetén koaxiális hengercső legyen.

103. Határozzuk meg a gömbkondenzátor és a hengerkondenzátor kapacitását, ha a fegyverzetek sugara  $r$  ill.  $R$  és a közöttük levő tér felét  $\epsilon_1$  a másik felét pedig  $\epsilon_2$  dielektromos állandójú közeg tölti ki úgy, hogy a szigetelő határfelülete a gömb centrumán illetve a henger tengelyén átfektetett sík.

104. Egy  $r$  sugaru gömbalaku higanycsepp  $n$  egyformának tekinthető  $r_1$  sugaru kis gömbre porlasztunk szét. A kis gömböket  $U_1$  feszültségre töltjük fel. Mekkora lesz az egyesített feltöltött gömb potenciálja?

105. Az  $r$  és  $R$  sugaru koncentrikus gömbök közötti teret inhomogén szigetelő tölti ki, melynek dielektromos állandója a közös centrumtól mért távolság függvénye. Milyen függvény szerint kell változnia a dielektromos állandónak, hogy a kondenzátort feltöltve, az elektromos térerősség nagysága az egész térben állandó legyen. Számítsuk ki ezen kondenzátor kapacitását.

106. Egy a sugaru vezető gömbfelület belsejében  $b$  sugaru földelt gömböt helyezünk el. Számítsuk ki a külső gömbfelület földhöz viszonyított kapacitását.



6. ábra

107. Mekkora a 6. ábra szerinti rendszer kapacitása  $0,5 \mu\text{F}$ ?

108. Egyik kondenzátor kapacitása  $3 \mu\text{F}$ , feszültsége  $220 \text{ V}$ , másik kondenzátor kapacitása  $4 \mu\text{F}$ , feszültsége  $110 \text{ V}$ . Mi történik, ha a kondenzátorokat párhuzamosan kapcsoljuk?

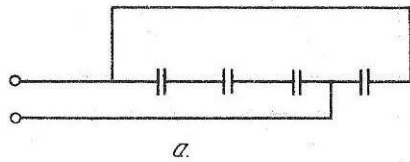
109. Két kondenzátor közül az egyiket  $300 \text{ V}$ -ra, a másikat  $100 \text{ V}$ -ra töltjük fel. Párhuzamosan kapcsolva őket a közös feszültség  $250 \text{ V}$  lesz. Határozzuk meg a két kondenzátor kapacitásának viszonyát.

110.  $4 \mu\text{F}$  és  $2 \mu\text{F}$  kapacitású kondenzátort sorba kötünk. Az így kapott rendszer kapcsaira  $6 \text{ V}$  feszültséget kapcsolunk. Mekkora a kondenzátorok töltése?

111. Két kondenzátort, amelynek kapacitása  $C_1$  illetve  $C_2$  sorosan kapcsolunk és  $U$  volt állandó feszültségű áramforrással kötünk össze. Határozzuk meg az egyes kondenzátorokra jutó feszültséget.

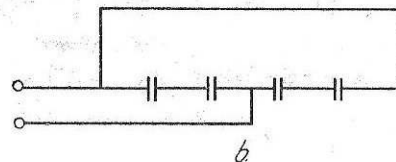
112. Négy egyforma kondenzátort egyszer az  $a$  másszor a  $b$  ábrák szerint kapcsolunk össze. (7. ábra) Melyik esetben nagyobb a rendszer kapacitása?

113. Ha az előbbi feladatban a kondenzátorok különböző kapacitásuk, milyen összefüggésnek kell eleget tenniük, hogy a kapacitás egyik kapcsolásból a másikba áttérve ne változzék?



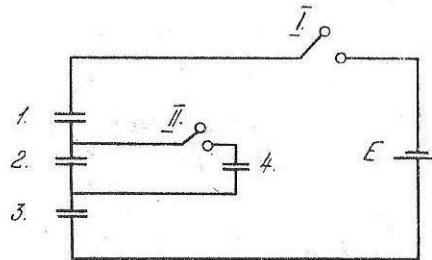
a.

7. ábra



b.

114. Négy egyenlő kapacitású kondenzátort a 8. ábra szerint kapcsolunk az  $E$  telephez. A II. kapcsoló kezdetben nyitott, míg az I. kapcsoló zárt. Ezután nyitjuk az I. kapcsolót és zárjuk a II-at. Mekkora lesz a potenciálkülönbség az egyes kondenzátorokon, ha a telep feszültség  $E = 9 \text{ V}$ ?



8. ábra

115. Oldjuk meg az előző feladatot olyan feltétel mellett, hogy az I. kapcsolót zárjuk nyitjuk, a II. kapcsoló pedig állandóan zár.

116. Mekkora legnagyobb  $Q$  töltést vihetünk a  $15 \text{ cm}$  sugaru fém-gömbre, ha feltételezzük, hogy a levegő dielektromos szilárdsága  $30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ ?

117. Egy hengerkondenzátor  $5 \text{ mm}$  átmérőjű huzalból és  $5 \text{ cm}$  átmérőjű koaxiális hengerből áll. Mekkora  $U$  potenciálkülönbségre tölthetjük fel ezt a kondenzátort, ha a levegő áttétési szilárdsága  $30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ ?

118. Egy sikkondenzátor dielektrikuma két rétegből áll, amelyek elválasztó felülete az elektródákkal párhuzamos. Meghatározandó a kondenzátorra kapcsolható legnagyobb feszültség, ha a dielektrikumok adatai a következők:

Az első réteg vastagsága  $d_1 = 1 \text{ cm}$ , dielektromos állandója  $\epsilon_{1r} = 5,5$ , dielektromos szilárdsága  $E_{1kr} = 350 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ ; a második réteg megfelelő adatai  $d_2 = 0,6 \text{ cm}$ ,  $\epsilon_{2r} = 2,2$ ,  $E_{2kr} = 300 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ .

119. Oldjuk meg az előző feladatot úgy, hogy a dielektrikumok határfelülete a fegyverzetekre merőleges sík. Az elektródatávolság  $1,6 \text{ cm}$ .

120. Koncentrikus gömbök között  $r_1 < r < 2r_1$  tartományban  $\epsilon_1$  di-

elektromos állandóju  $E_{1kr}$  áttétési szilárdságu szigetelő van. A  $2r_1 < r < 3r_1$  tartományban pedig  $\epsilon_2 = 0,25 \cdot \epsilon_1$ ,  $E_{2kr} = 1,1 E_{1kr}$  jellemző szigetelő foglal helyet. Mekkora az elektródokra kapcsolható legnagyobb feszültség?

121. Gömbkondenzátor belső fegyverzetének sugara változtatható. A feszültséget állandó értéken tartva mekkora belső sugár esetén a legkisebb a dielektrikum igénybevétele?

122. Oldjuk meg az előző feladatot hengerkondenzátor esetére.

123. Egy  $r$  sugaru gömbben  $\rho$  állandó töltéssűrűség van. Határozzuk meg az elrendezés energiáját.

124. Sikkondenzátor  $A$  területű fegyverzetein  $Q$  és  $-Q$  töltés van. Mekkora a munkavégzés, ha a fegyverzetek  $d_0$  távolságból  $d$  távolságra közelednek egymáshoz?

125. Egy sikkondenzátornál a lemezek területe  $200 \text{ cm}^2$ , a lemezek távolsága  $0,1 \text{ cm}$ . A fegyverzetek között üveglemez van ( $\epsilon_r = 5$ ) amely teljesen betölti a kondenzátor lemezei közötti térséget. Hogyan változik meg a kondenzátor energiája, ha az üveget eltávolítjuk. A kondenzátor az egész idő alatt  $300 \text{ V}$  elektromotoros erejű telephez van kapcsolva.

126. A  $Q$  pontszerű töltés erőterében, tőle  $R$  távolságban  $\mu$  elektromos momentumu szabadon forgó dipólus van. Mekkora munkát kell végezni a dipólus végtelenbe való távolításakor?

127. Egy  $1,6 \cdot 10^{-28} \text{ Cm}$  elektromos momentumu dipól  $600 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$  térerősségű homogén erőterben az erőterre merőlegesen áll. Határozzuk meg a dipólra ható erőpárt, és a dipól energiáját ebben a helyzetben.

## GYAKORLATOK MEGOLDÁSA

1. A válasz Coulomb-törvénye alapján:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38}}{0,5^2 \cdot 10^{-20}} \text{ N} = 9,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

2.  $Q = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$

3. A középső töltésre két erő hat. Ezek értéke Coulomb-törvénye alapján:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ N},$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 6,48 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

$F_1$  és  $F_2$  erők egyirányúak, mert  $Q_1$  és  $Q$  között taszítás,  $Q_2$  és  $Q$  között vonzás lép fel. Így az eredő erő, ami a középső töltésre hat a  $Q_2$  töltés felé mutat és nagysága:

$$F = 10,8 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

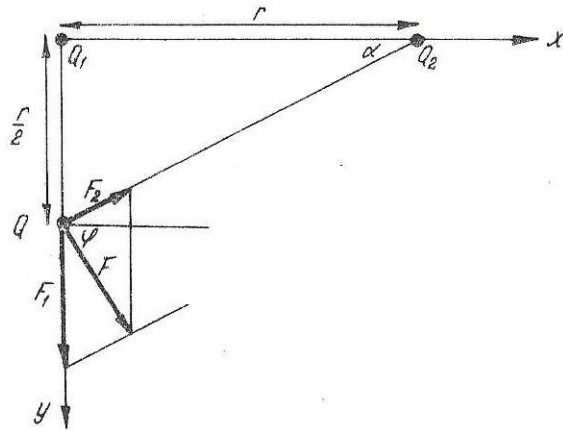
4. A teljes erő a töltések páronkénti hatásából adódó két részből áll (71. ábra).

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ N},$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q}{r^2 + (\frac{r}{2})^2} = 1,30 \cdot 10^{-3} \text{ N.}$$

Ezeket az erőket x és y irányu összetevőire bontva:

$$F_{1x} = 0, \quad F_{1y} = F_1.$$



71. ábra

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha, \quad F_{2y} = -F_2 \sin \alpha.$$

Igy az eredő összetevői

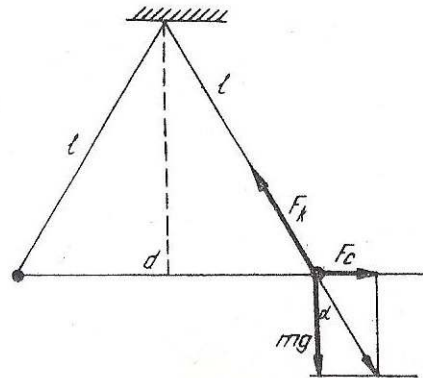
$$F_x = F_{1x},$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 - F_2 \sin \alpha.$$

A harmadik töltésre ható teljes erő:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 3,92 \cdot 10^{-3} \text{ N,}$$

és az x tengellyel bezárt szöge



72. ábra

$$\varphi = \arctg \frac{F_y}{F_x} \approx 72^\circ.$$

5. Ha a négyzet csúcsaiban levő töltést  $Q_1$  jelöli, akkor a középpontba

$$Q = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \frac{1}{2}) Q_1$$

nagyságu negatív töltést kell elhelyezni.

$$6. 1,35 \cdot 10^{-2} \text{ N.}$$

7. Bármelyik golyóra három erő hat (72. ábra); a nehézségi erő, az elektromos taszító erő ( $F_c$ ), a kötélere  $F_k$ . Mivel a golyók egyensúlyban vannak, a három erő eredője nulla, vagyis  $F_c$  és  $mg$  eredője egyenlő  $F_k$ -val, de ellentétes irányú. Ezért

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{mg}, \quad \text{de } \operatorname{tg} \alpha \sim \frac{d}{2l}$$

$$F_c = mg \frac{d}{2l}, \quad \text{de ugyanakkor } F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2},$$

Ezekből:

$$Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \frac{mgd^3}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

$$8. r_1 = 15 \text{ cm.}$$

$$9. \varphi_0 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \cdot \varphi$$

10. Pontszerű töltés térerőssége a Coulomb-törvény szerint:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = 1,08 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

$$11. a = \frac{F}{m} = \frac{Q_e E}{m} = 4,7 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \int_{r_1}^{r_2} F_s ds} \approx 14 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

12. Az egyensúly feltétele, hogy  $Q$  helyén a térerősség zérus legyen, azaz

$$E_1 + E_2 = \frac{Q_1}{(d+l)^2} + \frac{Q_2}{l^2} = 0.$$

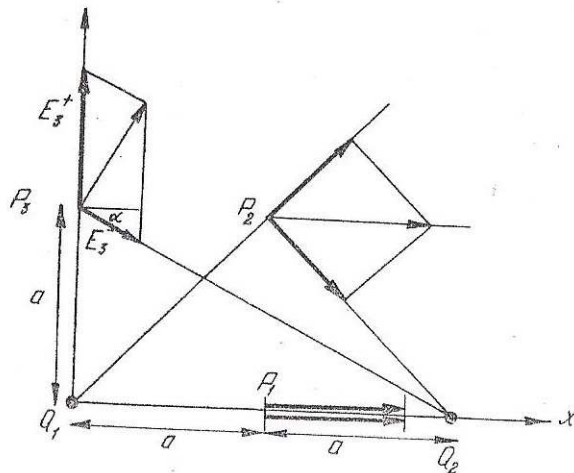
ebből

$$\frac{Q_2}{Q_1} = - \frac{l^2}{(d+l)^2}.$$

A töltéseknek tehát ellentétes előjelűeknek kell lenni, és nagyságuk aránya egyenlő a  $Q$  töltéstől mért távolságaik négyzeteinek arányával.

13. A kisebb töltéstől 5,6 cm távolságban.

14. A  $P_1$  pontban (73. ábra).



73. ábra

$$E_1 = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{a^2} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

A  $P_2$  pontban, az ábrából láthatóan, a két térerősség merőleges egymásra, így

$$E_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1^2}{(\sqrt{2}a)^2} = 1,77 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

A  $P_3$  pontban

$$E_3^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{a^2} = 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

$$E_3^- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{(a\sqrt{5})^2} = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Ezeknek  $x$  ill.  $y$  irányú összetevői

$$E_{3x}^+ = 0, \quad E_{3y}^+ = E_3^+,$$

$$E_{3x}^- = E_3^- \cos \alpha = E_3^- \cdot \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$E_{3y}^- = E_3^- \sin \alpha = - E_3^- \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

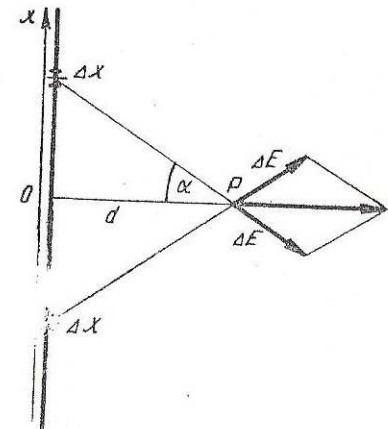
A teljes térerősség két vetülete:

$$E_{3x} = E_{3x}^-, \quad E_{3y} = E_{3y}^+ - E_{3y}^- = E_3^- \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Igy tehát az eredő térerősség  $P_3$  pontban

$$E_3 = \sqrt{E_{3x}^2 + E_{3y}^2} = 2,32 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

$$15. E = 6 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$



74. ábra

16. Osszuk fel az egyenest (74. ábra) olyan  $\Delta x$  hosszúságu szakaszokra, hogy  $P$  pontból a rajtuk levő töltést pontszerűnek tekinthessük.  $\Delta x$ -en levő töltés  $Q\Delta x$ . Ez  $P$ -ben

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta X}{r^2}$$

nagyságu térerősséget létesít. A teljes egyenes által gerjesztett térerősség közelítő értékét kapjuk, ha az elemi  $\Delta E$  térerősségeket vektorálisan összegezzük. P pontbeli térerősségeket ezen összeg határértéke adja, midőn  $\Delta x \rightarrow 0$ . Szimmetria okokból a  $\Delta E$  térerősségeknek az egyenesrel párhuzamos összetevői közömbösítik egymást, így csak az egyenesre merőleges komponenseket kell összegezni.  $\Delta E$  egyenesre merőleges összetevője

$$\Delta E_{\perp} = \Delta E \cos \alpha.$$

A P pontbeli térerősség

$$E = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta E \cos \alpha = \int \cos \alpha \cdot dE.$$

Az előbbieket szerint

$$dE = \frac{\sigma dx}{r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

és az ábrából látható, hogy

$$r = \frac{d}{\cos \alpha}, \quad x = d \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad dx = \frac{d}{\cos^2} d\alpha.$$

Ezeket figyelembe véve

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{d} \cos \alpha d\alpha.$$

Igy

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{d}.$$

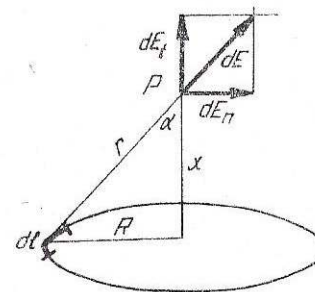
Az adott értékekkel

$$E = 9 \cdot 10^2 \frac{N}{C}.$$

17. Ha a körön  $\sigma$  a lineáris töltéssűrűség, a d ívelem által P-ben létesített térerősség (75. ábra)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dl}{r^2}$$

Ezt felbontva  $dE_t$  és  $dE_n$  összetevőkre, a rajzról látható, hogy egy átmérő végpontjain elhelyezkedő egyenlő hosszú  $dl$  ívelemnek által gerjesztett  $dE$  térerősségek tengelyre merőleges komponensei egyenlő nagyságú és ellentétes irányúak. Ezért az eredő tengely irányú lesz:



75. ábra

$$E = \int dE_t, \quad \text{de } dE_t = dE \cos \alpha = dE \frac{x}{r},$$

$$dE_t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma x}{r^3} dl$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma x}{r^3} \int dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma x}{r^3} 2\pi R,$$

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\sigma R x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

A térerősség azon a helyen maximális, ahol

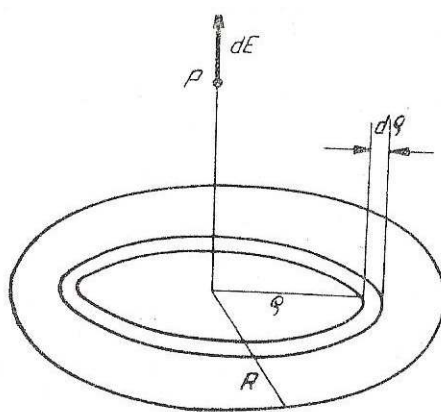
$$\frac{dE}{dx} = 0, \quad \text{azaz}$$

$$\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - 3x^2(R^2 + x^2)^{1/2}}{(R^2 + x^2)^3} = 0.$$

Ebből  $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$  a legnagyobb térerősségtől hely.

A megadott értékeket behelyettesítve a keresett térerősség

$$E = 1,6 \cdot 10^3 \frac{N}{C}.$$



76. ábra

18. A 76. ábrán látható  $\varphi$  sugaru  $d\varphi$  vastag körgyűrű által létesített  $dE$  térerősség az előző feladat eredménye alapján a P pontban:

$$dE = \frac{1}{2 \epsilon_0} \frac{\varphi \cdot x \varphi}{(\varphi^2 + x^2)^{3/2}},$$

ahol

$$\varphi = \frac{2 \varphi \pi \cdot d \varphi \cdot \omega}{2 \varphi \pi} = \omega d \varphi,$$

és így

$$dE = \frac{1}{2 \epsilon_0} \frac{\omega x \varphi}{(\varphi^2 + x^2)^{3/2}} d \varphi.$$

A korong által létesített teret megkapjuk, ha a korongot elemi vékony körgyűrűkre bontjuk és ezek hatását összegezzük, tehát

$$E = \frac{1}{2 \epsilon_0} \omega x \int_0^R \frac{\varphi}{(\varphi^2 + x^2)^{3/2}} d \varphi = \frac{\omega}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right),$$

$$E = 3,1 \cdot 10^5 \frac{N}{C}.$$

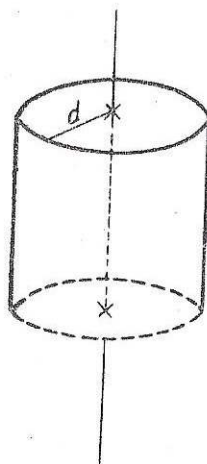
19. Végtelen sík térerősséget a siktól  $x$  távolságban az előző feladatban részletezett gondolatmenet alapján határozhatjuk meg, csak az összegzést 0-tól  $\infty$ -ig kell elvégezni, tehát

$$E = \frac{1}{2 \epsilon_0} \omega x \int_0^{\infty} \frac{\varphi}{(\varphi^2 + x^2)^{3/2}} d \varphi = \frac{\omega}{2 \epsilon_0}.$$

Ez a P pont helyzetétől teljesen független. Az egyenletesen töltött végtelen sík tere, tehát homogén tér. A feladatban szereplő adatokkal

$$E = 5,6 \cdot 10^5 \frac{N}{C}.$$

20. Vegyük körül a vezetőt (77. ábra) egy  $d$  sugaru  $h$  magasságu hen-



77. ábra

gerrel, melynek tengelye a fonál. A fonál által létesített tér hengersizmetrikus lesz, ezért a hengerre vonatkozó fluxus egyenlő a palást fluxusával, vagyis  $\oint_H \vec{E} d\vec{A} = \int_P \vec{E} d\vec{A}$ , de a palást mentén  $\vec{E}$  párhuzamos  $d\vec{A}$ -val és állandó, ezért

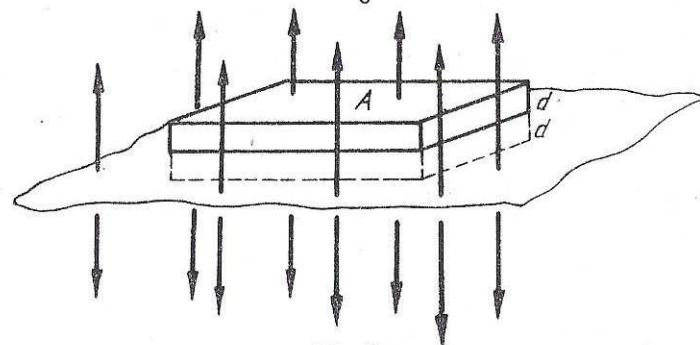
$$\int_P \vec{E} d\vec{A} = \vec{E} \int_P dA = E \cdot 2 \pi \cdot h.$$

A hengeren belül levő összes töltés  $\varphi \cdot h$ , és így a Gauss-tétel szerint

$$E \cdot 2 \pi \cdot h = \frac{1}{\epsilon_0} \varphi \cdot h.$$

Végül

$$E = \frac{1}{2 \pi \epsilon_0} \frac{\varphi}{d}.$$



78. ábra

21. Alkalmazzuk a Gauss-tételt a 78. ábra szerinti  $2d$  magasságu hasábra. Szimmetria okokból

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = 2EA$$

A hasábon belüli összes töltés  $\omega A$ . És így

$$2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \omega A,$$

$$E = \frac{\omega}{2 \epsilon_0}.$$

$$22. E = 1,44 \cdot 10^7 \frac{N}{C}.$$

23. A pozitív irányt a  $\sigma_1$  sűrűségű fonáttól a másik felé irányítva

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sigma_1}{x} + \frac{\sigma_2}{x-d} \right).$$

24.

$$E = \frac{2\sigma d}{\pi\epsilon_0(d^2+4x^2)}$$

25. A térerősség a lemezek között  $E_b = 2,23 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$ , a lemezeken kívül  $E_k = 5,6 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$ .

26. A térerősség 1,5-szeresére növekszik.

$$27. E = \frac{\sqrt{5}}{2\epsilon_0} \omega_1.$$

$$28. E = \frac{\omega}{2\epsilon_0} \left( \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{h+d}{\sqrt{R^2+(h+d)^2}} \right) \approx \frac{\omega}{2\epsilon_0} \frac{R^2 d}{(R+h)^{2,3/2}} \text{ ha } d \text{ kicsi.}$$

29. A térerősség a lemezek között

$$E = \frac{\omega}{\epsilon_0} = 6,76 \cdot 10^3 \frac{N}{C}$$

Az elektronra ható erő

$$F = EQ = 1,08 \cdot 10^{-15} N.$$

Az elektron függőleges gyorsulása

$$a = \frac{F}{m} = 1,18 \cdot 10^{15} \frac{m}{s^2}.$$

Az 5 cm vízszintes távolság befutásához szükséges idő

$$t = \frac{s}{v_0} = 5 \cdot 10^{-9} s.$$

A sebesség függőleges összetevője ekkor

$$v_y = a \cdot t = 1,16 \cdot 10^7 \frac{m}{s}.$$

A sebesség végső iránya a vízszintessel

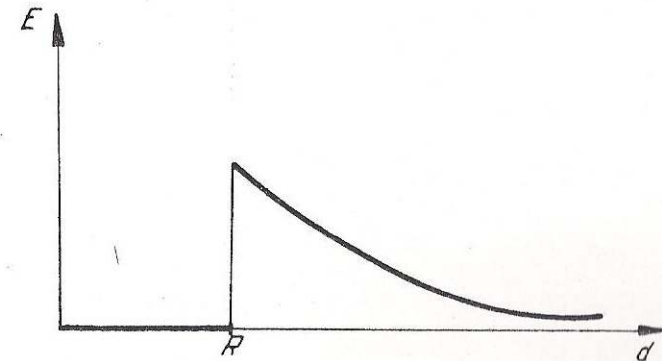
$$\varphi = \arctg \frac{v_y}{v_0} = 30,5^\circ$$

szöget alkot.

30. Az elektrosztatika Gauss-tétele alapján a térerősség a gömbön belül 0, a gömbön kívül

$$E = \frac{R^2}{\epsilon_0 d^2} \omega$$

A térerősség grafikonját a 79. ábra tünteti fel.



79. ábra

$$31. Q = 4 \cdot 10^5 C.$$

32. Jelentse  $r$  a gömb centrumától mért távolságot, akkora a gömbön belül

$$E = \frac{\varphi}{3\epsilon_0} r$$

a gömbön kívül

$$E = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

33. Alkalmazzuk a Gauss-tételt a Föld felületére és a 1,5 km-rel nagyobb sugaru gömbre

$$E_1 4R^2 \pi = \frac{Q_F}{\epsilon_0}$$

$$E_2 4(R+h)^2 = \frac{Q_F + Q_e}{\epsilon_0}$$

A két egyenlet különbségét véve

$$-\frac{Q_e}{\epsilon_0} = E_1 4R^2 \pi - E_2 4(R+h)^2 \approx 4R^2 \pi (E_1 - E_2),$$

mert  $h \ll R$ .

A  $h$  magas réteg térfogata jó közelítéssel

$$4R^2 \pi h.$$

Igy a keresett töltéssűrűség

$$\rho = \frac{Q_l}{4R^2 \pi h} = - \frac{4R^2 \pi \epsilon_0 (E_1 - E_2)}{4R^2 \pi h} = 4,43 \cdot 10^{-13} \frac{C}{m^3}$$

34. A gömbök között

$$E_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = 2,7 \cdot 10^3 \frac{1}{r^2},$$

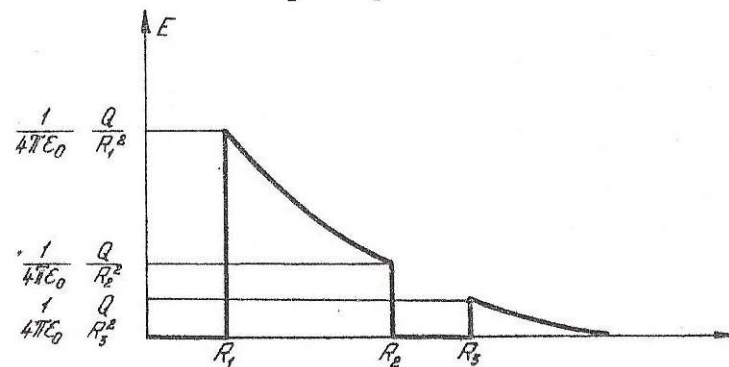
a gömbön kívül

$$E_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} = 7,2 \cdot 10^3 \frac{1}{r^2}.$$

35. 80. ábra.

36. A töltött buborék felületére három erő hat. A gáz nyomásából származó erő, mely  $\frac{1}{R^3}$ -bel arányos és kifelé hat. A felületi feszültségből származó erő, mely  $\frac{1}{R}$ -vel arányos és befelé mutat és a kifelé mutató elektrosztatikai torzító erő, mely  $\frac{1}{R^4}$ -el arányos, mivel a felületegységre jutó töltések  $\frac{1}{R^2}$ -el és a töltések közötti kölcsönhatás szintén  $\frac{1}{R^2}$ -el arányos. Egyensúly azon  $R_1$  sugárnál lesz, melyre

$$\frac{a}{R_1^3} + \frac{b}{R_1^4} - \frac{c}{R_1} = 0,$$



80. ábra

Ez az egyensúly stabilis, mert  $R_1$  növekedése esetén a kifelé ható erők gyorsabban csökkennek, mint a befelé ható, ezért az eredő erő csökken a sugarat.  $R_1$  csökkentése esetén a kifelé ható erők gyorsabban növekednek és így az eredő erő növeli a sugarat.

37. Ha a koordináta-rendszer origója egybeesik a gömb középpontjával és a töltött sík az  $x, y$  koordináta-síkkal, akkor a térerősség komponensei

$$E_x = \frac{\omega R^2 x}{\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{\omega R^2 y}{\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$E_z = \frac{\omega R^2 z}{\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\omega}{2\epsilon_0}.$$

38. A töltések szimmetrikus elhelyezkedéséből következik, hogy az elektromos erőter hengerszimmetrikus lesz. Alkalmazzuk a Gauss-tételt egy az adott hengerrel közös tengelyű 2 cm sugarú  $h$  magasságú hengerre

$$E \cdot 2\pi r_1 h = \frac{\omega 2r_1 \pi h}{\epsilon_0},$$

ahol  $r_1$  az adott henger sugara. Ebből

$$E = \frac{\omega r_1}{\epsilon_0 r} = 18,8 \frac{N}{C}.$$

$$39. \quad E_1 = 30,9 \frac{N}{C}.$$

$$E_2 = 77,25 \frac{N}{C}.$$

$$40. \quad E_1 = 1,64 \cdot 10^6 \frac{N}{C}.$$

$$E_2 = 1,8 \cdot 10^6 \frac{N}{C}.$$

$$41. \quad E_1 = 1,64 \cdot 10^6 \frac{N}{C}.$$

$$E_2 = 0.$$

42. A hengeren belül a tér ugyanolyan, mint a 27. feladatban. A hengeren kívül, ha a henger tengelyét választjuk  $z$  tengelynek, az  $\omega$  sűrűségű síkot  $x_z$  koordináta síknak a  $2\omega$  sűrűségű síkot  $yz$  koordináta síknak, a térerősség komponensei

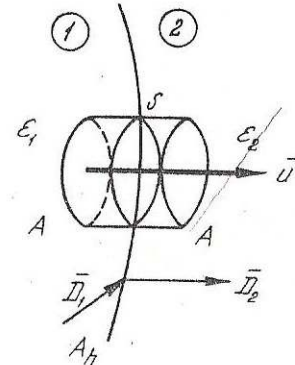
$$E_x = \frac{\omega}{\epsilon_0} - \frac{3\omega R x}{\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{\omega}{2\epsilon_0} - \frac{3\omega R y}{\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = 0.$$

43. Ilyen elektrosztatikus erőter nem lehet, mert az ilyen tér nem potenciális. Ugyanis az  $\oint \vec{E}_s ds$  integrált egy olyan téglalap mentén képezve, amelynek két oldala a térrel párhuzamos, míg kettő arra merőleges, nullából különböző érték adódik.

44. Legyen a térben két különböző dielektrikum, melyek egymással egy  $A_h$  határfelület mentén érintkezzenek (81. ábra), kössük ki, hogy a határfelület mentén a szabad töltéssűrűség mindenütt zérus  $\rho = 0$ . A határfelület egy kis környezetét síknak tekinthetjük és állítsunk erre kicsiny  $A$  alapú és egy infinitezimálisan kicsiny  $\delta$  magasságú hengert úgy, hogy azt az  $A_h$  határfelület az ábrán látható módon mossa ( $A$  párhuzamos a határfelülettel.) Ez esetben mivel kikötésünk szerint valódi töltés itt nincs



81. ábra

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \vec{D}_2 \vec{n} \cdot A - \vec{D}_1 \vec{n} \cdot A = 0$$

$$= (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \vec{n} \cdot A = 0$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \vec{n} = 0$$

mivel a  $\delta$  magasságú palástra eső fluxus a  $\delta$  csökkentésével tetszőlegesen kicsinnyé tehető (más szóval ez esetben a hengert teljesen ráhúzzuk a határfelületre) és az (1) közegből a (2) közegbe mutató normálist  $\vec{n}$  pozitív irányának tekintve az (1) közegbe az  $A$  alaplapon történő integrálásnál negatív előjel adódik, mert zárt felületre vett integrálásnál a kifelé mutató normális a pozitív.

Ezen eredményünk más szóval azt jelenti, hogy a  $\vec{D}$  vektor normális komponense a felületen folytonosan megy át;

$$D_{1n} = D_{2n}$$

Mivel

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 \text{ és}$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2$$

az  $\vec{E}$  vektor normális komponense a felületen ugrásszerűen változik

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

azaz

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

45. Ha a határfelületen  $\omega$  töltéssűrűség van, mint az előbbi feladatban

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \omega \text{ adódik}$$

vagy másképpen

$$D_{2n} - D_{1n} = \omega$$

46. A határfelületen át a 82. ábrán látható zárt  $g$  görbét vesszük fel, ahol  $s$  egy kicsiny de véges a határfelülettel párhuzamos egyenes szakasz és  $\delta$  ismét infinitezimálisan kicsiny, az  $\vec{E}$  vektort integrálva a  $g$  zárt görbére

$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

De ez esetben

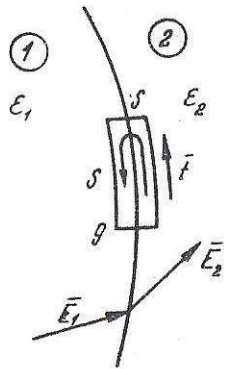
$$\oint_g \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t}s - \vec{E}_1 \cdot \vec{t}s = 0$$

$$= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} \cdot s$$

azaz

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0$$

ahol  $\vec{t}$  az ábrán megadott egységvektor.



82. ábra

Látható, hogy az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át a határfelületen:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

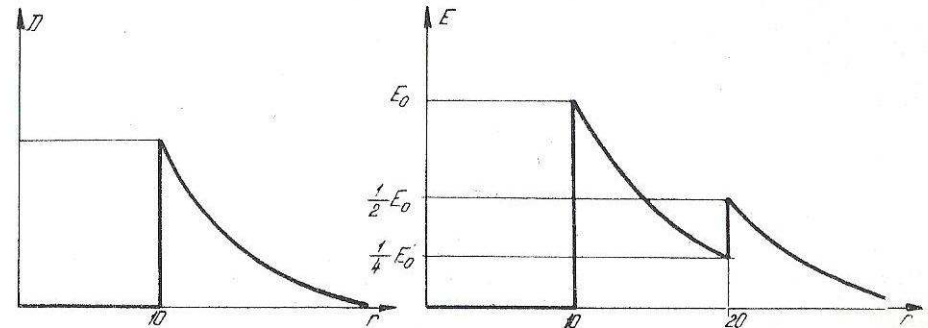
Mivel

$$E_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} \text{ és } E_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2}$$

a  $\vec{D}$  vektor tangenciális komponense a határfelületen ugrik:

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

47. 83. ábra



83. ábra

48. A 84. ábrán látható téglatestre alkalmazva a Gauss-tételt (lásd köv. oldalon)

$$E_b = 2A \frac{\varphi A 2x}{\epsilon \epsilon_0}$$

Ebből a térerősség a rétegen belül

$$E_b = \frac{\varphi}{\epsilon \epsilon_0} x$$

Hasonlóan a rétegen kívül

$$E_k = \frac{\varphi}{\epsilon_0} \frac{d}{2} = 3,4 \cdot 10^6 \frac{N}{C}$$

$$49. E_b = \frac{\varphi}{3 \varepsilon_0 \varepsilon_r} r, \text{ ha } r < a$$

$$E_k = \frac{\varphi a^3}{3 \varepsilon_0} \frac{1}{r^2}, \text{ ha } r > a$$

$$50. E_1 = \frac{\varphi}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 3,76 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_2 = \frac{\varphi a}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} = 1,25 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$51. U = 45 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

$$52. L = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

$$53. Q = -5,07 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

$$54. r = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

55. Válasszuk koordináta rendszerünket úgy, hogy a  $Q$  töltés koordinátái  $(0; 0; 0)$  és a  $-nQ$  töltés koordinátái  $(d; 0; 0)$  legyen. Egy tetszőleges  $P(x; y; z)$  pontban a potenciál

$$U = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{nQ}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}}.$$

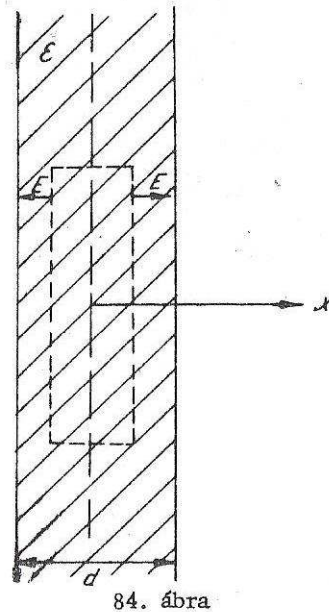
Ebből az  $U = 0$  feltételt kielégítő pontok egyenlete

$$\left(x + \frac{d}{n^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{n^2 d^2}{(n^2 - 1)^2}.$$

Ez gömb egyenlete. A gömb sugara

$$R = \frac{nd}{n^2 - 1}.$$

A gömb középpontjának távolsága a kisebb töltéstől  $\frac{d}{n^2 - 1}$ .



84. ábra

56.  $+Q$  és  $-Q$  töltések szimmetria síkja zérus potenciálu. Ezért, ha ebbe a síkba egy végtelen kiterjedésű vezető síkot helyezünk, a tér nem módosul. Így a  $-Q$  töltést eltávolíthatjuk anélkül, hogy a  $+Q$  oldalán a tér megváltozna.

$$57. U = \frac{Q}{10\pi \varepsilon_0} \frac{5 - \sqrt{5}}{d}.$$

58. A tükrözés elve alapján kiszámíthatjuk az eltolási vektor nagyságát a síkon (85. ábra):

$$D = \varepsilon_0 E = \frac{Qd}{2\pi} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}}.$$

ami  $\omega = D$  miatt a felületi töltéssűrűség is.

59. Az előző feladat eredménye alapján:

$$Q_0 = \int_0^r \omega 2\pi r dr = Q \cdot d \int_0^r \frac{r}{(r^2 + d^2)^{3/2}} dr = Qd \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{(r^2 + d^2)^{1/2}} \right]$$

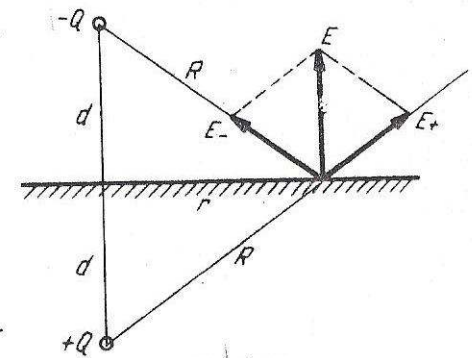
60.  $\omega = \frac{\sigma d}{\pi} \frac{1}{x^2 + d^2}$ , ahol  $d$  a vonaltöltés távolsága a síktól,  $x$  a sík tetszőleges pontjának távolsága a vonaltöltés merőleges vetületétől.

$$61. L = - \int_{r_1}^{r_2} QdU = - \int_{r_1}^{r_2} QE dr = - \int_{r_1}^{r_2} Q \frac{1}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\sigma}{r} dr =$$

$$= \frac{Q\sigma}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

ahonnan

$$\sigma = 6 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}}.$$



85. ábra

$$62. U = 7,5 \cdot 10^3 \text{ V.}$$

$$63. U = \frac{\omega}{2 \varepsilon_0} d.$$

$$64. U = - \int_0^d \frac{1}{2 \varepsilon_0} (\omega_1 - \omega_2) dx = \frac{1}{2 \varepsilon_0} (\omega_2 - \omega_1) d = 226 \text{ kV}$$

$$65. Q = 1,33 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$66. E = 5330 \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad W_{\text{kin}} = 8,54 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

$$67. U = \frac{Q \cdot d}{2 \varepsilon_0 A}$$

$$68. U_{21} = 9,42 \cdot 10^3 \text{ V}, \quad U_{32} = -5,65 \cdot 10^3 \text{ V}, \quad U_{31} = 3,77 \cdot 10^3 \text{ V.}$$

69. Felére csökken.

$$70. U_1 = 1520 \text{ V}$$

$$U_2 = 340 \text{ V.}$$

71. Az erőtér merőleges dielektrikumok határfelületére, ezért az eltolás vektor az egész térben állandó és nagysága

$$D = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

A térerősség a dielektrikumban

$$E_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r},$$

a levegőben

$$E_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \varepsilon_0}.$$

A keresett feszültségkülönbség

$$U = E_1 d + E_2 d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \varepsilon_0} d \left( \frac{1}{\varepsilon_r} + 1 \right) = 1413 \text{ V.}$$

$$72. \quad E = 1750 \frac{\text{V}}{\text{cm}}.$$

73. A fegyverzetek közötti térben tértöltés nélkül  $\frac{U_0}{d}$  térerősség lenne. A tértöltés ehhez a 48. feladat eredménye alapján  $\frac{\varphi}{\varepsilon_0} x$  értékkel járul hozzá, ha  $x$ -et a lemezek közötti tér közepétől mérjük. Így a térerősség a zérus potenciálu fegyverzeten

$$E = \frac{U_0}{d} + \frac{\varphi}{\varepsilon_0} \frac{d}{2}.$$

Ez akkor lesz nulla, ha

$$\varphi = - \frac{2 \varepsilon_0 U_0}{d^2}.$$

$$74. m = \frac{QU}{dg} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ kg.}$$

75. A térerősség a 30. feladattól

$$E = \frac{R^2 \omega}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Ezért a potenciál

$$U = - \int \frac{R^2 \omega}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{R^2 \omega}{\varepsilon_0} \frac{1}{r},$$

ha a zérus potenciál a végtelenben van.

$$76. U = 5,65 \text{ V.}$$

$$77. U = 30 \text{ V.}$$

$$78. U = 7500 \text{ V.}$$

$$79. v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

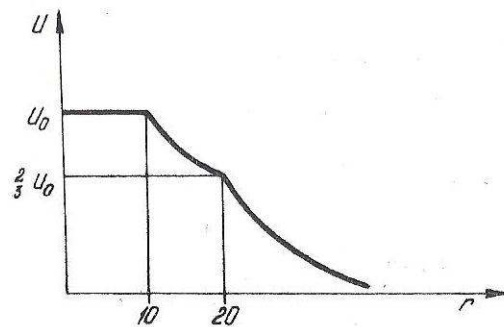
80.  $L = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

81. A 30. feladat alapján a gömbök között a térerősség

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2},$$

így a potenciálkülönbség

$$U = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = -750 \text{ V}.$$



86. ábra

a gömbön kívül

$$E_k = \frac{\varphi R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

A gömb belsejében a centrumtól  $x$  távolságra a potenciál

$$U = - \left( \int_{\infty}^R \frac{\varphi R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + \int_R^x \frac{\varphi r}{3\epsilon_0} dr \right) = \frac{\varphi}{2\epsilon_0} \left( R^2 - \frac{x^2}{3} \right).$$

87. A 38. feladatban a térerősséget kiszámoltuk:

$$E = \frac{\omega R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad (r \gg R),$$

tehát a potenciálkülönbség két pont között

$$U_A - U_B = \frac{\omega R}{\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r} = \frac{\omega R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

Itt nem lehet a végtelen távoli pont potenciálját nullának választani, mert ehhez képest a végesben levő pontok potenciáljai végtelen nagyok adódnának. Válasszuk a potenciált nullának a hengeren, akkor

$$U = \frac{\omega R}{\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}.$$

88.  $U = 180 \text{ V}$ .

89.  $U = 5,47 \cdot 10^3 \text{ V}$ .

90.  $E = \frac{U}{\ln 2} \frac{1}{d}$ .

91.  $U = \frac{U_0 + \frac{\varphi}{4\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} - \frac{\varphi}{4\epsilon_0} (r^2 - R_1^2)$

92.  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ .

93.  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ .

94.  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R \cdot r}{R - r}$ .

95.  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$

96. A 93., 94., 95., feladat eredményeinek  $\epsilon_r$ -szerese.

$$E = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_2}{\epsilon_2}$$

100. A térerősség mindkét szigetelőben ugyanakkora;

sorbakötött kondenzátorként kezeljük.

kum határfelülete közé fémlemez tennénk és az így elkészült két kondenzátort egybe látnánk, hogy a kapacitást úgy számolhatjuk, mintha a két dielektri-

$$C = \frac{A}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{A}{\frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}}$$

és így

$$A \text{ kapacitás } C = \frac{Q}{U}, \text{ de } Q = A \omega, \text{ de } \omega = \frac{Q}{U}$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \omega \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

A fégyveretek közötti potenciálkülönbség

$$E_1 = \frac{\omega}{\epsilon_1}, E_2 = \frac{\omega}{\epsilon_2}$$

A térerősség a két szigetelőben

$$D = \omega$$

kumok határfelületére merőleges.

99. Az eltolási vektor állandó a fégyveretek között, mert a dielektri-

98. A kapacitás 200 pF-dal növekedik.

$$97. C = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ pF}$$

$$C_g = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{a-r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{r-a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_3} \frac{1}{R-a}}$$

102. Hasonlóan okoskodva, mint a 99. feladatban adódik

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right)}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

A kapacitás A fégyvereten levő töltés  $Q = \omega A = DA$ .

$$U = D \int_0^b \left( \frac{dx}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \right) = D \frac{b}{\epsilon_2} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

A potenciálkülönbség

$$E = \frac{D}{\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} x}$$

Ugyanitt a térerősség

$$E = \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} x$$

x távolságban

101. Mivel a dielektrikum térerőssége az erővonalakra merőleges D el-

Mintha párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokkal állnánk szembe.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2}{E d} = \frac{A_1 D_1 + A_2 D_2}{E d} = \frac{A_1 \epsilon_1 E + A_2 \epsilon_2 E}{E d}$$

$$C_h = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\epsilon_1 h} \ln \frac{a}{r} + \frac{1}{2\pi\epsilon_2 h} \ln \frac{R}{a}}$$

103. Hasonlóan, mint a 100. feladatban

$$C_g = \frac{4\pi\epsilon_1}{2} \frac{R \cdot r}{R-r} + \frac{4\pi\epsilon_2}{2} \frac{R \cdot r}{R-r}$$

$$C_h = \frac{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2} \frac{h}{\ln \frac{R}{r}}$$

104.  $U = n^{\frac{2}{3}} U_1$ .

105. A térerősség nagysága állandó lesz, ha  $\epsilon = \frac{\epsilon_1 r^2}{x^2}$ , ahol  $x$  a centumtól mért távolság és  $\epsilon_1$  a dielektromos állandó a belső gömbön. A kapacitás

$$C = \frac{4\pi\epsilon_1 r^2}{R-r}$$

106. Mivel a végtelen távoli pont és a belső gömb azonos potenciálonan, a rendszer két párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak tekinthető. Az egyik a külső gömb és a végtelen távoli gömb. Ennek kapacitása

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 a$$

A mások a külső és a belső gömb alkotta kondenzátor. Ennek kapacitása

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{a-b}$$

Tehát az eredő kapacitás

$$C = C_1 + C_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{a^2}{a-b}$$

107.  $C = \frac{1}{3} \mu F$ .

108. A nagyobb feszültségre töltött kondenzátorból töltések mennek át másokra amíg a feszültség kiegyenlítődik. A közös feszültség 157 V lesz.

109.  $\frac{C_1}{C_2} = 3$

110.  $Q = 8 \cdot 10^{-6} C$ .

111.  $U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$ .

112. Az "a" esetben nagyobb a kapacitás.

113.  $C_4 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

114.  $U_1 = 3V, \quad U_2 = 1,5V, \quad U_3 = 3V, \quad U_4 = 1,5V$ .

115.  $U_1 = 3,6V, \quad U_2 = 1,8V, \quad U_3 = 3,6V, \quad U_4 = 1,8V$ .

116. A gömb terében sehol nem lehet a térerősség nagyobb az átütési szilárdságnál. Vagyis

$$E_{\max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \leq E_{kr}$$

kell, hogy legyen.

Ebből

$$Q \leq E_{kr} R^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 = 75 \cdot 10^{-7} C$$

117.  $U \leq 17,27 kV$ .

118. Az eltolási vektor mindkét szigetelőben

$$D = \omega$$

Hogy az átütést elkerüljük

$$E_1 = \frac{\omega}{\epsilon_1} \leq E_{1kr}, \quad \omega \leq E_{1kr} \epsilon_1$$

$$E_2 = \frac{\omega}{\epsilon_2} \leq E_{2kr}, \quad \omega \leq E_{2kr} \epsilon_2$$

kell, hogy legyen. Mivel  $E_{2kr} \varepsilon_2 < E_{1kr}$   
 $\omega \leq E_{2kr} \varepsilon_2$  a feltétele annak, hogy ne következzen be átütés.

A feszültségkülönbség

$$U = \frac{\omega}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\omega}{\varepsilon_2} d_2,$$

ahonnan

$$\omega = \frac{U}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \leq \varepsilon_2 E_{2kr},$$

vagyis

$$U \leq \varepsilon_2 E_{2kr} \left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right) = 300 \text{ kV lehet.}$$

119.  $U \leq 480 \text{ kV.}$

120.  $U \leq \frac{7}{6} E_{1kr} r_1.$

121. Ha a gömbkondenzátor fegyverzetein  $U$  feszültség van, akkor a térerősség

$$E = U \frac{R \cdot r}{(R-r)} \frac{1}{x},$$

ahol  $x$  a centrumtól mért távolság. A térerősség az  $x = r$  helyen a legnagyobb és értéke

$$E(r) = U \frac{R}{(R-r)r}$$

A dielektrikum akkor lesz a legkevésbé igénybe véve, ha  $E(r)$  a legkisebb. Ez azon  $r$  értéknél következik be, melyre

$$\frac{dE(r)}{dr} = 0$$

Ebből

$$r = \frac{R}{2} \quad \text{adódik.}$$

122.  $r = \frac{R}{e}$  esetben legkisebb a hengerkondenzátorban a szigetelő igénybevétele.

123.  $W = \frac{1}{2} \int U \rho \, dV$ . A potenciált a 86. feladatban kiszámoltuk:

$$U = \frac{\rho}{2 \varepsilon_0} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Az elemi térfogat  $dv = 4r^2 \pi \, dr$ . Így az energia

$$W = \frac{\rho^2}{4 \varepsilon_0} \int_0^R \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right) 4r^2 \pi \, dr = \frac{4\pi}{15} \frac{R^5 \rho^2}{\varepsilon_0}.$$

124.  $L = \frac{\varepsilon_0 Q^2}{2A} (d - d_0)$

125. A kondenzátor energiája  $3,18 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ -vel csökken.

126.  $L = \frac{Q\mu}{4\pi \varepsilon_0 R^2}$

127.  $M = 9,6 \cdot 10^{-24} \text{ N.m}$   
 $W = 9,6 \cdot 10^{-24} \text{ J.}$