Rezgéstan, hullámtan, hangtan

a) Hasson az m tömegü anyagi pontra

$$F = - Dx$$

erő, akkor $\omega_o^2 = D/m$ jelöléssel a mozgásegyenlet általános megoldása

$$x = A \sin (\omega_o t + \alpha)$$

Ez a harmonikus rezgés mozgástörvénye. A és α a kezdeti feltételektől függő amplitudó ill. kezdőfázis.

Ha még egy gyenge surlódóerő is fellép, melynek alakja

$$- k \dot{x} = - 2 m \beta \dot{x},$$

akkor a tömegpont csillapitott rezgéseket végez

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

körfrekvenciával. Ekkor az általános megoldás

$$x = A e^{-\beta t} \sin (\omega t + \alpha)$$

b) Az x tengely irányába terjedő hullám matematikai alakja:

$$\psi = a \sin \left[\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha\right]$$

Ha két közös frekvenciáju, rezgési siku és haladási irányu hullám találkozik, interferencia jön létre. Ha a két hullámforrás rezgésfázisa egyforma, a maximumok ill. minimumok azokon a helyeken vannak, melyekre nézve az utkülönbség a félhullámhossz páros ill. páratlan számu többszöröse.

c) A zenei hangok füllel hallható összetett periodikus rezgések, amelyeket általában több frekvencia jellemez. A hangmagasságot az alapfrekvencia határozza meg, amely a rezgés leghosszabb periódusu részhangjának a frekvenciája.

A hangmagasság, az alapfrekvencia egy hangforrás elsődleges adata, amely a hangtérben szoros összefüggésben van a hullámhosszal:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} .$$

A hullámhossz ebben az értelemben származtatott mennyiség, amely a hangforrás és a közeg együttes sajátságaként jelenik meg.

A hang terjedési sebessége gázokban

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\varkappa \frac{RT}{M}} .$$

Ebben $\varkappa$ a Poisson-állandó, M a molekulasuly, R az univerzális gázállandó. Ha ezt R = 8315 joule/kg.fok egységben helyettesitjük, a sebességet m/s-ban kapjuk.

Haladó sik-, vagy gömbhullám I intenzitása alatt az egységnyi felületen időegység alatt átáramlott energiamennyiséget, tehát a teljesitménysürüséget értjük.

A hangintenzitás kifejezése:

$$I = \frac{1}{2} \varrho_o c v_o^2 = \frac{1}{2} \frac{p_o^2}{\varrho_o c} ,$$

ahol v_o a sebességamplitudó, p_o pedig a hangnyomás amplitudója. Az intenzitás MKS és CGS egységei közötti átszámitás: 1 $W/m^2 = 10^3$ $erg/s\ cm^2$. Két különböző nagyságu intenzitás összehasonlitására a frekvenciához hasonlóan logaritmusos mértéket használunk. Ehhez felveszünk egy alapszintet, amely $I_o = 10^{-12}$ W/m^2. Egy tetszés szerinti I intenzitás szintértékét, amelyet decibel egységben mérünk, az

$$n = 10 \log \frac{I}{I_o} \text{ (dB)}$$

összefüggés szolgáltatja.

A hangmagasságra vonatkozó megállapitásaink csak akkor érvényesek, ha a hangforrás és a megfigyelő a hangtérben nyugszanak. Jelöljük

v_H, ill. v_M-el a hangforrás, ill. megfigyelő sebességének az őket összekötő egyenes irányába vett összetevőit. Ezek legyenek pozitivak akkor, ha egymás felé mutatnak. Legyen továbbá a hangforrás által kibocsátott rezgés frekvenciája ν_o, akkor a megfigyelő által észlelt frekvencia

$$\nu = \nu_o \frac{c+v_M}{c-v_M}$$

Példák

311. Rugón függő sulyt, ami másodpercenként tiz teljes rezgést végaz, 20 mm-rel kimozditunk egyensulyi helyzetéből. Mekkora lesz a pillanatnyi kitérés és a gyorsulás az elengedéstől számitott 1/50 s után?

312. m = 2 kg tömegü anyagi pontra F = -Dx alaku rugalmas erő hat. x_1 = 1 m távolságban az erő nagysága 8 N. A kezdő időpontban x_o = 1 m és v_o = 3 m/s. Határozzuk meg a pont mozgásának törvényét.

313. Határozzuk meg az x = 3 sin 2t - cos 2t törvény szerint harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont mozgásának amplitudóját és rezgésidejét.

314. Két, azonos amplitudóju rezgés, melyek frekvenciája ν_1 = = 50 Hz és ν_2 = 60 Hz egyszerre kezdi meg rezgését az egyensulyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

315. Egy rugó végén függő sulyt kényszerrezgésbe hozunk. Az egyik rávitt rezgés amplitudója A_1 = 3 cm, kezdőfázisa $\alpha_1 = \pi/6$, a másiké A_2 = 5 cm, $\alpha_2 = -\pi/6$. Mekkora az eredő amplitudó és az előálló rezgés fázisállandója?

316. Két longitudinális rezgés szuperponálódott. Az igy létrejövő harmonikus rezgőmozgás amplitudója 6 mm, és fázisállandója 45°. Az egyik részrezgés amplitudója 8 mm, fázisállandója -15°. Milyen amplitudóju a másik részrezgés?

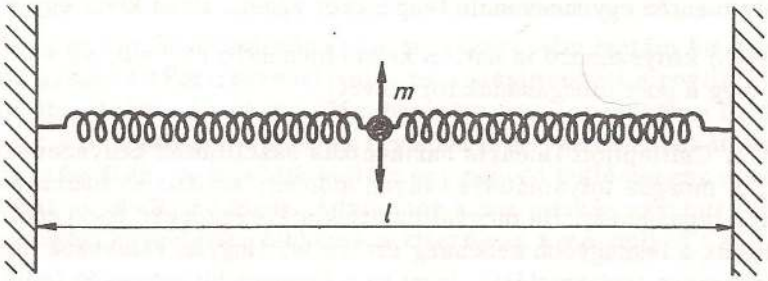
317. Stroboszkópos megfigyelés sze nt egy hangvilla egyidejüleg két különböző rezgést végez ν_1 = 150 Hz és ν_2 = 450 Hz frekvenciákkal.

Az amplitudók egyformák és a kezdő fázisszögek zérusok. Határozzuk meg az eredő rezgés alapperiódusának idejét és a legnagyobb kitérés értékét.

318. A hur egy pontja kétféle rezgést végez azonos irányban. Az egyik részrezgés amplitudója A_1, rezgésszáma ν. A másik rezgés ellenfázisu, amplitudója $\frac{A}{3}$, rezgésszáma 2ν. Mekkora a pont maximális kirezgése?

319. Egy sztereo-lemez vágótüjét egy adott irány jellemzésére, két egymásra merőleges irányban hozunk rezgésbe. A két rezgés fázisban van, amplitudó-arányuk 2:3. Milyen mozgást végez a vágótü hegye?

320. Két rezgés frekvenciája és amplitudója azonos, rezgésirányuk egymásra merőleges, fáziskülönbségük $\pi/3$. Milyen eredő rezgés keletkezik?



51. ábra

321. Két vizszintes helyzetü rugó közé m tömegü anyagi pontot erősitünk, amely vertikálisan kis amplitudóval rezgéseket végez. A két rugó összhossza nyugalmi állapotban ℓ_0, megfeszitve ℓ. Határozzuk meg a rezgési frekvenciát, mint ℓ függvényét (51. ábra).

322. G = 10 kp sulyu anyagi pont egy a centrumtól mért távolsággal arányos visszatéritő erő hatására egyenesvonalu lengéseket végez. A környező közeg ellenállása a pont sebességével arányos. Határozzuk meg a T rezgésidőt, ha az amplitudó három teljes lengés után tizedére csökken. (A rugóállandó: D = 2 kp/m.)

323. Egy csillapitott rezgésnél az amplitudó hat teljes rezgés után tizedére csökken. A rezgésidő T = 0,8 s. Határozzuk meg a rezgési folyamatra jellemző D/m állandót és β csillapitási tényezőt.

324. Egy rezonátorban gerjesztett stacionáris rezgés alakja

$$x = \frac{G_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_o^2}{Q^2}}} \cos(\omega t - \varphi) .$$

Határozzuk meg, hogy milyen frekvenciánál lesz a rezonanciagörbének és a sebességamplitudónak maximuma.

325. Határozzuk meg és rajzoljuk le a 323. példában megadott rendszer rezonanciagörbéjét kényszerrezgés esetén.

326. m = 2 kg tömegü anyagi pont a koordináta-rendszer kezdőpontjától mért távolsággal arányos visszatéritő erő hatására (D = 8 N/m) az x tengely mentén egyenesvonalu lengéseket végez. Ezen kivül egy F_x = =4 cos t (N) kényszererő is hat. A kezdő időpontban $x_o = 0$, $v_o = 0$. Határozzuk meg a pont mozgásának törvényét.

327. Csillapitott lineáris harmonikus oszcillátort kényszerrezgésbe hozunk. A mozgás folyamán lesz olyan időpont, amikor az oszcillátor sebessége a legnagyobb. Ha megváltoztatjuk a kényszererő frekvenciáját, megváltozik a legnagyobb sebesség értéke is. Hogyan válasszuk meg a kényszerrezgés frekvenciáját, hogy ez a legnagyobb sebesség (mint a frekvencia függvénye) maximális legyen?

328. Egy 5 m hosszu 2 mm átmérőjü sárgarézhuzalt F = 2π kp erő 0,95 mm-re nyujt meg (ρ = 8,3 g/cm^3). Mekkora sebességgel haladnak a huzalban a longitudinális hullámok, és mekkora egy ν = 20 000Hz frekvenciáju rezgés hullámhossza?

329. Egy vasötvözetben, amelynek sürüsége ρ = 7,86 g/cm^3, a longitudinális hullámok terjedési sebessége v = 5100 m/s. Mekkora az ötvözet rugalmassági modulusa?

330. Mi a frekvenciája és terjedési sebessége az

$$y = 4 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,02} - \frac{x}{4}\right)$$

függvénnyel megadott hullámnak? (t-t s-okban, x-t m-ekben mérjük.)

331. Rugalmas fonálon transzverzális hullám fut végig, amelynek amplitudója 5 mm, hullámhossza 15 cm. Mi lesz a kitérése T idő után annak a pontnak, amelyik 3 cm-re van a kezdőponttól?

332. Egy huron csillapitatlan transzverzális hullám terjed 3 m/s sebességgel pozitiv irányban. Amplitudója 8 cm, frekvenciája 0,5 s^{-1}. t = = 0 időpillanatban x = 0 helyen levő részecske kitérése 4 cm és negativ irányban mozog. Mekkora a kitérése az x = 4 m helyen levő részecskének t = 2 s időpillanatban,

333. A pozitiv tengely irányában egy csillapitatlan transzverzális hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely t = 0 időpillanatban az origóból indult. Amplitudója 10 cm, frekvenciája 0,5 s^{-1}. Mekkora a hullámhossz? Mikor kezd rezegni az x = 150 cm helyen levő részecske? Milyen fázisa és kitérése van e részecskének t = 2 s időpontban? Mekkora annak a részecskének az abszcisszája, melynek t = 0,5 s időpontban a kitérése 4 cm?

334. Egy hur hosszirányában két transzverzális hullám fut végig. Mindkettő azonos ω körfrekvenciával és a amplitudóval a pozitiv X tengely irányában halad. Az első hullám hatására egy, az origóban levő részecske a t = 0 időpontban éppen az egyensulyi helyzeten halad át a pozitiv Y tengely irányában. A második hullám egy negyed hullámhossz utkülönbséggel késik az elsőhöz képest. Adjuk meg a hur tetszés szerinti részecskéjének rezgési egyenletét. Mekkora a kitérés az x = λ helyen t = T időpontban?

335. A 334. feladatot oldjuk meg általánosságban, amikor a két hullám közti utkülönbség Δ $(0 < \Delta < \lambda)$.

336. Irjuk fel az eredő transzverzális rezgés kitérését, mint a hely és idő függvényét, ha a két hullám azonos amplitudóval és frekvenciával egymással ellentétes irányban halad egy folytonos huron.

337. Egy sikhullám a z tengelyre merőleges irányban halad oly módon hogy a hullám normálisa az x tengely pozitiv irányával $90^{o}-\alpha$ szöget zár be. Határozzuk meg a hullám analitikus alakját.

338. Egy sik merev falra i beesési szöggel végtelen kiterjedésü sikhullám esik. A visszavert hullám segitségével vizsgáljuk meg az interferenciaképet!

339. Egy kiterjedt közegben azonos amplitudóval, frekvenciával és hullámhosszal egymásra merőleges irányban halad két sikhullám. Egé-

szitsük ki ezeket további két, az előzőekkel szembenhaladó hullámmal. Irjuk le az előálló interferencia jelenséget!

340. Határozzuk meg a hang terjedési sebességét hidrogén, nitrogén, oxigén gázra és levegőre t = 0 C^o-on, valamint a sebesség százalékos megváltozását 1 C^o-os melegedés esetén.

341. Egy hang hullámhossza 68 cm, a hang terjedési sebessége levegőben 340 m/s. Mekkora egy részecske rezgésideje?

342. A hang terjedési sebessége száraz levegőben 0 C^o-on 331,57 m/s. Mely hőmérsékleten éri el pontosan a szokásosan használt 340,0 m/s értéket?

343. Egy csövet egyik végén merev zárólappal, másik végén gumimembránnal lezárunk. A csőben 18 C^o-os világitógáz van, amelyben a hanghullámok terjedési sebessége 0 C^o-ra vonatkoztatva c_o = 442,1 m/s.

A gázoszlopban egy 440 Hz-es hangvillával éppen egy olyan állóhullámot tudunk létesiteni, amelynél a membránon kivül még egy helyen maximális a kirezgés. Milyen hosszu a cső?

344. A puskagolyó az embertől 5 m távolságban 660 m/s sebességgel repült tova. Mekkora távolságban van az embertől a golyó akkor, amikor az a fütyülést hallja?

345. Egy lövedék fejhulláma kuppalástot alkot, amelynek fél nyilásszöge 30°. Mekkora a lövedék sebessége?

346. Egy spirálrugó hosszában longitudinális hullám halad 4 m/s sebességgel. Két egymásután következő sürüsödési hely távolsága 80 cm, a részecskék rezgési amplitudója 3 mm. Mekkora a sebességamplitudó? Mekkora energiával rendelkezik a rezgő rugó egy 0,16 g tömegü részecskéje?

347. Középen befogott 51 cm hosszu, 8 g/cm^3 sürüségü acélrudat hosszirányu dörzsöléssel megszólaltatunk és a hangot egy Kundt-féle csőre visszük át. A kialakuló állóhullámokon megmérve, a hullámhossz 6,8 cm-nek adódik. Mekkora az acél rugalmassági modulusza? A hang terjedési sebessége a kisérlet hőmérsékletén (20 C^o-on) 343 m/s.

348. Számitsuk ki a levegő és a hidrogéngáz hullámellenállását normál állapotra vonatkoztatva.

349. Mekkora amplitudóval kell egy 100 cm^2-es sik felületnek rezegnie 50 Hz frekvencián, hogy a lesugárzott teljesitmény 100 W legyen

a) levegőben,
b) vizben.

350. Három nyitott sip hosszának aránya 15:12:10. Mekkorák a hangközök az alaphangra vonatkoztatva?

351. Mekkorák a hangközök a diatonikus és a temperált durakkordban? Mekkora a hangközök százalékos eltérése egymástól?

352. Egy ν frekvenciáju hangból kiindulva két kvintet felfelé megyünk. Mekkora a hangköz az igy nyert hang és a kiindulási hang felső oktávja között.

353. Két hangvilla egyszerre megszólaltatva 10 s alatt 20 lebegést ad. Az egyik hangvilla rezgésszáma 256 Hz. Mekkora a másiké?

354. Egy 435 s^{-1} rezgésszámu hangvillát olyan, mindkét végén nyitott üveghenger fölé tartjuk, amelynek alsó vége vizbe merül. Milyen magasságra kell beállitani a hengert, hogy benne rezonancia keletkezzék?

355. A végeinél lezárt cső hossza 1,7 m. Számitsuk ki a cső saját-frekvenciáit, ha levegővel van töltve.

356. Határozzuk meg azokat a frekvenciákat, amelyekre egy levegővel megtöltött és egyik végén lezárt 1,7 m hosszu cső rezonál.

357. A nyomáshullám amplitudója p_o = 100 din/cm^2. Számitsuk ki azt a P teljesitményáramot, amely az emberi fülbe jut. Tekintsük a fülnek a hullám terjedésére merőleges hatásos keresztmetszetét 4 cm^2 nagyságunak. A levegő sürüsége $1,3.10^{-3}$ g/cm^3 és a hang sebessége c = 334 m/s.

358. Egy jó hallásu ember még hallja azt a ν = 2000 Hz frekvenciáju hangot, amelynél a hangnyomás amplitudója 10^{-3} din/cm^2. Számitsuk ki a hullámban a levegőrészecskék amplitudóját és a hang intenzitását dB-ben.

359. Az emberi fül számára 1000 Hz frekvencián a hallhatósági küszöb $p_o = 2.10^{-4}$ din/cm^2. Erre a szintre vonatkoztatva mekkora a hangintenzitás $p = 2.10^2$ din/cm^2 hangnyomásnál (fájdalomküszöb). Mekkora a hangnyomás 50 dB intenzitás esetén?

360. Egy hangszóró gömbszimmetrikusan 0,01 watt hangteljesitményt sugároz szét. Mekkora a hangerősség 10 m távolságban. Milyen környezetben hallható a hangja, ha a hallhatósági küszöb $I_o = 10^{-16}$ W/cm^2.

361. Egy 1000 Hz frekvenciáju hangot adó hangvilla tőle 2 m távolságra 40 fon erősségü hangérzetet kelt.

a) Mennyi a rezgő hangvilla teljesitménye?
b) Mekkora a kitérés és a nyomásingadozás amplitudója az észlelés helyén?

362. Két hangforrás közül az egyik egyedül 30 fon, a másik 40 fon hangérzetet kelt. Mekkora a hangérzet, ha a kettő együtt szól? (ν = 1000 Hz)

363. Egy olyan falon keresztül, amelynek csillapitása 15 dB, gépzaj hallatszik a szomszéd teremből 45 fon hangerősséggel. Hány gép van üzemben, ha egy gép üzem közben 45 fon hangerőt szolgáltat a munkahelyiségben?

364. Az ember a közepes frekvenciatartományban egy előtte fekvő hangforrás irányát $\pm 3^o$-os pontossággal tudja meghatározni. Mekkora időkülönbségnek felel ez meg a hang fülbeérkezésében, ha a fülek távolságát d = 16 cm-nek vesszük. Legyen a fej gömb alaku és c = 340 m/s.

365. Egy 33 cm hosszu hur harmadik felharmonikus hangjának frekvenciája 1320 Hz. Mekkora a hurban a transzverzális hullámok terjedési sebessége?

366. Egy gőzmozdony 20 m/s sebességgel közeledik a megfigyelőhöz. Milyen magasnak hallja egy nyugvó megfigyelő a mozdony sipjának alaphangját, ha azt a mozdonyvezető 300 Hz rezgésszámunak hallja. Mennyivel változik meg e siphang felharmonikusainak frekvenciája? (c = 330 m/s.)

367. Hangforrás és megfigyelő a levegőzöz képest egyforma relativ sebességgel közelednek egymás felé. Milyen sebesség mellett lesz a kibocsátott és észlelt frekvencia hangköze egy kvart? (c = 330 m/s.)

368. Egy 1024 Hz frekvenciáju hangvillát 1,5 m/s sebességgel közelitünk merőleges irányban egy sima fal felé. Hány lebegést észlel másodpercenként az a megfigyelő, aki távolabb a hangvillától annak pályaegyenesén van? (c = 330 m/s.)

369. Egyenes pályán 72 km/h sebességgel haladó gyorsvonat sipja ν = 560/s rezgésszámu hangot bocsát ki.

a) Milyen magasnak hallja ezt a hangot a gyorsvonat mögött vele azonos irányban 54 km/h sebességgel haladó személyvonaton levő észlelő? Mennyivel változik a helyzet, ha

b) a vonatok haladásával egyező,

c) azzal ellentétes irányu 10 m/s sebességü szél fuj?

370. Egy tőlünk eltávolodó rakéta sebességét akarjuk meghatározni. Ehhez egy 120 MHz-en dolgozó radarkészüléket használunk. ($c = 3.10^8$ m/s.) A kibocsátott és visszavert hullámok egy 450 Hz frekvenciáju lebegést eredményeznek. Mekkora ezen adatok alapján a rakéta sebessége?

311. $\nu = 10$ Hz, $A = 20$ mm, $x = A \cos 2\pi\nu t = 6,18$ mm,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(2\pi\nu)^2 x = -24,4 \text{ m/s}^2 .$$

312. Az általános megoldás:

$$x = A \cos\omega t + B \sin \omega t .$$

A kezdeti feltételeket figyelembe véve:

$$x = \cos 2t + 2\sin 2 t .$$

313. $A = -1$, $B = 3$, $\omega = 2$.
Ennek alapján az amplitudó

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{10},$$

a frekvencia pedig $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$.

A rezgésidő $T = \frac{1}{\nu} = \underline{\pi \text{ s}}$.

314. A kitérések akkor egyeznek meg először, amikor $\sin \omega_1 t = \sin (\pi - \omega_2 t)$, ahonnan

$$t = \frac{\pi}{2\pi(50+60)} = \underline{4,55 \text{ ms}} .$$

315. $A = 4,37$ cm, $\alpha = -8,2^\circ$.

316. A példát legegyszerübben vektorháromszöggel tudjuk megoldani. $A_2 = 7,2$ mm.

317. Az eredő rezgés $y = A (\sin \omega_1 t + \sin 3\omega_1 t)$, ahol $\omega_1 = 2\pi 150 = 300\pi \frac{\text{rad}}{s}$.
Elemi átalakításokkal nyerjük:

$$y = (4 a \cos^2 \omega_1 t) \sin \omega_1 t .$$

Ebből leolvasható, hogy az alapperiódus ideje

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{150} \text{ s}, \quad \text{és} \quad y_{max} = \frac{8}{3\sqrt{3}} a$$

318. Az eredő rezgés:

$$y = A \sin 2\pi\nu t - \frac{A}{2} \sin 4\pi\nu t = A\,(1-\cos 2\pi\nu t) \sin 2\pi\nu t$$

$$y_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} A \approx 1,3\ A$$

319. A vágótü egyenes mentén végez harmonikus rezgőmozgást. A rezgés iránya $\alpha = 33,7^{o}$ szöget zár be a nagyobb (A_1) amplitudóju részrezgés irányával, nagysága pedig $A = 1,2\ A_1$.

320. Vegyük fel az (x, y) tengelyeket az összetevő rezgések irányába. Ekkor

$$x = \sin\varphi$$

$$y = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$$

φ kiküszöbölése után nyerjük a rezgés pályaegyenletét:

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{3}{4}.$$

Legyenek ξ és η a 45°-os szögfelezők. Ezekre áll, hogy

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi - \eta).$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi + \eta).$$

A transzformációt alkalmazva, összevonás és rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{2\xi^2}{3} + 2\eta^2 = 1.$$

A pálya tehát olyan ellipszis, melynek középpontja az origóban van, tengelyei 45°-kal el vannak forgatva, nagytengelye $\sqrt{6}$, kistengelye pedig $\sqrt{2}$.

321. Ha kis amplitudókra szoritkozunk, akkor

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \cong -2\frac{\ell-\ell_o}{\ell}Dx,$$ tehát a mozgás harmonikus és a rezgés körfrekvenciája

$$\omega(\ell) = \sqrt{\frac{2(\ell-\ell_o)D}{m\ell}} = \omega_{max}\sqrt{1-\frac{\ell_o}{\ell}}$$

ahol $\omega_{max} = \sqrt{\frac{2D}{m}}$ az a körfrekvencia, amely a rugók erős megfeszitésénél adódik, amikor $\ell \gg \ell_o$.

322. A csillapitási együttható az amplitudócsökkenésből számitható:

$$e^{-\beta 3T} = \frac{1}{10}, \text{ innen } \beta T = 0,77.$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - (\frac{0,77}{T})^2}} = \frac{2\pi T}{\sqrt{(\omega T)^2 - 0,77^2}},$$

$$(\omega T)^2 = 40,1,$$

$$T = \frac{6,33}{\omega} = 6,33\sqrt{\frac{m}{D}} = 4,5 \text{ s}.$$

323. $$\frac{D}{m} = (\frac{2\pi}{0,8})^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{4\pi^2}(\frac{1}{6}\ln 10)^2\right] = 61,9 \text{ s}^{-2},$$

$$\beta = \frac{\Lambda}{T} = \frac{1}{4,8}\ln 10 = 0,48 \text{ s}^{-1}.$$

324. Az amplitudónak ott lesz maximuma, ahol

$$(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \frac{\omega_o^2\omega^2}{Q^2}$$

kifejezés minimális.

Az ehhez tartozó frekvencia:

$$\omega_{max\ 1} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega_o^2}{Q^2}} = \omega_o\sqrt{1 - \frac{1}{2\ Q^2}}.$$

A sebességamplitudó maximumához tartozó frekvencia:

$$\omega_{max\ 2} = \omega_o.$$

A többi maximumhely negativ, ill. imaginárius frekvenciánál van, aminek fizikai értelme nincs. A sebességamplitudó maximuma tehát nem esik a rezonanciamaximummal össze, hanem a gerjesztésmentes rendszer saját-frekvenciájánál lesz.

325. Az amplitudót normáljuk az $\omega = 0$, esetén fennálló

$$A_o = \frac{G_o}{m\omega_o^2}$$

értéke. Ekkor

$$\frac{A}{A_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o} + \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\ \frac{1}{Q^2}}}$$

Adatok:

$$\frac{\omega_o}{Q} = 2\beta = 0,96\ s^{-1}, \qquad \omega_o^2 = 61,9\ s^{-2}.$$

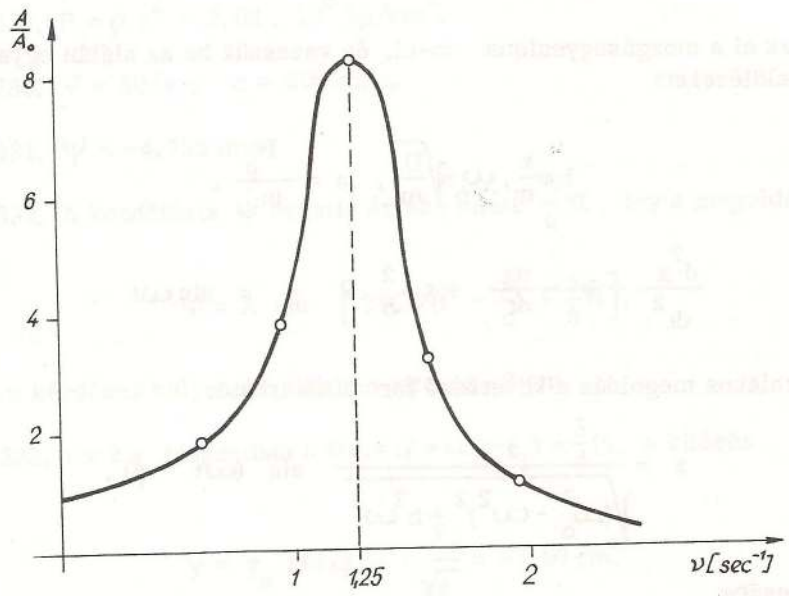
$\frac{A}{A_o}$ maximuma

$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega_o^2}{Q^2}} = 0,996\,\omega_o \approx \omega_o$$

értéknél van.

$$\frac{A_{max}}{A_o} \approx Q = 8,2.$$

A rezonanciagörbét $\frac{A}{A_o}$ különböző frekvenciáknál számitott értékei segitségével nyerjük (lásd 98. ábrát).



98. ábra

326. Az általános megoldás:

$$x = \frac{a}{\omega_o^2 - \omega^2} \cos \omega t + A \cos \omega_o t, \qquad \text{ahol}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}} = 2 \text{ rad/s}, \qquad \omega = 1 \text{ rad/s}, \; a = 2 \text{ m/s}^2.$$

A kezdeti feltételek értelmében

$$A = -\frac{a}{\omega_o^2 - \omega^2} = -\frac{2}{3},$$

tehát a megoldás

$$x = \frac{2}{3} (\cos t - \cos 2t).$$

327. A mozgás differenciálegyenlete:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - Dx - k \frac{dx}{dt} + F_o \sin \omega t .$$

Osszuk el a mozgásegyenletet m-el, és vezessük be az alábbi egyszerüsitő jelöléseket:

$$b = \frac{k}{m}, \omega_o = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad a = \frac{F_o}{m} .$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = a \sin \omega t .$$

Az általános megoldás a következő formában irható:

$$x = \frac{a}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin (\omega t - \varphi) .$$

A sebesség

$$v = \frac{a\omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2) + b^2\omega^2}} \text{cso} (\omega t - \varphi) .$$

Ez a sebesség akkor a legnagyobb, ha

$$t = \frac{\varphi}{\omega},$$

és értéke ekkor

$$v = v_o = \frac{a}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

ω változtatásával v_o maximális értéket vesz fel, ha $\omega = \omega_o$ és akkor

$$v_o = \frac{a}{b} = \frac{F_o}{k} .$$

328. A rugalmassági modulussal való összefüggés alapján

$$c = \sqrt{\frac{F\ell}{A\Delta\ell\rho}} = 3520\,\mathrm{m/s}, \lambda = \frac{c}{\nu} = 17,6\ \mathrm{cm}.$$

329. $E = \rho v^2 = 2,08 \cdot 10^6\ \mathrm{kp/cm^2}$.

330. $\nu = 50/\mathrm{s}$; $c = 200\ \mathrm{m/s}$.

331. $\psi = -4,755\ \mathrm{mm}$.

332. A kezdőfázis $\dot{\psi}$ negativ értéke miatt $\frac{5}{6}\pi$, igy a megoldás

$$\psi = A \sin \left[2\pi\nu(t - \frac{x}{c}) + \frac{5}{6}\pi\right],$$

ebből a kérdéses helyen és időben a kitérés -8 cm.

333. $t = 2$ s időpontban a fázis $\varphi = \omega(t-t_1) = \frac{5}{4}\pi$, a kitérés

$$y = y_o \sin\varphi = -\frac{y_o}{\sqrt{2}} = -7,07\ \mathrm{cm}.$$

A 4 cm kitérésü részecske fázisa

$$\sin\varphi = 0,4, \qquad \varphi = 23,75^o.$$

Ez a fázis az origóban $t_2 = \frac{\varphi}{\omega} = 0,1315$ s időpontban áll fenn.

$t_3 = 0,5 - 0,1315 = 0,3685$ s alatt ez a fázis eljut $x = c\,t_3 = 73,7$ cm távolságra.

334. $t = 0$ időpontban az eredő zérushely $x = -\frac{\lambda}{8}$ helyen van. Az eredő amplitudó $a \cdot \sqrt{2}$. Tetszés szerinti x helyen és t időben az eredő kitérés

$$y = a\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4} - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right).$$

335. $y = 2a \cos\frac{\pi\Delta}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta + 2x}{2\lambda}\right)$.

336. A két szembe haladó hullám eredőjeként állóhullám jön létre, vagyis lesznek olyan x helyek, – egymástól $\frac{\lambda}{2}$ távolságra – ahol a kitérés mindig zérus. Válasszuk az x tengely kezdőpontját két ilyen csomópontot összekötő egyenes felezőpontjában.

Ekkor a csomópontok koordinátái:

$$x_n = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Legyen t = 0 időpontban az origóban a kitérés éppen zérus, akkor

$$\psi = 2\,a\,\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\,\sin \omega t.$$

337. A hullámnormálist válasszuk x' tengelynek; a hullámfelületek az y' tengellyel párhuzamosak.

(x', y') rendszerben a hullám alakja:

$$\psi = a\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x'}{\lambda}\right).$$

A vesszős és vesszőtlen koordináták között fennáll, hogy

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

A hullám kifejezését áttranszformálva a vesszőtlen koordinátákra kapjuk, hogy

$$\psi = a\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\lambda}\right).$$

338. A visszaverő felület legyen az y = 0 sik, (lásd a 99. ábra). Így az Y tengely a beesési merőleges, és X' az origóba beeső hullám normálisa, mely hullám a következő alaku:

$$\psi_{be} = a\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x'}{\lambda}\right).$$

Koordináta-transzformációt alkalmazva (lásd 337. feladat)

$$\psi_{be} = a\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x\sin i + y\cos i}{\lambda}\right).$$

A reflektált hullám normálisa az X'' tengely. Mivel azonban a fal merev volta miatt π fázisugrás áll elő,

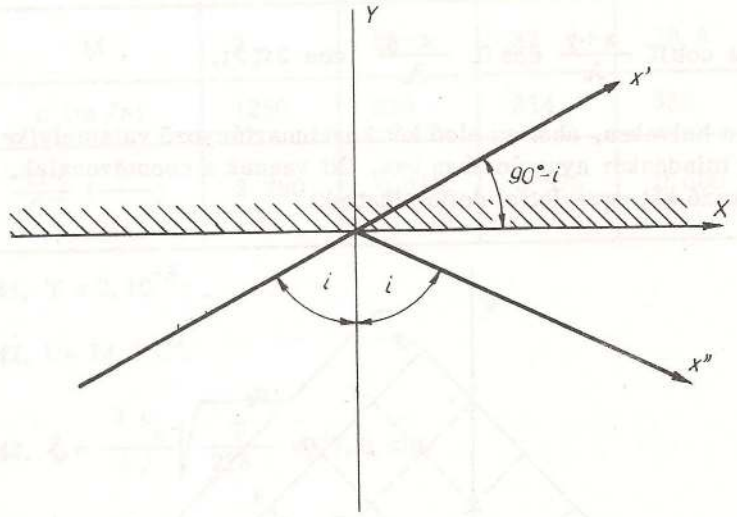
$$\psi_r = a \cos \left[2\pi \left(vt - \frac{x''}{\lambda}\right) + \pi\right] = - a \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x''}{\lambda}\right).$$

Erre is alkalmazva a transzformációt kapjuk, hogy

$$\psi_r = - a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x \sin i - y \cos i}{\lambda}\right).$$

A két hullám eredője (szorzattá alakitva):

$$\psi = \psi_{be} + \psi_r = 2 a \sin 2\pi \frac{y \cos i}{\lambda} \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x \sin i}{\lambda}\right).$$



99. ábra

Erről az alakról a következőket olvashatjuk le: x irányban egy hullám terjed tova, y irányban állóhullám alakul ki. A szilárd falnál, ahol y = 0, csomóvonal van.

Ezenkivül mindazon helyeken interferenciaminimum van, ahol az első szinuszténye ző eltünik, tehát

$$y_{min} \cdot \cos i = \frac{n}{2} \lambda. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Ha a faltól rá merőleges irányban távolodunk, akkor váltakozva maximum és minimumhelyeket találunk.

339. A két szembehaladó hullámot tetszés szerinti fázisállandókkal vehetjük fel. Ha ezeket zérusnak választjuk (az eredeti hullámokéval megegyezően) ugy az eredő hullám kifejezése:

$$\psi = a\left[\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \cos 2\pi(\nu t - \frac{y}{\lambda}) + \cos 2\pi(\nu t + \frac{y}{\lambda})\right].$$

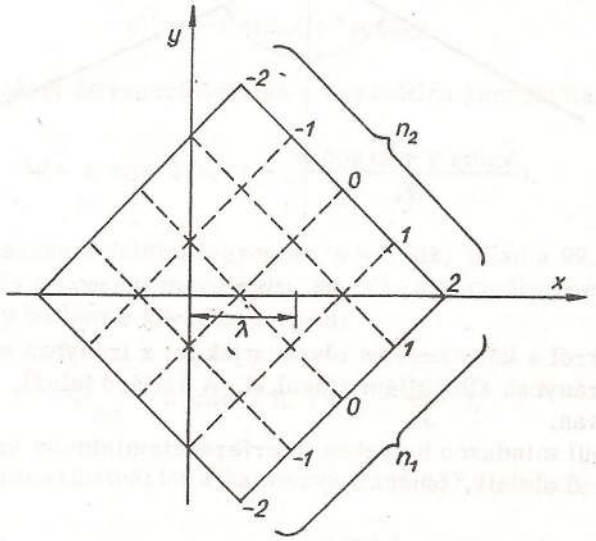
Az egymással szembehaladó hullámokat egy tagba összefogva kapjuk, hogy

$$\psi = 2\,a\,(\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t + \cos 2\pi\frac{y}{\lambda}\cos 2\pi\nu t) =$$

$$= 2\,a\,(\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} + \cos 2\pi\frac{y}{\lambda})\cos 2\pi\nu t =$$

$$= 4\,a\cos\pi\frac{x+y}{\lambda}\cos\pi\frac{x-y}{\lambda}\cos 2\pi\nu t.$$

Azokon a helyeken, ahol az első két koszinusztényező valamelyike zérus, a közeg mindenkor nyugalomban van. Ott vannak a csomóvonalak. Ezeket a következő két egyenlettel definiálhatjuk:



100. ábra

$$\frac{x+y}{\lambda} = n_1 + \frac{1}{2} ,$$

$$\frac{x-y}{\lambda} = n_2 + \frac{1}{2} ,$$

ahol n_1 és n_2 tetszés szerinti pozitiv vagy negativ egész szám, vagy zérus. A csomóvonalak egy négyzetes hálót alkotnak. Ennek egy részletét a 100. ábrán láthatjuk. Egy rezgéseket végző testet csomóvonalai mentén rögzithetünk. Tehát ugyanilyen képet fog mutatni egy sajátrezgéseit végző négyzetes befogásu membrán is.

340. $c = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8315 \cdot 273}{M}}$ m/s, $\frac{\Delta c}{c} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} \cong 0,18\%$.

	H_2	N_2	O_2	levegő
M	2	28	32	28,8
c (m/s)	1250	336	314	330
$\frac{\Delta c}{\Delta T} \left(\frac{m}{s \cdot C^o}\right)$	2,280	0,615	0,575	0,600

341. $T = 2,10^{-3}$ s.

342. $t = 14,1\ C^o$.

343. $\ell = \frac{3\ c_o}{4\nu}\sqrt{\frac{T}{273}} = 77,8$ cm.

344. 1. módszer:

Adatok:

$a = 5$ m, $v = 660$ m/s, $c = 330$ m/s (101. ábra).

A puskagolyó mozgástörvénye, ha $t = 0$ időpontban a lövedék az $x = 0$ helyen van:

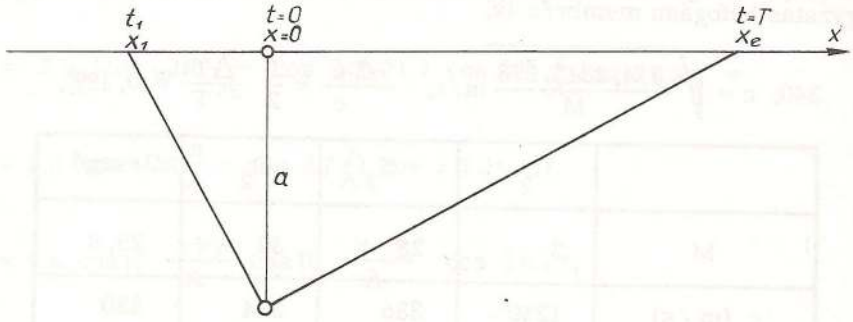
$$x = vt .$$

Egy $t < 0$ időben kibocsájtott hang fülbe érkezésének ideje

$$T = t + \frac{\sqrt{a^2+v^2t^2}}{c}.$$

Ennek minimuma

$$t_1 = -\frac{ac}{v\sqrt{v^2-c^2}}$$ időpontban van.



101. ábra

A lövedék ennek megfelelő helye $x_1 = vt_1$, ahonnan a hang

$$T = t_1 + \frac{\sqrt{a^2+v^2t_1^2}}{c} = \frac{a\sqrt{v^2-c^2}}{vc}$$

időpontban ér a megfigyelőhöz. Ugyanebben a pillanatban a lövedék az $x_2 = vT$ helyen van, amelynek távolsága az embertől

$$s = \sqrt{a^2+x_2^2} = a\frac{v}{c} = \underline{10\ \text{m}}.$$

2. módszer:

Az ember akkor hallja a fütyülést, amikor a golyó fejhulláma eléri (1. 102. ábra). Mivel a hangterjedés a hullámfrontra merőleges, a C pontból kiinduló hang ér legelőször A-ba. Ha ehhez t idő kell, akkor

$\overline{AC} = ct$, $\overline{BC} = vt$, és mivel

ABCΔ és OBAΔ hasonló háromszögek

$\overline{AB} : \overline{0A} = \overline{BC} : \overline{AC}.$

Innen $\overline{AB} = a\,\frac{v}{c} = \underline{10\ m.}$

345. $v = \frac{c}{\sin\alpha} = 680\ m/s.$

346. $w_o = 2\pi\ a\,\frac{c}{\lambda} = 4,71\ cm/s.\quad E = \frac{1}{2}\,m\,w_o^2 = 1,77\ erg.$

347. $E = 2,16 \cdot 10^6\ kp/cm^2.$

348. $Z = \varrho\ c.$ A 340. példa adatait felhasználva

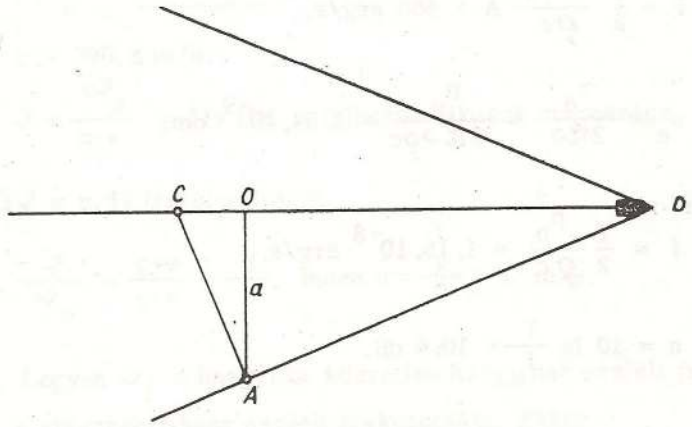
$$Z_{H_2} = 112\ N\ s/m^3, \qquad Z_{levegő} = 426\ N\ s/m^3.$$

349. A felületegység által lesugárzott teljesítmény

$$N = \frac{1}{2}\ Z\omega^2 s_o^2.$$

a) a levegő hullámellenállása normál állapotban $Z = 426\Omega$. Ekkor

$$S_o = \sqrt{\frac{2}{Z\omega^2} \cdot \frac{100\ W}{100\ cm^2}} = 2,2cm.$$



102. ábra

b) $Z = 1,4 \cdot 10^6 \Omega$; $S_o = 0,038$ cm.

350. $\nu_1 : \nu_1 : \nu_3 = 4:5:6$.

351. A diatónikus dur-akkordban a hangközök: 1:5(4:3)2 : 2, vagy egész számokkal kifejezve 4:5:6:8.

Ugyanez a temperált skálában $1 : \sqrt[12]{2^4} : \sqrt[12]{2^7} : 2 =$
$= 1:1,2599 : 1,4983:2$.

A százalékos eltérés a teremben $\frac{0,99}{1,25} = 0,79\%$, a kvintben $-\frac{1,07}{1,5} =$
$= -0,71\ \%$.

352. $i = 9/8$.

353. 254 Hz vagy 258 Hz.

354. $a = 19,54$ cm.

355. $\nu_k = k \frac{c}{2L}$, ahol $(k=1,2...)$. Ha a hang terjedési sebességét $c = 340$ m/s-nak vesszük, akkor az alapfrekvencia $\nu_1 = 100$ Hz.

356. $\nu_k = \frac{2k-1}{4} \frac{c}{L}$, $(k = 1,2,...)$. Az alaphang $c = 340$ m/s felvételével $\nu_1 = 50$ Hz.

357. $P = \frac{1}{2} \frac{p_o^2}{\rho c} A = 460$ erg/s.

358. $s_o = \frac{v_o}{2\pi\nu} = \frac{p_o}{2\pi\nu\rho c} = 1,84 \cdot 10^{-9}$ cm,

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_o^2}{\rho c} = 1,15 \cdot 10^{-8} \text{ erg/s},$$

$$n = 10 \lg \frac{I}{I_o} = 10,6 \text{ dB}.$$

359. $I = 20 \lg \frac{p}{p_o} = 120$ dB; $p = 6,3 . 10^{-2}$ din/cm^2.

360. $I \cong 8 . 10^{-10}$ W/cm^2 = 69 dB,

R = 28 km.

361. a) Az észlelés helyén az intenzitás

$$J = \frac{P}{4 r^2 \pi} .$$

Innen $P = 5 . 10^{-7}$ W.

b) $I = \varrho c A^2 \omega^2$, és $\Delta P_m = \varrho c A \omega$ összefüggések alapján

$A = 7,6 . 10^{-3}$ cm, és $\Delta p_m = 2 . 10^{-4}$ kp/cm^2

362. H = 40,4 fon.

363. x = 32 gép.

364. A hangutak különbsége:

$$\Delta s = d \sin 3^o = 0,00837 \text{ m}$$

Innen $\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \underline{2,46 . 10^{-5}}$ s .

365. c = 290,4 m/s.

366. $\nu = \frac{c\nu_o}{c-v}$ = 319 Hz. A felharmonikusok magassága

$\Delta\nu$ = n. 19 Hz-el változik.

367. $\frac{\nu}{\nu_o} = \frac{c+v}{c-v} = \frac{4}{3}$. Innen $v = \frac{c}{7}$ = 47 m/s.

368. Legyen ν_1 a hangvilla közvetlen hangjának észlelt frekvenciája, mig ν_2 a visszavert hang észlelt frekvenciája. Ekkor

$$\nu_1 = \frac{\nu_o c}{c+v}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu_o c}{c-v};$$

$$n = \nu_2 - \nu_1 = \frac{2\nu_o v}{c} = 9{,}3\,s^{-1}.$$

369. a) $\nu' = 552/s$ b) $\nu' = 551{,}7/s$ c) $\nu' = 552{,}2/s$.

370. $\nu = v_o \dfrac{c-v}{c+v}$.

A lebegés frekvenciája $\nu_\ell = \nu - \nu_o = \dfrac{2\nu_o v}{c+v}$;
innen $v = 562$ m/s.