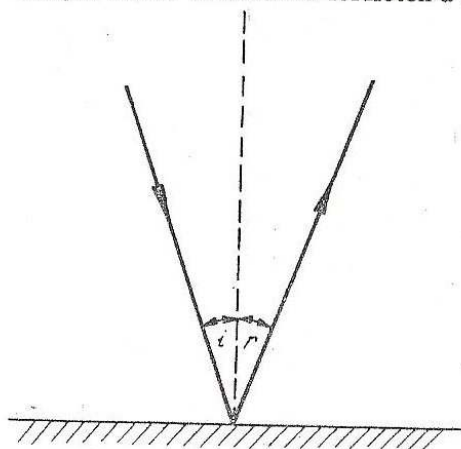


## Fény visszaverődése és törése sík felületen.

### Gömbtükrök. Vékony lencsék

Ha sík felületre fény esik, az részben elnyelődik a felületen, részben visszaverődik a felületről. Érdes felületen ugynevezett diffúz visszaverődés jön létre. Tükrösima felületen a fénysugár nem szóródik szét, hanem egy határozott irányba verődik vissza.



50. ábra

A beeső és visszavert sugár, valamint a beesési merőleges egy síkban van, és a beesés szöge megegyezik a visszaverődés szögével. ( $i=r$ ). (Lásd 50. ábra.)

Ha fény halad A optikai közegből B-be, a határfelületen a fény megtörik. (51. ábra) A beeső és megtört sugár, valamint a beesési merőleges egy síkban van. A beesési és törési szög szinuszáinak viszonya

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{AB}$$

állandó, és jelenti a B közegnek A-ra vonatkozó törésmutatóját. Fennáll, hogy

$$n_{AB} = \frac{1}{n_{BA}}$$

A vákuumra vonatkozó törésmutatót abszolút törésmutatónak nevezzük. Ha  $n_A$  az A közeg,  $n_B$  a B közeg abszolút törésmutatója, akkor

$$n_{AB} = \frac{n_B}{n_A}$$

Gömbtükrök képképzésénél a tárgy-, kép-, és fókusz távolság közötti kapcsolatot a tükrőtörvény adja:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

ahol a fókusz távolság a görbületi sugár fele ( $f = \frac{R}{2}$ ).

A tárgy távolság  $t$ , és a képtávolság  $k$  pozitív előjellű, ha a tárgy, ill. kép a tükröző felület előtt van.

Homorú tükör esetén  $f > 0$ , és a tárgy, és képtávolság kapcsolatát grafikusán az 52. ábra szemlélteti. A kihuzott vonal valódi, a szaggatott vonal látzólagos (virtuális) képet jelent.

A leképezés  $N$  lineáris nagyítását az alábbi összefüggésekkel számíthatjuk:

$$N = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f-t} = \frac{f-k}{f}.$$

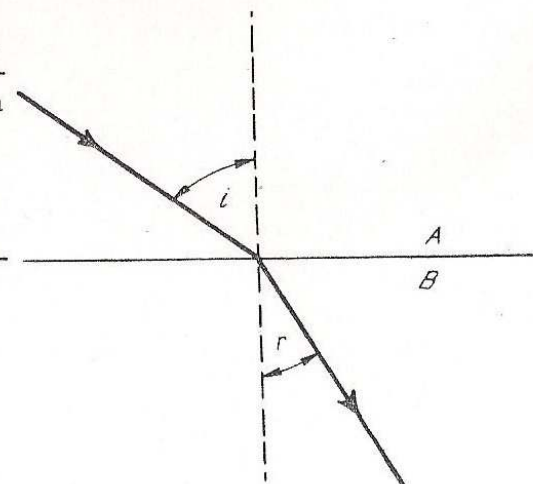
A nagyítási viszonyokat a tárgy távolság függvényében az 53. ábra szemlélteti. A nagyítás is előjeles mennyiség.  $N$  értéke akkor pozitív, ha a kép a tárggyal megegyező állásu.

Domború tükör esetén a fenti összefüggések változatlanul érvényesek, csak  $f = -\frac{R}{2}$ . A tárgy-, és képtávolság kapcsolatát és a nagyítási viszonyokat az 54. és 55. ábrán láthatjuk.

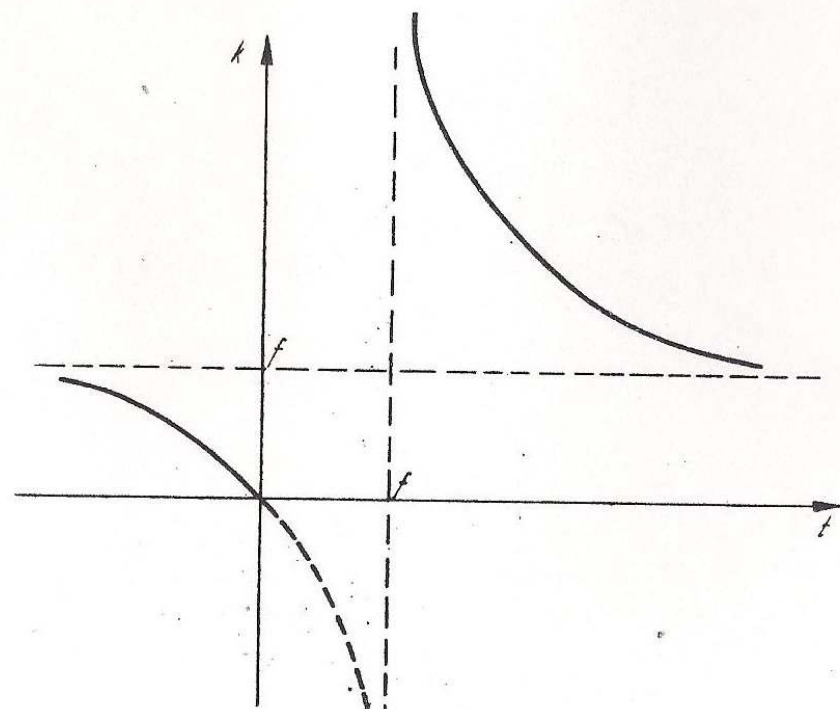
Vékony lencsével történő leképezésnél a tükrőtörvényhez hasonlóan fennáll, hogy

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

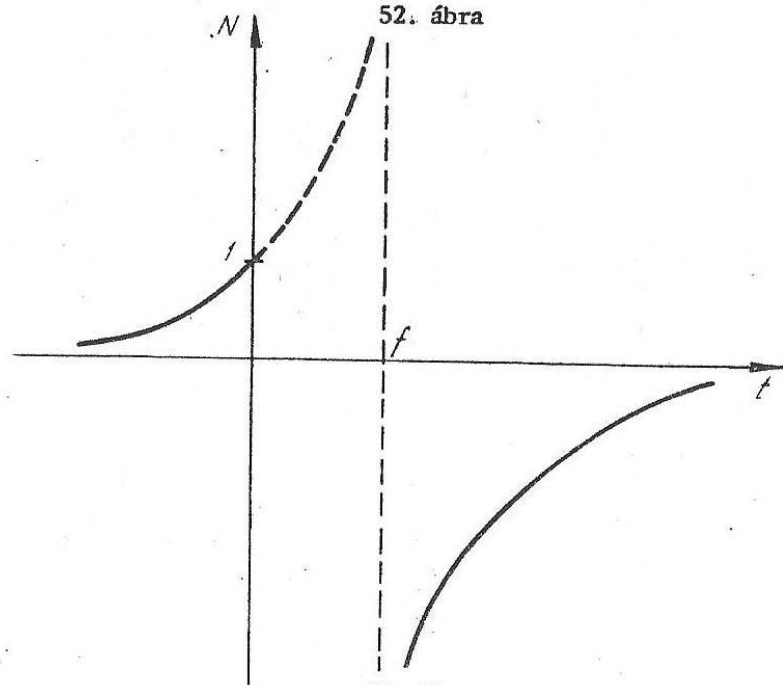
csak az előjelkonvenció módosul. A tárgy távolság  $t$  akkor pozitív, ha a tárgy a lencsének azon az oldalán van, ahonnan a leképező sugarak érkez-



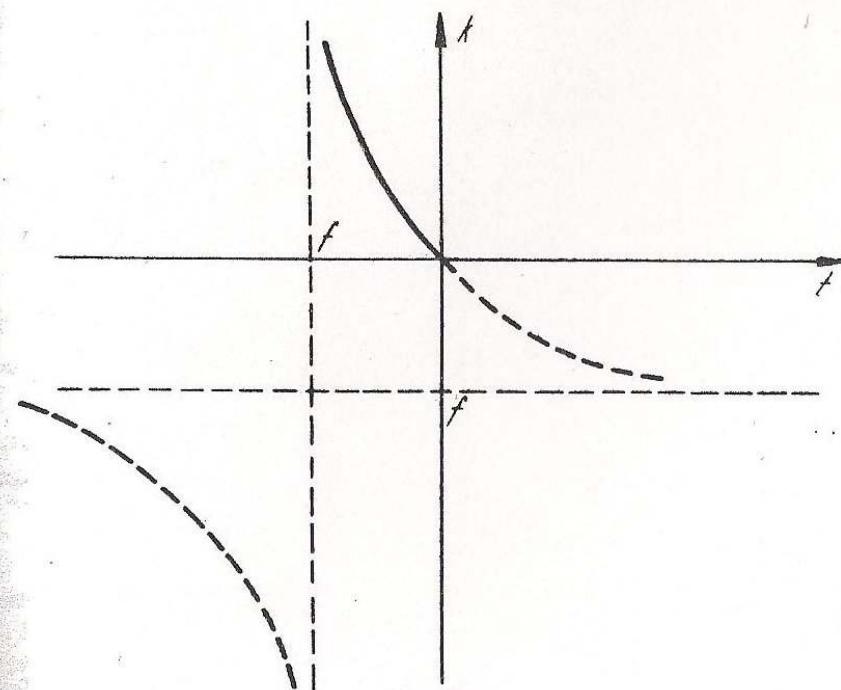
51. ábra



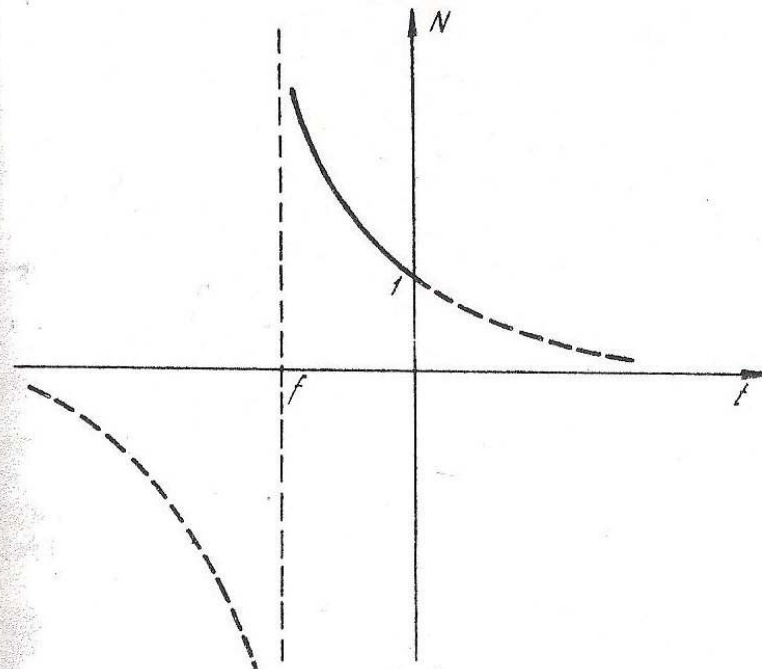
52. ábra



53. ábra



54. ábra



55. ábra

nek;  $k$  viszont akkor pozitív, ha a kép (akár valódi, akár virtuális) a lencsének azon az oldalán van, amerre a fénysugarak a lencsén áthaladva mennek. Gyűjtőlencse esetén  $f > 0$ , szórólencsénél  $f < 0$ .

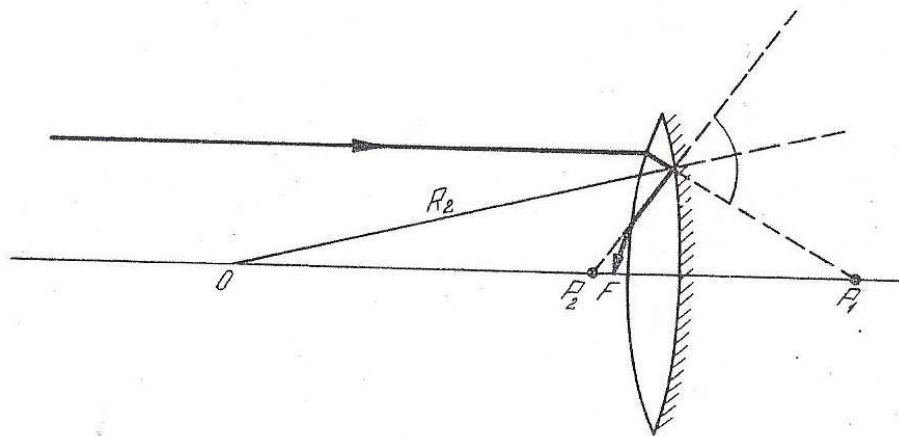
A lencse fókusz távolságát a geometriai adatok és a lencse anyagának a külső közegre vonatkozó törésmutatója határozza meg:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$R_1$  a fény által először ért gömbfelület görbületi sugara. A görbületi sugár előjeles mennyiség, értéke pozitív, ha a fény a törőfelületet konvex oldaláról éri. Ellenkező esetben a görbületi sugár negatív.

Példa: Határozzuk meg egy olyan vékony bikonvex lencse  $f$  fókusz távolságát, melynek egyik felületét beezüstözzük. A tiszta felület görbületi sugara  $R_1$ , az ezüstözött felületé  $R_2$ . A lencse anyagának levegőre vonatkozó törésmutatója  $n$ .

Megoldás: Az eredményen nyilván nem változtat, ha gondolatban az ezüstözött lencsét felbontjuk egy ezüstözetlen lencsére és egy szorosan mellé illesztett  $R_2$  sugaru gömbtükörre, úgy, hogy azokat egy igen vékony levegő-



56. ábra

réteg választja el. Ekkor az optikai tengellyel párhuzamosan beeső sugarak további útját több lépésben számíthatjuk. (Lásd 56. ábra.) Az egyszerűség kedvéért  $R_2$ -vel a gömbsugar abszolút értékét jelöljük.

a) A sugarak a lencsén áthaladva összetartóvá válnak, és ha a tükör nem lenne ott, a lencse mögötti  $P_1$  pontban,

$$f_1 = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

távolságban egyesülnének.

b)  $P_1$ -et, mint virtuális tárgyat leképezné a tükör a  $P_2$  pontba, ha a lencse nem lenne ott. Mivel  $t_1 = -f_1$ , fennáll, hogy

$$\frac{2}{R_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{k_1},$$

ahonnan

$$k_1 = \frac{f_1 R_2}{R_2 + 2 f_1}.$$

c)  $P_2$ -t, mint virtuális tárgyat ismét a lencse képezi le, mégpedig teljesen, a rendszer eredő  $F$  fókuszpontjába. Ennek a lencsétől való távolsága legyen  $f$ . Ekkor

$$-\frac{1}{k_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1},$$

innen

$$f = \frac{f_1 k_1}{f_1 + k_1} = \frac{R_1 R_2}{2(n-1)R_2 + 2nR_1}.$$

Példák:

349. Két egymáshoz ferdén hajló siktükör  $\varphi$  lapszöget zár be egymással. A tükörre olyan fénysugár esik, amelynek síkja a  $\varphi$  lapszög élére merőleges. Számítsuk ki, hogy mekkora szöget zár be eredeti irányával a fénysugár a kétszeres visszaverődés után. Mutassuk ki, hogy ez független a beesés szögétől.

350. A fénysugár két közeg sík határfelületén részben visszaverődik, részben megtörik. Mekkora  $i$  beesési szög esetén lesz a visszavert sugár merőleges a megtört sugárra?

351. A fénysugár olyan közegeken halad keresztül, amelyeket egymással

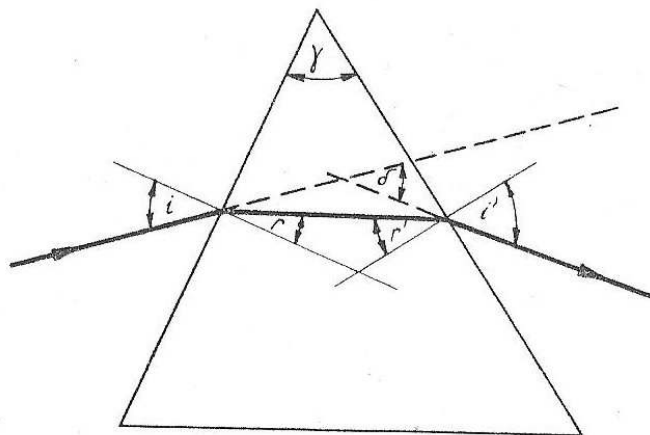
párhuzamos sík felületek választanak el. Bizonyítsuk be, hogy a kilépő fénysugár iránya csupán a belépő fénysugár irányától és az első, valamint az utolsó közeg törésmutatóitól függ.

352. Egy tó partján áll egy ember és a tó fenekén lát egy követ. A tó mélysége  $h = 1$  m. A víz felszínétől mekkora  $h'$  távolságra látszik a kő, ha a látósugár a víz felületére bocsátott merőlegessel  $i = 60^\circ$ -os szöget alkot? A víz törésmutatója  $n = 1,33$ .

353. 15 cm vastag üveglemez alatt egy kicsi szemcse fekszik. Hol keletkezik ennek látszólagos képe, ha a látósugár merőleges a lemez felületére és az üveg törésmutatója  $n = 1,5$ ?

354. Valamely tárgy egy planparallel üveglemeztől  $l = 15$  cm távolságra van elhelyezve. A megfigyelő a tárgyat a lemezen keresztül szemléli; a látósugár a lemezre merőleges. Mekkora a tárgy képének távolsága a lemeznek a megfigyelőhöz közelebb eső síkjától számítva? A lemez vastagsága  $d = 4,5$  cm,  $n = 1,5$ .

355. Egy  $l = 24$  cm hosszú pálca vízszintes helyzetben nyugszik és a középpontja felett 30 cm távolságban elhelyezett pontszerű fényforrással világítjuk meg. A pálcának milyen hosszú árnyékképe keletkezik azon a felfogó ernyőn, melyet a pálca alatt 10 cm távolságban vízszintesen helyezünk el? Hogyan változik meg a kép mérete, ha a pálca és a felfogó ernyő közé egy 15 mm vastag vízszintes helyező planparallel üveglemezt helyezünk ( $n=1,5$ )?



57. ábra

356. Bizonyítsuk be, hogy a prizma első párhuzamos sugárnyaláb eltérítése ( $\delta$ ) akkor a legkisebb, ha a sugarak utja a prizma nézve szimmetrikus. Számítsuk ki a legkisebb eltérítés szögének a prizma anyagának  $n$  törésmutatójával és a prizma törésszögével való összefüggését. (Lásd 57. ábra.)

357. Egy  $\gamma = 60^\circ$  törésszögű nehéz flintüvegből készült prizma legkisebb eltérítése  $\delta = 62,2^\circ$ . Mekkora a törésmutató. Mekkora beesési szög alatt áll elő a legkisebb eltérítés?

358. Egy fénysugár  $d = 10$  mm vastag üveglemezen halad át. A törésmutató  $n=1,6$ , a beesési szög  $40^\circ$ . Mekkora a sugárnyaláb oldalirányu eltolódása?

359. Legalább mekkora kell hogy legyen egy üvegekocka anyagának törésmutatója ahhoz, hogy egyik lapján beeső fénysugár csak az átellenes lapon léphessen ki?

360. Egy homorú tükör görbületi sugara 40 cm. Határozzuk meg annak a tárgynak a helyzetét, amelyről a tükör kétszeres nagyítású, valóságos képet ad. Hol lesz a tárgy akkor, ha a tüköradta képe virtuális, de ugyancsak kétszeres nagyítású?

361. Egy higannyal telt edény függőleges szimmetriatengelye körül  $\omega = 1$  rad/sec szögsebességgel egyenletesen forog. A higany felülete homorúvá válik és ezt a felületet tükörnek használjuk. Határozzuk meg ennek a tükörnek a fókusz-távolságát.

362.  $r = 9$  cm sugarú homorú gömbtükör elé 1,8 cm távolságra 1 cm magas tárgyat helyezünk. Határozzuk meg számítással és szerkesztéssel a kép adatait.

363. Egy homorú tükör tengelye mentén a fókuszponton belül helyezünk el egy pontszerű fényforrást, a fókuszon kívül pedig a tengelyre merőleges helyzetben egy átlátszatlan testet. Határozzuk meg szerkesztéssel a test mögötti árnyékkupot.

364. Mekkora sugarú homorú tükör szükséges ahhoz, hogy egy 2,5' szög alatt látszó kettőscsillag két tagjának képe egymástól 1 mm távolságban legyen?

365. A homorú gömbtükör háromszoros nagyítású, fordított képet ad egy bizonyos tárgyról. A kép és tárgy közötti távolság 28 cm. Mekkora a tárgy - és a fókusz-távolság?

366. Domború gömbtükörben a tárgy virtuális képe 7 cm-re látszik. Milyen messze van a tárgy a tükörtől, ha a fókusz-távolság 10 cm. Szerkesszük meg a tárgy képét a tükörben.

367. Gömbtükörben a virtuális kép a tárgy nagyságának fele. Ha a tárgyat 10 cm-rel közelebb visszük, a virtuális kép a tárgynagyság  $2/3$ -a lesz. Mekkora a tükör gyújtótávolsága?

368. A tárgy 60 cm-re van a homorú tükör előtt. Ha 10 cm-rel közelebb visszük, a kép az eredeti távolság  $5/3$ -ára távolodik a tükörtől. Mekkora a gyújtótávolság?

369. Valamely tárgyat egy homorú tükör tengelyén, gyújtópontján kívül helyezünk el. A gyújtópont és a tükör közé  $d$  vastagságú és  $n$  törésmutatójú planparallel üveglemezt állítunk úgy, hogy a tükör tengelye a lencsére merőleges legyen. Bizonyítsuk be, hogy a lemez elhelyezésekor a tárgy képe ugyanugy tolódik el, mintha a tükör a tárgy irányában  $\frac{d(n-1)}{n}$ -nel mozdulna el.

370. Mekkora a fókusz távolsága annak a bikonvex lencsének, amelyet  $r_1 = 2,5$  cm és  $r_2 = 4$  cm sugarú gömbfelületek határolnak? Az üveglencse törésmutatója  $n = 1,5$ .

371. Az  $f = 10$  cm fókusz távolságú lencse  $n = 1,5$  törésmutatójú üvegből készült. Mekkora lesz a lencse  $f'$  fókusz távolsága, ha vízbe tesszük. A víz törésmutatója  $n_v = 4/3$ .

372.  $n = 1,5$  törésmutatójú vékony lencse segítségével a lencsétől 10 cm távolságra egy tárgy valódi képét állítjuk elő. Ezután mind a tárgyat, mind a lencsét vízbe merítjük, anélkül, hogy távolságukat megváltoztatnánk. A tárgy képe ekkor a lencsétől 60 cm távolságra lesz. Mekkora a lencse  $f$  fókusz távolsága, ha a víz törésmutatója  $n' = 1,33$ ?

373. Egy vékony lencsétől 10 cm távolságra levő tárgy képe egyenes-állású és kétszeres nagyítású. Mekkora a lencse fókusz távolsága? Oldjuk meg a feladatot szerkesztéssel is.

374. Egy tárgy képét gyűjtőlencsével ernyőre vetítjük. A kép magassága  
a. A tárgy és ernyő helyzetét rögzítve, a lencsét az ernyő felé kezdjük tolni, és ekkor azt találjuk, hogy a tárgy második tiszta képének magassága  
b. Mekkora a tárgy valódi  $h$  magassága?

375. Egy lámpának az ernyőtől való távolsága 50 cm. A közöttük elhelyezett lencse két helyzetben adja az ernyőn a lámpa tiszta képét. E két hely közötti távolság 10 cm. Mekkora a lencse fókusz távolsága?

376. Két egyforma,  $n$  törésmutatójú plankonvex lencse közül az egyiket sík, a másikat pedig domború oldalán beézüstöztünk. Határozzuk meg a tükrök fókusz távolságainak arányát, ha a fény mindkét esetben az ezüstözetlen oldal felől esik a tükrökre.

377. Vízszintesen elhelyezett homorú tükörbe kevés vizet öntünk. A tükör a víz beöntése előtt tőle 54 cm távolságban elhelyezett ernyőn egy tárgy valós képét adta. Ha az ernyőt a tükörhöz közelítjük, a kép a tükörtől 36 cm távolságban újból megjelenik az ernyőn. Határozzuk meg a tükör görbületi sugarát és a tárgynak a tükörtől való távolságát, ha a víz törésmutatója  $n = 4/3$ .

349. Legyen a sugár beesési szöge az első tükrökhöz  $\alpha$ . Ekkor az első visszaverődés utáni sugár  $2\alpha$  szöget zár be az eredetivel. Ennek beesési szöge a második tükrökhöz  $\varphi - \alpha$ , a visszaverődés utáni sugárhoz pedig  $2(\varphi - \alpha)$ .

Igy a kétszeres visszaverődés után a sugarak  $2\alpha + 2(\varphi - \alpha) = 2\varphi$  szöget zárnak be egymással, tehát az független a beesés  $\alpha$  szögétől.

$$350. i = \arctg n$$

351. Jelöljük az  $i$ -edik közegben haladó sugár beesési szögét  $\alpha_i$ -vel, a közeg törésmutatóját  $n_i$ -vel, ekkor a fénytörés törvénye alapján fennállnak a következő összefüggések:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n_i \sin \alpha_i = n_z \sin \alpha_z.$$

Ha a  $z$ -edik közeg az utolsó, akkor

$$\sin \alpha_z = \frac{n_1}{n_z} \sin \alpha_1,$$

vagyis a kilépő fénysugár iránya valóban csak a belépő fénysugár irányától és az első, valamint az utolsó közeg törésmutatójától függ.

352. Adatok:  $h = 1 \text{ m}$ ,  $n = 1,33$ ,  $i = 60^\circ$ .

A törés törvény alapján

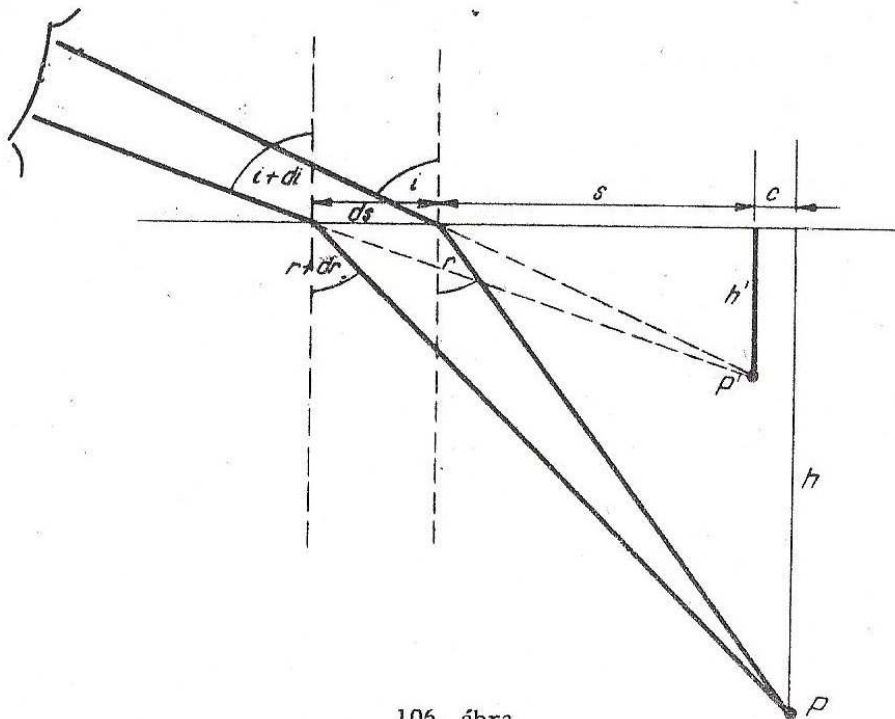
$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Differenciálva és rendezve:

$$\frac{di}{dr} = n \frac{\cos r}{\cos i}.$$

A 106. ábra alapján felírhatjuk:

$$S = h' \operatorname{tg} i.$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{h}{\cos^2 r}, \quad \frac{ds}{di} = \frac{h'}{\cos^2 i}.$$
$$\frac{di}{dr} = \frac{h \cos^2 i}{h' \cos^2 r} = n \frac{\cos r}{\cos i}.$$
$$h' = \frac{h}{n} \frac{\cos^3 i}{\cos^3 r} = \underline{\underline{0,216 \text{ m.}}}$$


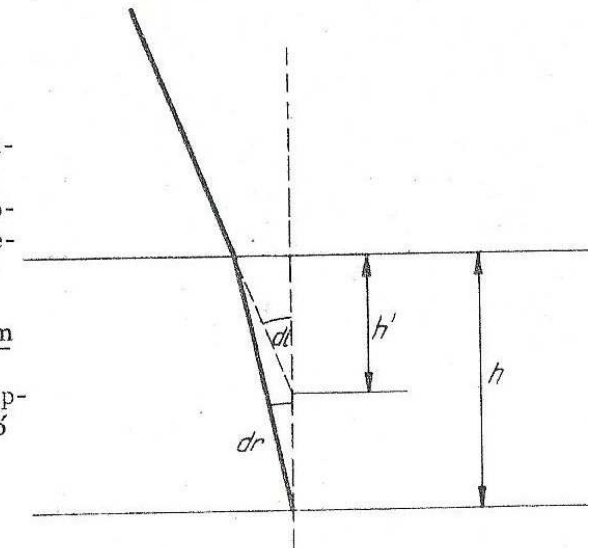
106. ábra

$$\frac{di}{dr} = n.$$
$$h \, dr = h' \, dr' ,$$

$$\frac{di}{dr} = -\frac{h}{h'}$$

$$h' = \frac{h}{n} = 10 \text{ cm.}$$
$$D = 1_0 + \frac{d}{n} = \underline{18 \text{ cm.}}$$
$$L = \frac{4}{3} 24 = 32 \text{ cm.}$$
$$L = 2d(\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} r) = \underline{0,438 \text{ cm}}$$
$$\delta = i + i' - \gamma$$

$$\gamma = r + r'$$



107. ábra

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n$$

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = n$$

Tekintsük  $\delta$ -t egyetlen változó ( $r$ ) függvényének:

$$\delta = i(r) + i'(r) - \gamma$$

Vizsgáljuk meg a szélsőérték feltételét:

$$\frac{d\delta}{dr} = \frac{di}{dr} + \frac{di'}{dr} \cdot \frac{dr'}{dr} = 0$$

Felhasználva a 352. példa egyik részeredményét, a szélsőérték feltételére azt kapjuk, hogy

$$\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos r'}{\cos i'}$$

Ebből  $i$  és  $i'$  kiküszöbölése után

adódik. Mivel  $\frac{d^2\delta}{dr^2} > 0$ , a szélsőérték minimum.

$$r = r' = \frac{\gamma}{2} \text{ és } i = i' = \frac{\gamma + \delta}{2},$$

ennek alapján a töréstartvény felírható:

$$n = \frac{\sin \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

357. A prizma ismert összefüggés szerint

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin 61,1^\circ}{\sin 30^\circ} = \underline{\underline{1,75}}$$

A minimális eltérítéshez tartozó beesési szög

$$i = \frac{\delta + \gamma}{2} = \underline{\underline{61,1^\circ}}$$

358. Jelöljük az eltolódást  $a$ -val. Ekkor

$$a = \frac{d \sin(i - r)}{\cos r}$$

$r$ -t a töréstartvényből számíthatjuk.

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = 0,402.$$

$$r = 23,7^\circ$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk:

$$a = \frac{10 \cdot \sin 16,3}{\cos 23,7} = \underline{\underline{3,07 \text{ mm}}}$$

359. Annak a feltétele, hogy egymásmelletti lapokon ne tudjon a fény áthaladni, úgy is megadható, hogy a fénysugár minimális eltérítése legalább  $90^\circ$ - legyen.

Ekkor

$$n = \frac{\sin(\frac{90^\circ + 90^\circ}{2})}{\sin(\frac{90^\circ}{2})} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

360. A tükör fókusz távolsága  $f = 20 \text{ cm}$ . Ha a tárgy a tükrőtől  $30 \text{ cm}$  távolságra van, akkor kétszeres nagyítású valódi képet kapunk.  $10 \text{ cm}$  távolság esetén a kép virtuális és kétszeres nagyítású lesz.

361. A tükör fókuszpontja az előálló forgási paraboloid fókusza lesz:

$$f = \frac{g}{2\omega^2} = \underline{\underline{4,9 \text{ m}}}$$

362.  $f = \frac{r}{2} = 4,5 \text{ cm}$ .  $t = 1,8 \text{ cm}$ . A tükrőtörvény alapján

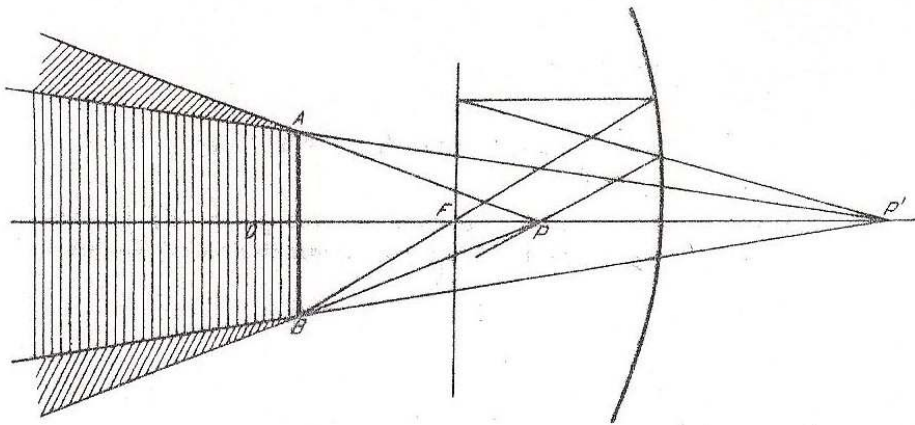
$$k = \frac{f \cdot t}{t - f} = -3 \text{ cm.}$$

A nagyítás összefüggését használva

$$N = -\frac{k}{t} = 1,67,$$

tehát a kép látszólagos, nagyított, egyenesállású, a tükör mögött 3 cm-re van, nagysága 1,67 cm.

363. Legyen a fényforrás a P pontban. Egy tetszőszerinti irányú sugar felvételével meghatározzuk a fényforrás képének P' helyét. Ha P és P'-t összekötjük a tárgy A és B szélső pontjaival, megkapjuk a teljes - és a fél- árnyék tartományokat (lásd 108 ábra.)



108. ábra

364. A tükör fókuszszakjában a kettőscsillag képe a tükör optikai középpontjából  $\alpha = 2,5'$  szög alatt látszik.

A képnagyság  $a = 1 \text{ mm}$ .

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{f} = \frac{2a}{r}.$$

Mivel

$$\operatorname{tg} 2\alpha \approx 2\alpha = \frac{2,5}{3437,7}$$

$$r = \frac{2a}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \underline{\underline{2,75 \text{ m}}}$$

365. Felírhatók a következő összefüggések:

$$\frac{k}{t} = 3, \quad k - t = 28.$$

Ezt megoldva  $t = 14 \text{ cm}$ ,  $k = 42 \text{ cm}$ .  
Behelyettesítve a tükörtörvénybe:

$$f = \frac{tk}{t+k} = \underline{\underline{10,5 \text{ cm}}}.$$

366. Adatok:  $k = -7 \text{ cm}$ ,  $f = -10 \text{ cm}$ .  
A tükörtörvény alapján:

$$t = \frac{fk}{k-f} = \underline{\underline{23,3 \text{ cm}}}$$

367. A nagyítás  $N = \frac{f}{f-t}$  összefüggését alkalmazzuk:

$$\frac{1}{2} = \frac{f}{f-t}, \quad \frac{2}{3} = \frac{f}{f-t+10}.$$

Ezt f-re megoldva kapjuk:

$$\underline{\underline{f = -20 \text{ cm},}}$$

tehát a gömbtükör domboru.

$$368. f = \underline{\underline{40 \text{ cm}}}.$$

369. A 353. feladat megoldása alapján a d vastagságú planparallel lemez mögötti tárgyak látszólag

$$\frac{n-1}{n} d$$

távolsággal közelebb kerülnek. Így a tárgy és kép helyéről nézve a tükör látszólag ezzel az értékkel közelebb kerül. Ebből következik, hogy a kép teljesen olyan mértékben tolódik el, mintha a tükört  $\frac{n-1}{n} d$ -vel közelebb toltuk volna.

$$370. \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Behelyettesítve:  $f = \underline{\underline{3,08 \text{ cm.}}}$

$$371. \quad f' = 10 n_v \frac{n-1}{n-n_v} = \underline{\underline{40 \text{ cm.}}}$$

372.  $f = \underline{\underline{9 \text{ cm}}}$  a lencse fókusz távolsága levegőben.

$$373. \quad \frac{f}{f-10} = 2, \text{ innen } f = \underline{\underline{20 \text{ cm.}}}$$

374. A tárgy és kép felcserélhetőségéből következik, hogy  $t_1 = k_2$  és  $t_2 = k_1$ .

Jelöljük a tárgy magasságát  $h$ -val. Ekkor

$$\frac{k_1}{t_1} = \frac{a}{h} \text{ és } \frac{k_2}{t_2} = \frac{b}{h}.$$

A négy egyenletet  $h$ -ra megoldva kapjuk:

$$h = \underline{\underline{\sqrt{ab}}}.$$

375.  $f = \underline{\underline{12 \text{ cm.}}}$

376. A sík oldalán ezüstözött tükör fókusz távolságát jelöljük  $f_1$ -el, a domboru oldalán ezüstözöttét  $f_2$ -vel.

$$f_1 = \frac{r}{2(n-1)}, \quad f_2 = \frac{r}{2n}, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{n-1}.$$

377.  $R = 72 \text{ cm}$ . A tárgynak a tükörtől való távolsága

$$t = 108 \text{ cm}.$$