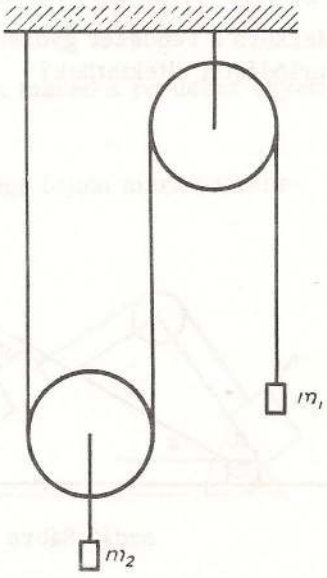
Pontrendszerek, merev testek

161. Csigán átvetett fonál egyik végén m_1 a másikon m_2 tömeg lóg. Mekkora lesz a rendszer gyorsulása? Mekkora a csigát felfüggesztő kötélben ébredő erő, ha a csiga sulyát elhanyagoljuk?

162. Surlódásmentes csigán átvetett fonálon egy 90 g és 110 g tömegu test függ. A nehezebb test a földfelszin felett 2 m-re van. Magára hagyva a rendszert, mennyi idő alatt ér le a nagyobb tömegü test a talajra? A csiga és a fonál tömegét elhagyagolhatjuk.

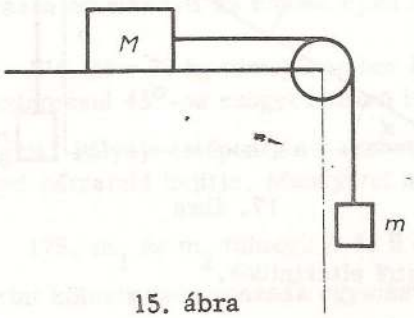
163. Mozgó csigára m_2 tömegü testet függesztünk. A mozgó csigát tartó fonál egyik végét állványhoz erősitjük, másik végét álló csigán átvezetve m_1 tömeghez kötjük. Határozzuk meg az m_1, ill. m_2 tömegek gyorsulását, valamint a fonalat feszitő erő nagyságát. A csigák és a fonál tömegétől, valamint a surlódástól eltekintünk.



14. ábra

164. r és r/2 sugaru, elhanyagolható tömegü hengerkeréken két egyenlő m tömegü test függ. Mekkora gyorsulással mozognak?

165. Elhanyagolható sulyu csigán átvetett fonál egyik végén m_1 = 3 kg tömegü teher, másik végén pedig egy másik sulytalan csiga függ. Az utóbbi csigán átvetett fonál egyik végén m_2 = 1 kg, másik végén m_3 = 2 kg tömegü teher függ. Mindkét csiga ellenállás nélkül forgatható. Mekkora gyorsulással mozog m_1?

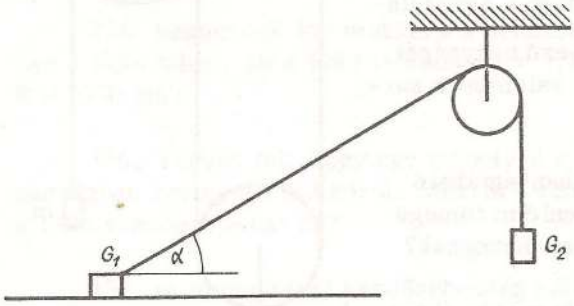


15. ábra

166. Surlódásmentes asztallapon fekvő M tömegü kocka elhanyagolható tömegü csigán keresztül, sulytalan fonállal egy fonálon függő m tömegü testtel van osszekötve (15. ábra). Mekkora gyorsulással mozog a rendszer, ha az M tömegü testet elengedjük? Mekkora erő fesziti a fonalat? Mekkora sebességre gyorsul fel az m tömegü test h szintkülönbséget megtéve?

167. Az asztal lapjára 2 kp sulyu testet helyezünk, melyet vizszintes irányban, csigán átvetett kötél huz. A kötél másik végén ugyancsak 2 kp sulyu test függ. Mennyi idő alatt tesz meg a test az asztal lapján 2 m-es utat, ha álló helyzetből indul és a surlódási tényező 0,2? Mekkora erő ébred a kötélben?

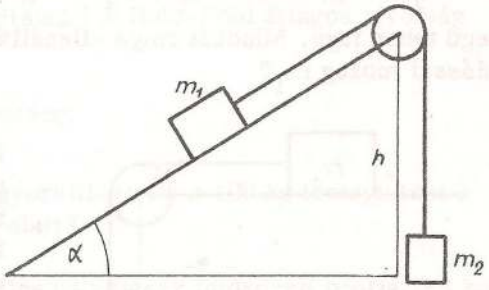
168. Sima vizszintes asztallapon fekszik egy m_3 = 8 kg tömegü test. Két végéhez fonalat erősitünk és egy-egy csigán átvetjük ugy, hogy a fonalaknak a csiga és a test közé eső része vizszintes vonalat alkosson. A lelógó fonálvégekre m_1 = 3 kg-os és m_2 = 5 kg-os tömegeket akasztunk. Mekkora a rendszer gyorsulása és mekkora a fonalakban ébredő erő, ha a surlódástól eltekintünk?



16. ábra

169. Vizszintes talajon G_1 = 40 kp sulyu láda fekszik, a surlódási együttható 0,2. Mekkora G_2 suly képes a ládát megmozditani a 16. ábrán látható elrendezésben? Mekkora pillanatnyi gyorsulással indulna el ilyen G_2 suly hatására a láda egy surlódásmentes vizszintes sikon? A csiga tömegét és a surlódását a számitásokban elhanyagolhatjuk.

170. $\alpha = 30^0$ hajlásszögü lejtőre helyezett m_1 = 3 kg tömegü testhez a lejtő tetején megerősitett csigán átvetett fonállal m_2 = 1 kg tömegü testet kötünk (17. ábra). Határozzuk meg a rendszer gyorsulását, valamint a fonalat feszitő erőt. Mekkora sebességet ér el a h = 0,2 m magasságu lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül induló test a lejtő alján? A csiga és a fonál tömegétől, valamint a surlódástól eltekintünk.



17. ábra

171. Az előző feladatban levő lejtőn a csuszó surlódási együttható μ.

a) Mekkora lehet a μ értéke, hogy az m_1, m_2 tömegekből álló rendszer gyorsuljon?

$$\frac{m_2}{m_1} = k = \frac{1}{3}$$

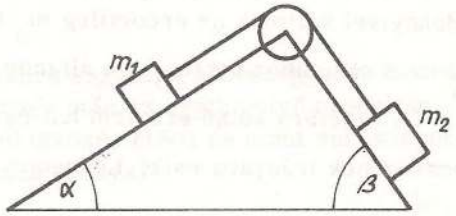
b) Adott μ és k esetén mekkora és milyen irányu az m_1 tömeg gyorsulása?

$$k = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{3}}{10} \quad \text{vagy} \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

c) $\mu = \frac{\sqrt{3}}{10}$ esetén k milyen értékei mellett marad a rendszer egyensulyban?

d) $\mu = \frac{11}{60}$ és $k = \frac{1}{2}$ esetén milyen hajlásszögü lejtőn marad a ráhelyezett test nyugalomban?

172. Kétoldalu lejtő felső pontjában rögzitett csigán átvetett fonál egyik végéhez kötött $m_1 = 2$ kg tömegü test az $\alpha = 30^o$, másik végéhez kötött $m_2 = 1$ kg tömegü test a $\beta = 45^o$ hajlásszögü lejtőn fekszik. (18. ábra.) Határozzuk meg a gyorsulást és a fonalat feszitő erőt, ha a surlódástól és a csiga tömegétől eltekintünk.



18. ábra

173. M = 70 kg tömegü ember $v_o = 5$ m/s kezdősebességgel függőlegesen felugrik. Pályája tetőpontján egy m = 10 kg tömegü követ ledob a földhöz képest u = 14 m/s függőleges irányu kezdősebességgel. Milyen magasra emelkedett az ember ilyen módon?

174. M = 70 kg tömegü ember kezében m = 10 kg tömegü teherrel a vizszintessel 45°-os szöget bezáró irányban $v_o = 7$ m/s kezdősebességgel felugrik. Pályája tetőpontján a terhet vizszintes u = 8 m/s relativ sebességgel hátrafelé hajitja. Mennyivel nagyobb távolságra ugrik ily módon?

175. m_1 és m_2 tömegü A és B szabad anyagi pontok Newton törvénye szerint kölcsönösen vonzzák egymást. A kezdő időpontban az A pont sebes-

sége v_1 és AB-re merőleges, B pont sebessége v_2, AB irányu és A-tól elfelé mutat. Határozzuk meg a pontok sulypontjának pályáját és sebességét.

176. Egy ℓ hosszuságu M tömegü, a vizhez képest nyugvó csónak egyik végén m tomegü ember áll, majd átmegy a csónak másik végébe. Elhanyagolva a viz ellenállását számitsuk ki, mennyit mozdul el ezalatt a csónak.

177. Egy surlódásmentes asztalon α hajlásszögü ℓ hosszuságu M tomegü lejtő van. A lejtő tetején m tomegü test van. Mekkora távolságra mozdul el a lejtő azalatt mig a test a lejtő aljára csuszik le?

178. 1000 m magasságban lebegő léggömbről 80 kg-os bombát ejtenek le. A bomba függőlegesen zuhan lefelé. 600 m esés után felrobban, és két darabban szétrepul. Az egyik darab tömege 30 kg, és a robbanás helyétől vizszintesen 200 m/s sebességgel indul el. Hol ütközik a talajba a másik darab?

179. A rakétát a hajtómuból folytonosan kiáramló gáz gyorsitja. Mennyivel változik az eredetileg m_o tömegu rakéta sebessége, ha a rakétából a rakétához viszonyitva állandó u sebességgel m_1 tömegü gáz áramlott ki. (A rakétára külső erő nem hat és az u sebesség iránya a rakéta v sebességének irányába esik. Legyen $m_1 = \frac{1}{2} m_o$.)

180. Mekkora sebességet érhet el a rakéta, ha az üzemanyag a rakéta osztomegének k = 0,75-szerese és a kiáramló gáz a rakétához viszonyitott állandó u = 2000 m/s sebességgel hagyja el a rakétát?

181. Állócsigán kötelet vetünk át. A földön, a kötél két végénél egy-egy ember áll. Mindegyik rákapaszkodik a kötélre a csiga tengelyétől egyenlő függőleges távolságban, és adott jelre elkezdenek felfelé mászni.

a) Mutassuk meg, hogy ha tömegük egyenlő, akkor minden körülmények között egyszerre érnek fel a csigához, ha a csiga tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolhatóan kicsi.

b) Mekkora a csiga szögsebessége, ha az egyik ember v_1, a másik v_2 sebességgel mászik felfelé a kötélhez képest?

182. Vizszintes tengelyü csigán átvetett kötél végén m_1 és m_2 tömegü ember kapaszkodik. Kezdetben a csiga tengelyén átmenő vizszintes sikból b_1, ill. b_2 távolságra vannak, majd felfelé kezdenek kuszni, és a csigát

egyidőben érik el. A csiga tömegét és az összes ellenállást elhanyagoljuk. Az elindulástól számítva mennyi idő alatt érik el a csigát?

183. Két rugalmatlan test egymással szemben vízszintes síkon mozog. Az egyik test tömege 5 kg, sebessége 6 m/s; a másiké 7 kg, illetve 4 m/s, ütközés után mekkora lesz a közös sebességük? (Centrális ütközést tételezünk fel.)

184. Vízszintes síkon 1 kg tömegű 2 m/s sebességű golyót utolér egy 2 kg tömegű 4 m/s sebességű golyó. Rugalmasan ütköznek. Mekkorák lesznek az ütközés utáni sebességek?

185. Valamely m_1 tömegű test rugalmatlanul ütközik egy m_2 tömegű testtel. Határozzuk meg hányadrésze vész el a kinetikus energiának, ha az m_2 tömegű test az ütközés előtt nyugalomban volt.

186. 20 és 36 dkg tömegű golyók egymással szemben mozognak. Az első golyó sebessége az ütközés előtt 8 m/s. Az ütközés rugalmatlan. Mekkora volt a másik golyó sebessége, ha az ütközés után mindkét golyó megáll?

187. Két rugalmas golyó ugyanakkora nagyságú sebességgel halad egymás felé vízszintes egyenesen. Ütközés után az egyik golyó nyugalomban marad. Mekkora lesz a másik golyó ütközés előtti és utáni sebességeinek aránya? Mekkora a golyók tömegeinek aránya?

188. Határozzuk meg a v sebességgel mozgó test mozgási energiájának és impulzusának változását, ha a test rugalmasan ütközik egy olyan falba, mely u sebességgel egyenletesen mozog ugyanabban az irányban, mint a test.

189. m_1, m_2, m_3 tömegű és közös egyenesen elhelyezkedő három tökéletesen rugalmas golyó kezdetben nyugalomban van. Az első golyót az egyenes irányában c_1 sebességgel elinditjuk. Ez ütközés révén mozgásba hozza a másik golyót, emez pedig a harmadikat. Legyen v_3 a harmadik golyó ütközés utáni sebessége. Adott m_1, m_3 és c_1 értékek mellett, mekkora m_2 mellett veszi fel v_3 a legnagyobb értékét?

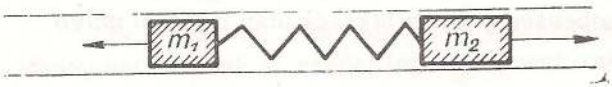
190. Vízszintes terepen utkereszteződésnél derékszög alatt összeütközött két gépkocsi. Az ütközés után befékezve együtt csúsztak ugy, hogy közös tömegközéppontjuk 8,95 m utat tett meg a két kocsi haladási irányához képest 45° alatt. A kocsik tömege 2000 kg, ill. 1000 kg. A surlódási

tényező a kocsikerekek és az aszfalt között 0,5. Mekkora volt a kocsik sebessége közvetlenül az ütközés előtt és mekkora a deformációs munka?

191. Lövedékek sebességének mérésére az un. ballisztikus ingát használják. A homokkal töltött 100 kg tömegű inga 20 dkg-os lövedék becsapódása után 10°-kal kilendül. Mekkora a lövedék sebessége? Az inga sulypontjának a felfüggesztési ponttól való távolsága 2 m.

192. Egy gyermek mozdulatlan hintán ül és vizszintes irányban egy m = 12 kg tömegű téglát v_1 = m/s sebességgel pillanatszerűen elhajit. Erre a hinta kilendül. Hány fok lesz a kitérése, ha a hintát fonálingának tekintjük, az ülés és a gyermek tömege együtt M = 40 kg, a hinta kötele R = 2 m hosszu? (A veszteségeket elhanyagoljuk.)

193. Egy összenyomott rugó hirtelen szétdob két henger alaku tömeget egymással ellentétes irányban. A tömegek nagysága m_1 = 120 g és m_2 = 300 g. Mekkora sebességgel haladnak ezek a (19. ábrán) vázolt csőben, ha az összenyomott rugó helyzeti energiája 0,5 mkp volt. Hogyan módosul az eredmény, ha m_1-t, vagy m_2-t, a csőben rögzitjük?

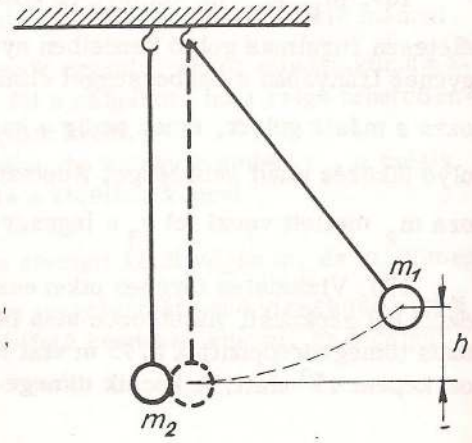


19. ábra

194. Két egyenlő tömegű golyót ugyanolyan magasságban függesztünk fel egy-egy ℓ hosszuságu zsinegre. Mekkora szöggel kell az m_1 tömegű golyót felemelni, azután magára hagyni, hogy az m_2 tömegű golyó ütközés után 40°-kal emelkedjék fel.

1. ha az ütközés teljesen rugalmas,
2. ha az ütközés teljesen rugalmatlan?

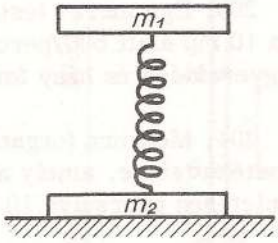
195. Két egyenlő magasságban felfüggesztett rugalmas golyó (20. ábra) közül az egyiknek tömege m_1 kétszer akkora, mint a másik m_2 tömeg. A nehezebb golyót h magasságra a fonalak sikjában kimozditjuk, majd elengedjük. Ütközés után mekkora h_1 és h_2 magasságot érnek el a golyók?



20. ábra

196. Két egyforma, ℓ nyugalmi hosszuságu rugó egy-egy végét rögzitjük, majd a szabad rugóvégekre m = 5 dkg tömegü anyagi pontokat helyezünk ugy, hogy éppen érintkezzenek. A mozgás teljesen sima vizszinte sikon történik. Az egyik rugót $\Delta \ell$ = 10 cm-rel összenyomjuk, majd elengedjük. A két tömegpont teljesen rugalmatlan ütközése után milyen amplitudóval és frekvenciával végeznek harmonikus rezgőmozgást. A rugóállandó D = 0,4 dkpond/cm.

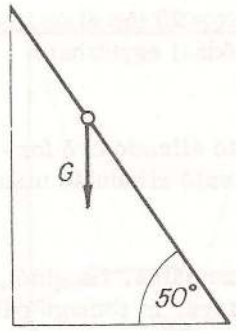
197. Két, m_1 és m_2 tömegü lemezt rugóval kapcsolunk egymáshoz (21. ábra). Mekkora erővel kell nyomni a felső lemezt, hogy az erőhatás megszünte után a felső lemez felugorva, az alsót is felemelje? A rugó tömegét ne vegyük tekintetbe.



21. ábra

198. Egy homogén rud sulya G. Egyik végén átmenő vizszintes tengely körül elforoghat, a másik végén G sulyu teher lóg. A rudat geometriai középpontjában ható G nagyságu vizszintes erővel huzzuk. Mekkora a rud függőlegesen alkotott szöge egyensuly esetén?

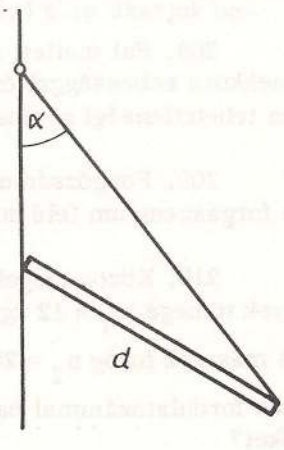
199. Egy 4 m hosszu létrát függőleges falhoz támasztunk ugy, hogy a vizszintes talajjal 50°-os szöget zár be (22. ábra). A létra és a talaj közötti surlódási együttható 0,3. A fal surlódásmentes. Ha valaki a létrára mászik, milyen magasra jut, mielőtt a létra megcsuszik? (A létra tömegét hanyagoljuk el.)



22. ábra

200. Rud egyik végét fonállal falhoz erősitjük, másik végét az érdes falhoz támasztjuk. Egyensuly esetén a fonál a fallal α szöget zár be (23. ábra). Mekkora erő fesziti a fonalat és legalább mekkora μ_o nyugalmi surlódási együttható esetén jöhet létre az egyensuly, ha $\frac{d}{\ell} = \frac{3}{4}$ és

a) $\alpha = 45^o$
b) $\alpha = 30^o$.



23. ábra

201. Jármü lapos, sik felületén láda áll, melynek hátracsuszását a rakfelülethez erősitett léc megakadályozza. Mekkora gyorsulással mozoghat a jármü, hogy a láda a lécnek támaszkodó éle körül föl ne billenjen? A láda oldallapjának vizszintes éle b, és a láda sulypontjának magassága h.

202. Merev test egyenletesen gyorsuló forgó mozgást végez. Szögsebessége 2 mp alatt ω_0 = 0-ról ω = 10 s^{-1}-re változik. Mekkora a szöggyorsulása? Mekkora a szögelfordulása 2 mp alatt? Mekkora a kerületi gyorsulása a tengelytől 20 cm távolságra levő tömegpontnak?

203. Egy merev test nyugalmi helyzetből indul és egyenletesen gyorsulva 10 mp alatt 600/perc pillanatnyi fordulatszámot ér el. Mekkora a szöggyorsulása és hány fordulatot tesz meg 10 mp alatt?

204. Mekkora forgatónyomaték hat arra a 100 kgm^2 tehetetlenségi nyomatéku testre, amely nyugalomból indulva a forgatónyomaték hatására egyenletesen gyorsulva 10 mp alatt 50 fordulatot tesz meg?

205. Mekkora szögsebességet ér el egy 20 kg tömegü, és 60 cm átmérőjü lenditőkerék, amelyre 12 másodpercig 0,6 kpm forgatónyomaték hatott?

206. m = 50 kg tömegü r = 50 cm sugaru korong $\omega = \frac{10}{s}$ szögsebességgel forog. Mekkora sugárirányu erővel lehet a korongot t = 20 mp alatt lefékezni, ha a korong pereme és a féktuskó között a surlódási együttható μ = 0,5 ?

207. M tömegü és R sugaru korongot kerületén ható állandó erő forgat. Mekkora a szöggyorsulás és a nyugalmi helyzetből való elindulás után eltelt idő alatt hány fordulatot tesz meg a korong?

208. Fal mellett függőlegesen áll egy 2,5 m hosszu pálca. Ha eldől, mekkora sebességgel ér végpontja a földre? (ℓ hosszuságu, m tömegü pálca tehetetlenségi nyomatéka 1/3 m ℓ^2.)

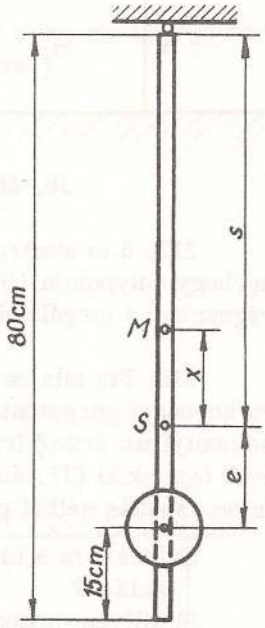
209. Forgózsámolyon ülő kisérleti személy a kezében tartott sulyzót a forgáscentrum felé huzza. Változik-e és hogyan a rendszer energiája?

210. Közös tengely körül szabadon foroghat két tömör lendkerék, amelyek tömege m_1 = 12 kg, és m_2 = 8 kg, átmérője d_1 = 60 cm, és d_2 = 40 cm. A második forog n_2 = 200/perc fordulatszámmal, az első áll. Mekkora közös fordulatszámmal haladnak, ha hirtelen egymással összekapcsoljuk őket?

211. Mekkora a lengésideje egy 80 cm hosszu homogén pálcának, ha ez a felső vége alatt 20 cm-re fekvő tengely körül mint fizikai inga leng?

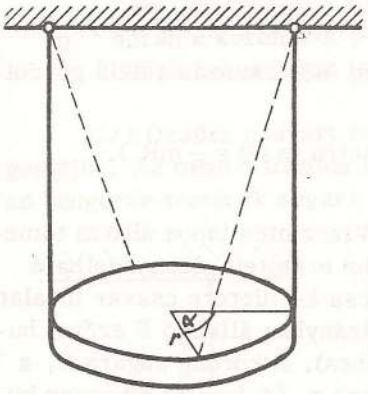
212. Egy homogén tömegeloszlásu korong kerületének egy pontja körül függőleges sikjában 0,5 s lengésidővel kis tágasságu lengéseket végez. Mekkora az átmérője?

213. Mekkora a lengésideje a (24. ábrán) megadott óraingának? Az ingalencse tömegét vegyük pontszerünek, és 500 g-nak, a tartólécét pedig 200 g-nak.



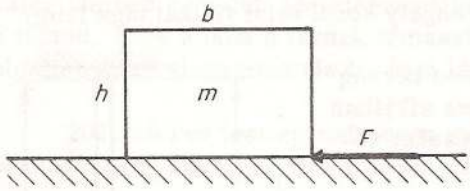
24. ábra

214. Egy órainga homogén, ℓ hosszuságu, m tömegü, vékony, merev rudból és a rud végéhez erősitett r sugaru, M tömegü tömör, homogén, körhenger alaku korongból áll. Mekkora hibát követünk el akkor, ha lengésidejét ugy számitjuk ki, mintha $\ell + r$ hosszuságu matematikai inga volna? Legyen $\ell = 1$ m, r = 1 cm, m = 6 g, M = 40 g. Ezek mellett az adatok mellett a korong sugarának elhanyagolása vagy a rud tömegének elhanyagolása okoz-e nagyobb hibát?



25. ábra

215. Egy tömör homogén korongot valamelyik átmérőjének két végpontjánál egy-egy egyenlő hosszu fonállal a (25. ábra) szerint felfüggesztjük, majd vizszintes sikjában torziós lengésbe hozzuk. Milyen hosszuak legyenek a függesztőfonalak, ha a lengésidőt 0,4 s-ra akarjuk beállitani?

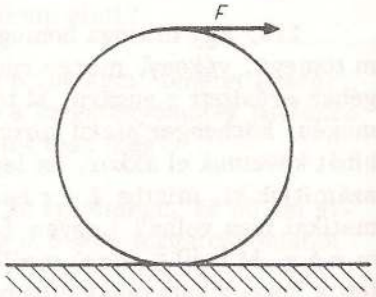


26. ábra

216. Egy hasábot, amelynek tömege m és oldallapjának élei a, ill. b, a talajon fekvő élére merőlegesen ható F erővel gyorsitunk. (26. ábra) Mekkora F erőhatás mellett nem billen még fel a kocka, ha a surlódás elhanyagolható? Mekkora lenne ez az erő μ surlódási tényező esetén?

217. 3 m sugaru, 13 tonna sulyu üres acélhenger gördül sik padlón, ugyhogy sulypontja 10,8 m/perc sebességgel halad. Mekkora munkát kell végeznünk a megállitásához?

218. Sik talajon m tömegü R sugaru korongot görgetünk ugy, hogy legfelső pontjában érintő irányu állandó F erőt fejtünk ki (27. ábra). A korong a talajon csuszás nélkül gördül.



27. ábra

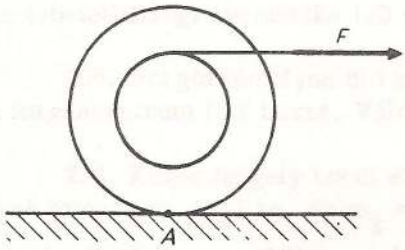
a) Mekkora a tömegközéppont gyorsulása?

b) Milyen módon nyilvánul meg a surlódási erő hatása a tömegközéppont gyorsitásánál?

c) A korong és a talaj között a nyugalmi surlódási együttható μ_0. Mekkora lehet az F erő, hogy a korong még csuszás nélkül gördüljön?

d) Oldjuk meg a feladatot tömör golyó esetén is ($\Theta = \frac{2}{5} mR^2$).

219. Vizszintes lapon álló m tömegü koronghoz erősitett elhanyagolható tömegü tárcsa kerületére csavar fonalat vizszintes irányban állandó F erővel huzunk (28. ábra). A korong sugara R, a tárcsa sugara r. (A fonalat a korong középpontja fölött huzzuk.)



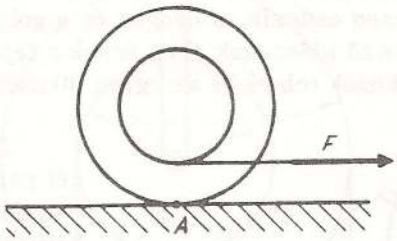
28. ábra

a) Mekkora gyorsulással mozog a korong középpontja?

b) Mi a talaj és a korong között fellépő surlódási erő szerepe a korong középpontjának gyorsitásánál?

c) Mekkora μ_0 surlódási együttható szükséges ahhoz, hogy a korong a talajon csuszás nélkül gördülhessen?

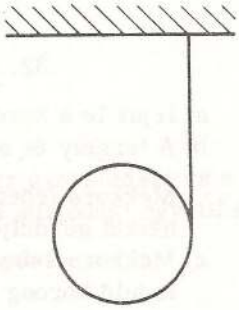
220. Oldjuk meg az előző feladatot, ha a fonalat a korong középpontja alatt huzzuk a talaj sikjával párhuzamosan! (29. ábra.)



29. ábra

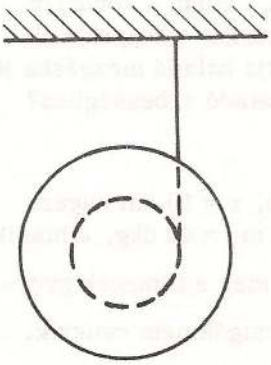
221. R sugaru m tömegü korong kerületére csavart fonál végét rögzitjük és a korongot elengedjük. (30. ábra.)

a) Irjuk leg a korong mozgását!
b) Mekkora a korong szögsebessége és középpontjának v sebessége, ha a korong kezdősebesség nélkül indult és mozgása során a korongról ℓ hosszuságu fonaldarab csavarodott le?



30. ábra

222. Orsóra csavart fonál végét felfüggesztjük. Az orsó a fonalon lecsavarodik. Az orsó hengeres testének sugara r, tömege a tárcsák tömegéhez képest elhanyagolható. A két tárcsa sugara R, együttes tömegük m (31. ábra). Irjuk le az orsó mozgását, és határozzuk meg a fonalat feszitő erőt! Legyen R = 2 r.

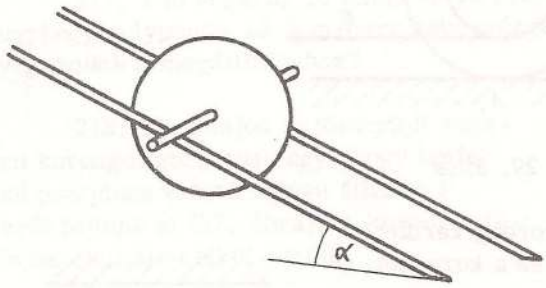


31. ábra

223. Egy m tömegü, r sugaru vékony falu cső α hajlásszögü lejtőn gurul lefelé. Mennyi lesz tengelyének a sebessége, ha a lejtőn az elindulástól számitva s utat tett meg? Mennyi idő alatt teszi meg a tengely ezt a távolságot?

224. Két egyenlő méretü és tömegü hengert, melyek közül az egyiknek a tömege tulnyomóan a forgástengelyhez közel, a másiknak pedig a kerületén van elhelyezve, egy lejtőn engedünk legurulni. Melyik ér le hamarabb a lejtő aljára?

225. A vizszintessel 30°-os szöget képező 5 m magasságu lejtőn egyidejüleg kezdősebesség nélkül elinditunk egy hasábot, egy hengert és golyót. A hasáb surlódásmentesen csuszik, a henger és a golyó surlódásmentesen gördül. A testek különböző időszakok alatt érnek a lejtő aljára, ahol lécbe ütköznek. Mekkora időközök telnek el az egyes ütközések között?



32. ábra

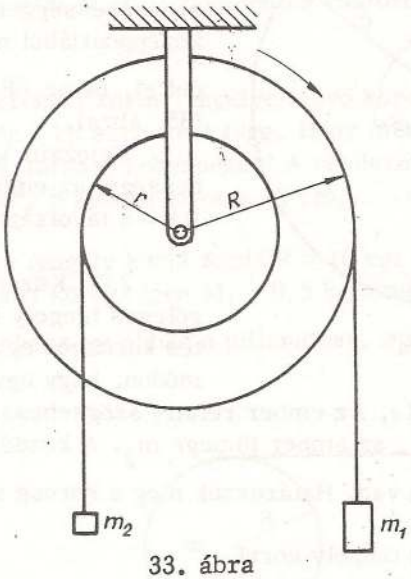
226. Lejtősen állitott két párhuzamos sin közé tengellyel ellátott korongot helyezünk (32. ábra). A tengely a sineken csuszás nélkül gördül. A korong sugara R, tömege m. A tengely sugara r, tömege a korong tömegéhez képest elhanyagolható.

a) Irjuk le a korong mozgását.
b) A tengely és a sinek között a nyugalmi surlódási együttható μ_o. Mekkora lehet a lejtő hajlásszöge, hogy a korong még csuszás nélkül gördüljön?
c) Mekkora sebességet ér el a h magasságból kezdősebesség nélkül induló korong a lejtő alján? Legyen R = kr.

227. Tengely körül forgatható korongot (pl. kerékpár kerék) tengelye körül ω_o szögsebességgel forgásba hozunk. A tengelyét vizszintes helyzetben tartjuk ugy, hogy a kerék a talajt nem érinti. Ezután a korongot óvatosan a vizszintes talajra engedjük, a talajra éréskor a tengelyt elengedjük. A korong a talajon gurul, tömegközéppontja haladó mozgásba jön. Magyarázzuk meg mi módon jut a tömegközéppont haladó sebességhez? Mekkora v sebességet érhet el a tömegközéppont?

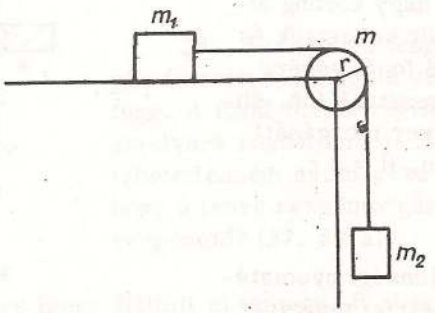
228. $\Theta = 0,55$ dkgm^2 tehetetlenségi nyomatéku, r = 10 cm sugaru állócsigán kötelet vetünk át, amelynek egyik végére m_1 = 40 dkg, a másik végére m_2 = 10 dkg tömeget helyezünk. Határozzuk meg a tömegek gyorsulását, és a kötélerőt feltételezve, hogy a kötél a csigán nem csuszik.

229. A (33. ábrán) feltüntetett Θ tehetetlenségi nyomatéku lépcsős csiga két kötelére M_1 és m_2 tömegü sulyokat függesztünk. Határozzuk meg a csiga szöggyorsulását, és a kötélágakban ébredő erőket.



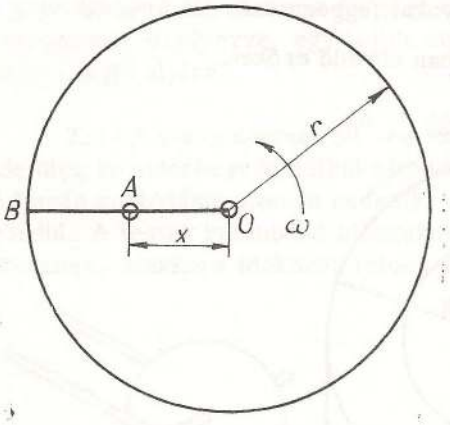
33. ábra

230. Számitsuk ki a (34. ábrán) látható rendszer gyorsulását és a fonálfeszitő erőket, ha az m_1 tömegre vonatkozólag a surlódási együttható μ. Mekkora minimális m_2 értéknél indul meg a mozgás?



34. ábra

231. m_1 tömegü, r sugaru vizszintes lemez 0 középpontján átmenő függőleges tengely körül ω_0 kezdő szögsebességgel forog. A lemez 0 középpontjából m_2 tömegü ember indul el, és az 0B sugár mentén halad (35. ábra).

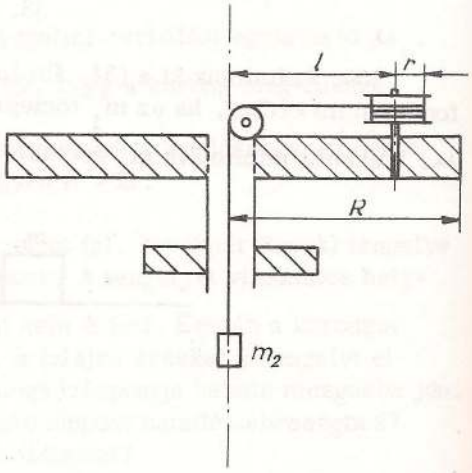


35. ábra

Fejezzük ki a lemez ω szögsebességét az ember helyzetének (az 0A = x távolságnak) függvényében.

232. Középpontján átmenő függőleges tengely körül forgó vizszintes korongon egy ember halad oly módon, hogy ugyanazon tengely körül r sugaru körpályát ir le. Az ember relativ szögsebessége ω, a korong tömege m_1, sugara r_1, az ember tömege m_2. A kezdő időpontban az egész rendszer nyugalomban van. Határozzuk meg a korong szögsebességét.

233. Függőleges tengely körül forgatható m_2 tömegü korong középpontjától ℓ távolságra levő pontjában át van furva. A furatba r sugaru m_1 tömegü korong helyezhető forgathatóan. A kis korong kerületére csavart fonal szabad végét a nagy korong átfurt tengelyén vezetjük keresztük és a függőlegesen lelógó fonál végére m tömegü testet függesztünk (36. ábra). Irjuk le a rendszer mozgását! (Legyen $m_1 = m_2 = m$, $R = 3\,r$, $\ell = 2\,r$.)



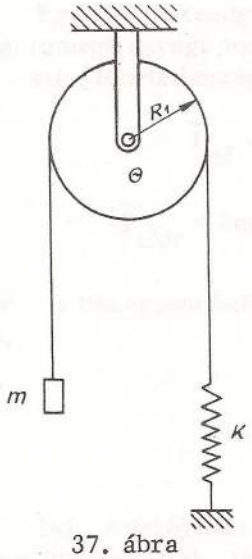
36. ábra

234. Θ tehetetlenségi nyomatéku, függőleges geometriai tengelye körül forgó homogén körkup alkotója mentén kivájt keskeny csatornában - annak legfelső pontjából kezdősebesség nélkül induló - m tömegü golyó gurul le. A golyó indulása pillanatában a kup kezdő szögsebessége ω_0. Az indulás pillanatában a rendszert magára hagyjuk. Minden ellenállás elhanyagolható. Mekkora a kup szögsebessége, amikor a golyó elhagyja a csatornát?

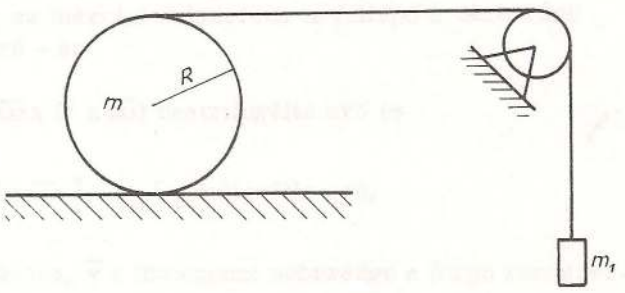
235. m tömegü, függőleges tengely körül surlódás nélkül forgó korong kerületén m_1 tömegü pontszerü test van rögzitve. A rendszer ω szögsebességgel forog. Mekkora munka árán lehet az m_1 tömegpontot a forgástengelyhez hozni. (A tömegpontot pl. surlódásmentes csatornában huzzuk a centrum felé.)

236. Lenditőkerékkel közös tengelyen levő korongra fonalat csavarunk, amelynek végén 1 kp sulyu test függ. Hány méter süllyedés után ér el a korong 60 ford/s forgási sebességet? A rendszer tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 0,42$ kgm^2, a korong sugara 10 cm.

237. Vizszintes tengely körül forgó R = 10 cm sugaru, M = 0,5 kg tömegü korongra tekert kötél végén $M_1 = 0,5$ kg tömegü teher függ. Mekkora a korong szögsebessége abban a pillanatban, amikor a teher 2 méter mélyre süllyedt?



37. ábra



38. ábra

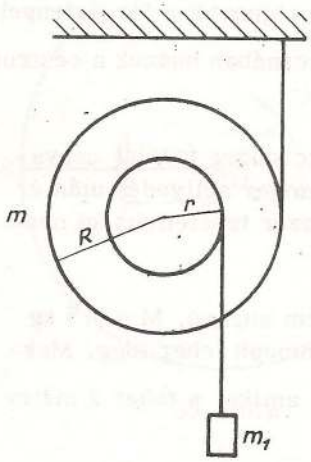
238. Vizszintes tengely körül forgó csigán átvetett fonál egyik végén m tömegü teher függ. A fonál másik végén rugóhoz csatlakozik, amelynek rugóállandója D. A csiga sugara R_1, tehetetlenségi nyomagéka Θ. Mutassuk ki, hogy a teher rezgőmozgást végez. Mekkora a rezgésidő? (37. ábra.)

239. Vizszintes lapra állitott m tömegü, R sugaru korong kerületére csavart fonalat állócsigán vetünk keresztül és a fonál végére m_1 tömegü testet függesztünk. A korong a lapon csuszás nélkül gördül. (A fonal és az állócsiga tömegétől, valamint a gördülési ellenállástól eltekintünk, a fonálnak a korong és az állócsiga közé eső szakasza vizszintes (38. ábra).

a) Irjuk le a korong mozgását!

b) A korong és a lap között a nyugalmi surlódás együtthatója μ_0.

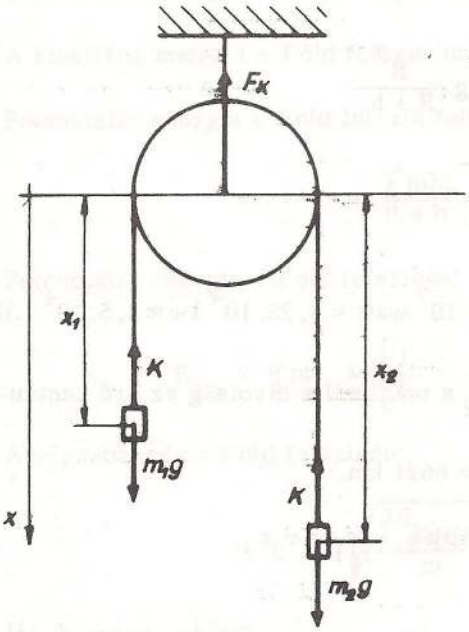
Mekkora lehet az m_1, hogy a korong még csuszás nélkül gördüljön?



39. ábra

240. R sugaru m tömegü korong kerületére csavart fonál szabad végét felfüggesztjük. A koronghoz erősitett elhanyagolható tömegü r sugaru tárcsa kerületére csavart fonál végére m_1 tömegü testet függesztünk (mindkét fonál a korong középpontjának ugyanazon oldalán van). A rendszer függőleges sikban mozoghat. Irjuk le a rendszer mozgásátl (39. ábra.) Legyen $R = 2\,r$, $m = 4\,m_1$.

MEGOLDÁSOK



65. ábra

161. 1. Megoldás. Alkalmazzuk a tömegközéppont tételét a csigából és két tömegből álló rendszerre. (65. ábra.) Mivel a tömegközéppont lefelé gyorsul az F_k erő kisebb lesz, mint a sulyok összege:

$$(m_1 + m_2)\, a_s = m_1 g + m_2 g - F_k ,$$

ahol a_s a tömegközéppont gyorsulása:

$$a_s = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} .$$

A kötél rögzitett hossza miatt $a_1 = -a_2 = a$, ezért

$$(m_1 - m_2)\, a = m_1 g + m_2 g - F_k ,$$

$$F_k = (m_1 + m_2)\, g - (m_1 - m_2)\, a .$$

A felfüggesztő erő ismeretéhez szükséges a gyorsulás ismerete. Mivel a csiga tömege elhanyagolható, a csiga csak arra szolgál, hogy a

tömegek gyorsulását ellentétessé változtassa, a gyorsulás nagyságára nincs befolyással. Ezért a két tömeg mozgását egyirányunak tekinthetjük, azaz a függőleges fonalat vízszintes helyzetbe hozhatjuk és az együttes $m_1 + m_2$ tömegnek a két ellentétessé váló m_1g, m_2g erők hatására létrejövő mozgását vizsgálhatjuk. Ekkor, mivel $a_1 = a$, a bal oldali irány pozitív, azaz

$$(m_1+m_2)\, a = m_1g - m_2g\,,$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g\,.$$

A gyorsulás behelyettesitésével:

$$F_k = \frac{4\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, g$$

2. Megoldás: A csigát felfüggesztő erő a fonálban fellépő kényszererők összege. A kényszererőket megkapjuk, ha mindkét tömegre külön-külön felirjuk a mozgásegyenletet. A K kényszererők egyenlők, mert a csiga forgatásához nem kell erő, az elhanyagolható tömeg miatt.

$$m_1a_1 = m_1g - K\,,$$

$$m_2a_2 = m_2g - K\,,$$

$$a_1 = -a_2 = a \text{ mert } x_1 + x_2 = \text{const};\ (x_1+x_2 = 0).$$

Tehát

$$m_1\left(\frac{K}{m_2} - g\right) = m_1g - K,$$

$$K = \frac{2m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, g, \quad \text{és } F_K = 2\,K\,.$$

3. Megoldás. Legyen a csiga forgási iránya az óramutató járásával ellentétesen pozitív, akkor a kötélerő a bal oldali ágban

$$m_1g - m_1a = K,$$

vagy a jobb oldali ágban: $m_2g + m_2a = K$.

Ha a csiga forgása azonos az óramutató járásával, akkor a negativ. K ismeretéhez a gyorsulást kell ismerni, amelyet az energiatétellel számitunk ki. Az energiatétel alkalmazható, mert a kötél által létesitett kényszererő időtől független. Egyéb belső erő nincsen, csak külső erő,annak pedig van potenciálja, ezért:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = \text{const} ,$$

differenciálva:

$$m_1 v_1 a_1 + m_2 v_2 a_2 - m_1 g v_1 - m_2 g v_2 = 0.$$

$x_1 + x_2 = \text{const}$-ből következik, hogy $v_1 = -v_2$ és $a_1 = -a_2 = a$,

tehát

$$m_1 a + m_2 a - m_1 g + m_2 g = 0,$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{és ismét} \quad F_K = 2K = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g .$$

4. Megoldás. Alkalmazzuk a kinetikai energia tételt arra az esetre miközben h utat tesz meg lefelé az m_1 tömegü test. Az összes erő munkájából a kötélerő munkája kiesik, mert a két test elmozdulása ellentétes. (Időtől független kényszererők esetében mindig igaz az, hogy a kényszererők összes munkája zérus)

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = m_1 g h - m_2 g h ,$$

$$v = \sqrt{2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g h} ,$$

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g .$$

A továbbiakban az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk el.

162. Alkalmazzuk az energia tételt az indulás és a beérkezés pillanatára. A végsebesség és az ut ismeretével az idő kiszámitható.

Határozzuk meg a gyorsulást az előző példa első vagy második megoldása alapján. A gyorsulás és az ut ismeretében az idő kiszámitható.

$$t = \frac{2\,h\,(m_2 + m_1)}{(m_2 - m_1)\,g} = 2{,}02 \text{ s.}$$

163. 1. Megoldás. Irjuk fel mindkét tömegpont mozgásegyenletét (66. ábra):

$$m_1 a_1 = m_1 g - K\,,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - 2\,K\,.$$

A kötélerők azonosak a csigák elhanyagolható tömege miatt.

A fonál rögzitett hossza miatti kényszer:

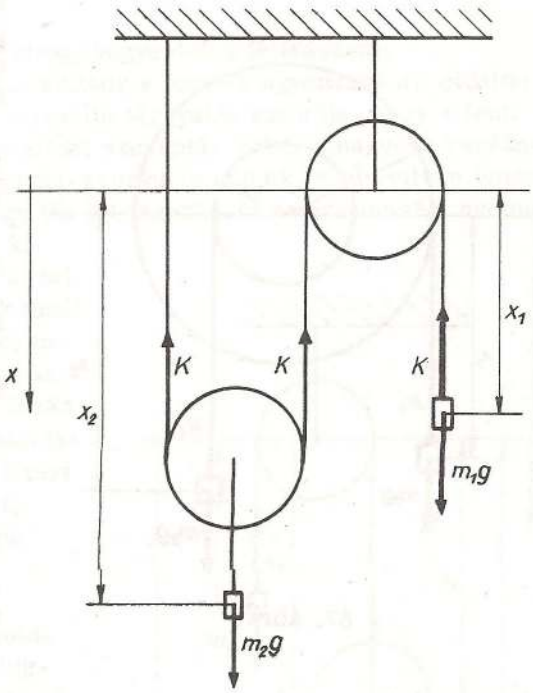
$$2x_2 + x_1 = \text{const, azaz}$$

differenciálással $a_2 = -\frac{a_1}{2}$.

Tehát

$$a_1 = \frac{4\,m_1 - 2\,m_2}{4\,m_1 + m_2}\,g \quad \text{és}$$

$$K = \frac{3\,m_1 m_2}{4\,m_1 + m_2}\,g\,.$$



66. ábra

2. Megoldás.

Alkalmazzuk az energia tételt (a kényszer időtől független).

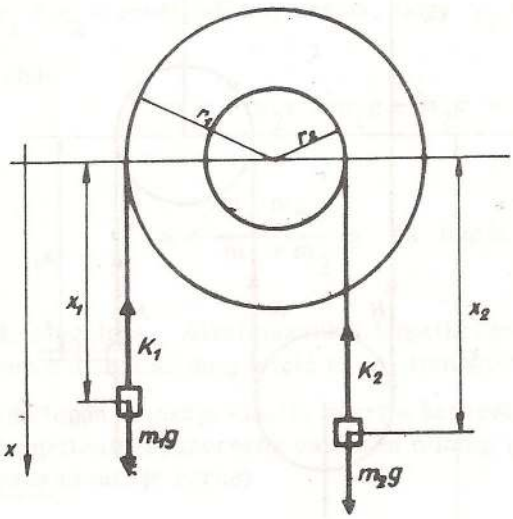
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = \text{const.}$$

Differenciálva és figyelembe véve, hogy $v_2 = -\frac{v_1}{2}$ és

$$a_2 = -\frac{a_1}{2},$$

a gyorsulás kiszámitható. A továbbiakban a kötélerőt annak figyelembevételével számolhatjuk, hogy felfelé gyorsuló test "sulya" növekszik, a lefelé gyorsulóé csökken.

164. A kényszererő időtől független (a fonál nem nyulik meg) ezért alkalmazhatjuk az energia tételt.(A kényszererő meghatározása most nem szükséges) (67. ábra.) A hengerkerék tömege elhanyagolható és csak külső erő van a fonálerőn kivül, ezért



67. ábra

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = \text{const.}$$

Idő szerint differenciálva

$$m_1 v_1 a_1 + m_2 v_2 a_2 - m_1 g v_1 - m_2 g v_2 = 0.$$

A közös tengelyen való együttes forgás miatt, mivel a sebességek ellentétes irányuak

$$\frac{v_1}{r_1} = -\frac{v_2}{r_2}, \qquad \text{ebből} \qquad \frac{a_1}{r_1} = -\frac{a_2}{r_2},$$

$$m_1 v_1 a_1 + m_2 \frac{r_2}{r_1} v_1 \frac{r_2}{r_1} a_1 - m_1 g v_1 + m_2 g \frac{r_2}{r_1} v_1 = 0.$$

v_1-el egyszerüsitve

$$a_1 = r_1 \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} g \qquad a_2 = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} g.$$

Ha $m_1 = m_2$ és $r_2 = \frac{r_1}{2}$, akkor

$$a_1 = \frac{2}{5} g, \quad a_2 = -\frac{1}{5} g.$$

3. Megoldás

Oldjuk meg a feladatot a kinetikai energiatétellel.

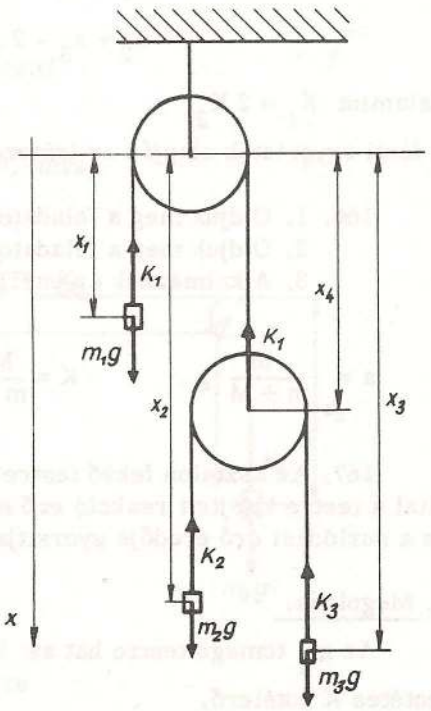
4. Megoldás

Oldjuk meg a feladatot a mozgásegyenletek felírásával.

Nézzük meg azt az esetet, amikor a fonalak ugyanazon az oldalon lógnak le. Ebben az esetben a formális tárgyalás azt adja, hogy a fenti eredmény számlálóiban pozitív előjel szerepel. Ebből a nagyobb keréken függő tömeg számára g-nél nagyobb gyorsulás adódik, ami nyilván lehetetlen. Valójában az történik, hogy (ha a hengerkerék tehetetlenségi nyomatéka valóban elhanyagolhatóan kicsiny) a belső tömeg g gyorsulással mozog lefelé, azonban a másik fonál végén levő tömeg is csak g gyorsulással képes esni, tehát a külső kerék mindig több fonalat dob le lazán magáról és megszünik a mechanikai kapcsolat a két tömeg között. Ezért válik érvénytelenné az a képlet, amely formálisan g-nél nagyobb gyorsulást adott.

165. A 161. feladat megoldásánál láttuk, hogy a csigát felfüggesztő kötélben mekkora erő ébred, ha a csigán gyorsuló tömegek függnek. (68. ábra.) Ezt alkalmazva, az m_2 és m_3 gyorsuló tömegek helyettesithetők egy

$$M = \frac{4 m_2 m_3}{m_2 + m_3} \text{ tömeggel.}$$



68. ábra

Ezzel most már a példa a 161. feladatra egyszerüsödött, azaz

$$a_1 = \frac{m_1 - M}{m_1 + M} g = \frac{1}{17} g .$$

Ha az m_2 és m_3 tömegek gyorsulására, valamint a kötélerőkre is kiváncsiak vagyunk, akkor a mozgásegyenleteket kell felirni, amelyek a jelen esetben

$$m_1 a_1 = m_1 g - K_1 ,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K_2 ,$$

$$m_3 a_3 = m_3 g - K_2 .$$

A fonalak állandó hossza miatt:

$x_1 + x_4 =$ állandó, ebből differenciálással

$$a_1 + a_4 = 0.$$

$x_2 + x_3 - 2 x_4 =$ állandó, ebből $a_2 + a_3 - 2 a_4 = 0$

Valamint $K_1 = 2 K_2$.

A fenti egyenletek alapján az ismeretlenek meghatározhatók.

166. 1. Oldjuk meg a feladatot a mozgásegyenletek felirásával!
2. Oldjuk meg a feladatot egy tömegnek tekintve a két testet.
3. Alkalmazzuk az energiamegmaradás tételét!

$$a = \frac{m}{m + M} g , \qquad K = \frac{M . m}{m + M} g, \qquad v = \frac{2 m h}{m+M} g .$$

167. Az asztalon fekvő testre ható nehézségi erővel az asztal lapja által a testre kifejtett reakció erő egyensulyt tart és a testet a fonálerő és a surlódási erő eredője gyorsitja.

1. Megoldás.

Az m_1 tömegü testre hat az $F_1 = m_1 g$ nehézségi erő és az ezzel ellentétes K kötélerő.

Mozgásegyenlete:

$$m_1 a_1 = F_1 - K = m_1 g - K .$$

Az m_2 tömegű hasábra hat a K fonálerő és az ellentétes $S = \mu m_2 g$ surlódási erő

$$m_2 a_2 = K - S .$$

A kényszerkapcsolat folytán

$$a_1 = a_2 = a$$

A három összefüggés alapján:

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g \simeq 4 \frac{m}{s^2} .$$

$$K = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu)}{m_1 + m_2} g = 12 \text{ N} .$$

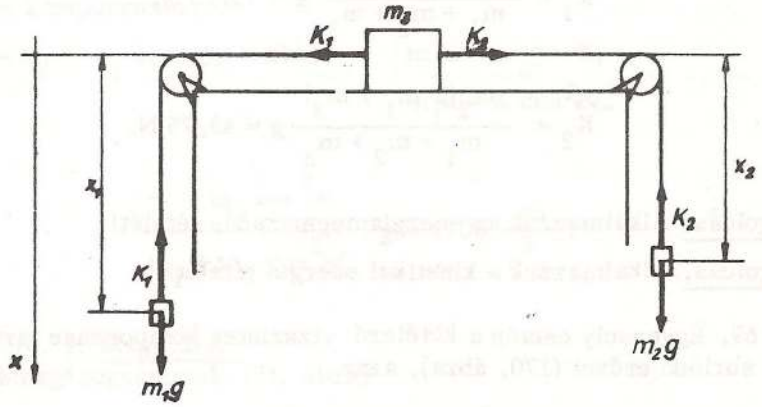
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1 \text{s} .$$

2. Megoldás.

Alkalmazzuk a kinetikai energiatételt!

168. 1. Megoldás.

Irjuk fel a mozgásegyenleteket (69. ábra):



69. ábra

$$m_1 a_1 = m_1 g - K_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K_2,$$

$$m_3 a_3 = K_2 - K_1.$$

A fonál nyujthatatlansága miatt

$$x_1 + x_2 = \text{const-ból}, \quad a_1 = -a_2 = a$$

Az m_3 tömeg együtt mozog a két másik tömeggel, ezért

$$a_3 = -a. \quad \text{Ezzel}$$

$$m_1 a = m_1 g - K_1,$$

$$m_2 a = K_2 - m_2 g,$$

$$m_3 a = K_1 - K_2.$$

A három egyenletből

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3} g = -1,25 \text{ m/s}^2.$$

$$K_1 = \frac{m_1(2 m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} g = 33,75 \text{ N},$$

$$K_2 = \frac{m_2(2 m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} g = 43,75 \text{ N}.$$

2. Megoldás. Alkalmazzuk az energiamegmaradás tételét!

3. Megoldás. Alkalmazzuk a kinetikai energia tételét!

169. Egyensuly esetén a kötélerő vizszintes komponense tart egyensulyt a surlódó erővel (170. ábra), azaz

$$K \cos\alpha = (m_1 g - K \sin\alpha)\mu.$$

$$K = m_2 g.$$

Ebből

$$m_2 g = \frac{m_1 g \mu}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} = 9,5 \text{ kp.}$$

Ha az m_2 tömeg sulya ennél nagyobb, akkor mozdul meg a láda. A gyorsulás meghatározásához irjuk fel a mozgásegyenletet

$$m_2 a_2 = m_2 g - K,$$

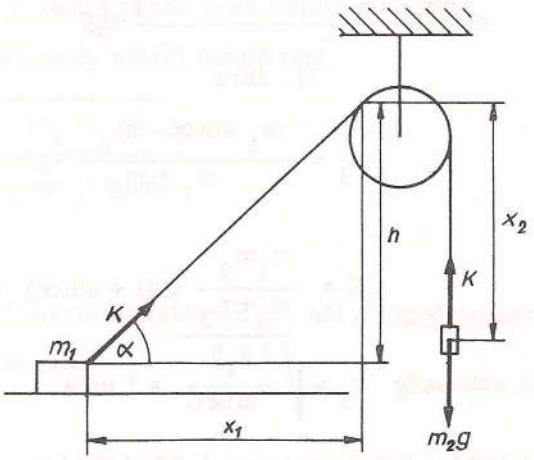
$$m_1 a_1 = - K \cos\alpha.$$

A kötél állandó hossza miatt

$$x_2 + \sqrt{h^2 + x_1^2} = \text{const, ebből}$$

differenciálással:

$$a_2 + \frac{x_1}{\sqrt{h^2 + x_1^2}} a_1 = 0.$$



70. ábra

A differenciálásnál a szögváltozástól eltekintettünk. Hasonló eredményre jutunk, ha a G_1 sulyu test gyorsulását felbontjuk kötélirányu és arra merőleges komponensekre.

Ha $a = a_2 = -a_1 \cos\alpha$, akkor $m_2 a = m_2 g - K$,

$$m_1 a = K \cos^2\alpha.$$

Ebből

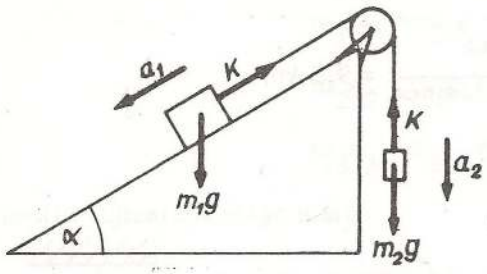
$$a = \frac{m_2 \cos^2\alpha}{m_1 + m_2 \cos^2\alpha} \cdot g = 1,06 \frac{m}{s^2}.$$

170. 1. Megoldás.

Mozgásegyenletek: (71. ábra)

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - K,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K.$$



71. ábra

Kényszerfeltétel abból, hogy a fonál hossza nem változik:

$$a_2 = -a_1 .$$

Ezért

$$(m_1+m_2)a_1 = (m_1 \sin\alpha - m_2)g,$$

$$a_1 = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{1}{8} g,$$

$$K = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g (1 + \sin\alpha) = \frac{9}{8} \text{ kp}.$$

A sebesség $v_1 = \sqrt{\frac{2 a_1 h}{\sin\alpha}} = 1$ m/s.

A lejtőre helyezett test a lejtőn lefelé mozog ha $m_1 \sin\alpha > m_2$; fölfelé, ha $m_1 \sin\alpha < m_2$.

$\alpha = 90^\circ$ esetén a feladat a 161 feladatba,

$\alpha = 0^\circ$ esetén a 166. feladatba megy át.

2. Megoldás. Minthogy csak konzervatív erők hatnak, a helyzeti és mozgási energia összege a mozgás folyamán állandó (a mozgási energia megváltozása egyenlő a helyzeti energia megváltozásával). Mig az m_1 tömegü test a lejtő aljára ér helyzeti energiája m_1gh-val csökken. Ekkor az m_2 tömegü test helyzeti energiája m_2gh_1-el növekszik ($h_1 = \frac{h^2}{\sin\alpha}$).

Tehát

$$m_1gh - m_2gh_1 = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2),$$

és $v_2 = -v_1$.

Ebből

$$v_1 = 2\,gh\,\frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{(m_1+m_2)\sin\alpha} = 1\ \mathrm{m/s}.$$

v_1-ből a_1 és K meghatározható.

Ha $m_1 \sin\alpha < m_2$, az m_1 tömegü test a lejtőn csak fölfelé mozoghat. Ez esetben a lejtő aljáról kezdősebesség nélkül induló test

$$v_1 = \sqrt{2\,gh}\,\sqrt{\frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{(m_1+m_2)\sin\alpha}}$$

sebességgel ér a lejtő tetejére.

171. Az m_1 esetében a lejtő mentén lefelé, az m_2-nél a függőlegesen lefelé mutató irányt vesszük pozitivnak.

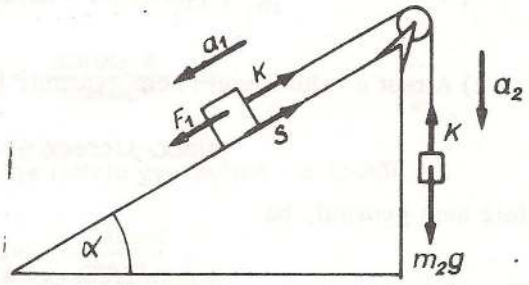
Mozgásegyenletek:

Ha a test a lejtőn lefelé mozog a fellépő surlódási erő fölfelé mutat. (72. ábra)

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha - K,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K,$$

$$a_2 = -a_1.$$



72. ábra

Ezekből:

$$a_1 = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2}\,g = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - k}{1+k}\,g.$$

Ha a test a lejtőn fölfelé mozog a surlódási erő lefelé irányul, a mozgásegyenletek:

1. $m_1 a_1' = m_1 g \sin\alpha + \mu m_1 g \cos\alpha - K,$

$m_2 a_2' = m_2 g - K,$

$a_2' = -a_1'.$

Ezekből:

$$a_2' = \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g = \frac{k-(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{1+k} g .$$

a) $\alpha = 30^o$ és $k = \frac{1}{3}$ esetén:

Lefelé való mozgásnál: $\mu < \left(\frac{\sin\alpha - k}{\cos\alpha}\right) = \frac{3}{9}$

Minthogy $\sin\alpha > k$, az m_1 tömegü test a lejtőn csakis lefelé gyorsulhat.

b) Az előző alapján:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{10} > \frac{\sqrt{3}}{9}$$ a rendszer gyorsul.

Ha:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{8} > \frac{\sqrt{3}}{9}$$ a rendszer nyugalomban marad.

$$a_1 = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha - k}{1+k} g = \frac{1}{80} g.$$

c) A test a lejtőn lefelé nem gyorsul, ha

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha \leq k,$$

fölfelé nem gyorsul, ha

$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha \geq k.$$

Az egyensuly feltétele a $k = \frac{m_2}{m_1}$ arány

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha < k < \sin\alpha + \mu\cos\alpha$$

értékeinél teljesül.

Ha $\alpha = 30^o$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{10}$ a rendszer egyensulyban marad

$$\frac{7}{20} < k < \frac{13}{20} .$$

A rendszer csak $k < \frac{7}{20}$, vagy $k > \frac{13}{20}$ $(k = \frac{m_2}{m_1})$ értékek esetén gyorsul.

(Pl. b) esetben $k = \frac{1}{3} = \frac{7}{21} < \frac{7}{20}$, a rendszer gyorsul.)

Gyorsulás jön létre ha

$$a_1 > 0, \text{ azaz } \sin\alpha - \mu\cos\alpha > k, \qquad 1)$$

ill.

$$a_2 > 0, \text{ azaz } \sin\alpha + \mu\cos\alpha > k. \qquad 2)$$

Ahhoz, hogy az 1. feltétel teljesülhessen természetesen már a $\sin\alpha > k$ feltételnek is teljesülnie kell. Ez a feltétele (l. előző feladatot) annak, hogy a test a lejtőn surlódásmentesen lefelé gyorsuljon.

A 2. feltétel teljesüléséhez pedig a $\sin\alpha < k$ is szükséges. Ez a feltétele annak, hogy $\mu = 0$ esetben a test a lejtőn fölfelé gyorsulhasson.

Adott α esetén a gyorsulás irányát a $k = \frac{m_2}{m_1}$ arány már meghatározza. A rendszer gyorsulásának feltétele $\sin\alpha > k$ esetben - minthogy a test csakis lefelé gyorsulhat - az 1)-ből

$$\mu < \frac{\sin\alpha - k}{\cos\alpha}.$$

A $\sin\alpha < k$ esetén - a test csakis fölfelé gyorsulhat - a 2)-ből

$$\mu < \frac{k - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

A két feltételt egyesitve:

$$\mu < \left| \frac{\sin\alpha - k}{\cos\alpha} \right|$$

alakban irható.

Gyorsulás nem jön létre, ha $\mu \geq \left| \frac{\sin\alpha - k}{\cos\alpha} \right|$, $\alpha = 30^\circ$, $k = \frac{1}{4}$ adatokkal a rendszer gyorsulásának feltétele:

$$\mu < \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

d) A test a lejtőn lefelé nem gyorsulhat, ha

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha \leq k.$$

Az a legnagyobb hajlásszög, mely mellett a test lefelé nem gyorsul, a

$$\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 = k$$

egyenletből számitható.

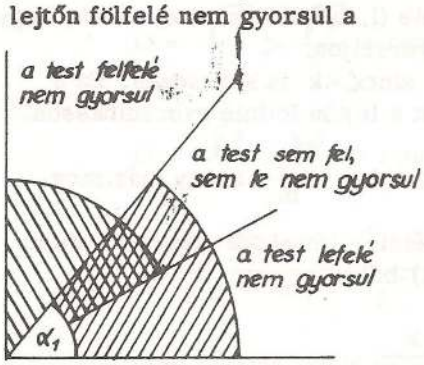
Ahhoz, hogy a test a lejtőn fölfelé ne gyorsulhasson a

$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha \geq k$$

feltételnek kell teljesülni. Azt a legkisebb szöget, mely mellett a test a lejtőn fölfelé nem gyorsul a

$$\sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2 = k$$

egyenlet adja (73. ábra).



73. ábra

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1 &= k\\ \sin\alpha_2 + \mu\cos\alpha_2 &= k\end{aligned}\right\}\text{-ból:}$$

$$\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 = \mu(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2),$$

$$2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} =$$

$$= \mu 2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}.$$

Ebből

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = \mu.$$

Ha $\mu = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$ az egyensuly csak egyetlen hajlásszög esetén lehetséges:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \mu(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 2\ k\text{-ból}$$

$$\mu = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

helyettesitéssel

$$\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

vagy

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu^2-k^2}}.$$

Az adatokkal:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 0,18,\quad \alpha_1 = 39,8^\circ;\quad \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 0,49,$$

$$\alpha_2 = 19^\circ$$

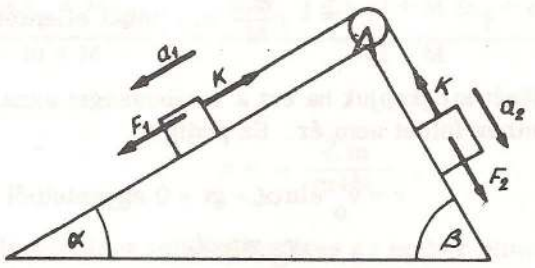
Az egyensuly feltétele:

$$19^\circ < \alpha < 39,8^\circ.$$

172. Mozgásegyenletek, ha mindkét lejtőn a lefelé mutató irányt vesszük pozitivnak

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - K,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\beta - K. \qquad \text{(l. 74. ábra)}$$



74. ábra

A fonál nyujthatatlan: $a_2 = - a_1$.
A fentiekből:

$$(m_1+m_2)a_1 = g\,(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta)$$

$$a_1 = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} \sim 0,1\,g$$

$$K = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, g\,(\sin\alpha + \sin\beta) \sim 0,8 \text{ kp}.$$

Az m_1 tömegü test a lejtőn lefelé mozog, ha $m_1 \sin\alpha < m_2 \sin\beta$, fölfelé ha $m_1 \sin\alpha > m_2 \sin\beta$. Az egyensuly feltétele

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Ha $\beta = 90^\circ$ speciális esetként a 170. feladatot, ha $\alpha = \beta = 90^\circ$ a 161. feladatot kapjuk.

173. $h = 1,47$ m.

174. Az ugrás növekedésének a nagysága az ember sebességnövekedésétől függ. Legcélszerübben a pálya tetőpontján az emberrel együttmozgó vonatkoztatási rendszerben vizsgálhatjuk a feladatot. Az ember v sebességét a teher eldobása után az impulzusmegmaradás törvénye alapján számolhatjuk:

$$0 = mu + Mv,$$

$$v = - \frac{m}{M}\, u, \quad \text{tehát ellentétes a teher}$$

sebességével.
Az ugrás növekedését megkapjuk ha ezt a v sebességet azzal az idővel szorozzuk, mig az ember földet nem ér. Ez pedig a

$$v = v_o \sin\alpha - gt = 0 \text{ egyenletből}$$

$$t = \frac{v_o \sin\alpha}{g}.$$

Azaz

$$\Delta s = \frac{m}{M} u \cdot \frac{v_o \sin\alpha}{g} = 0,56 \text{ m} .$$

175. Legyen a kezdő időpontban A a vonatkoztatási rendszer origójában és B helyezkedjen el az x tengely mentén a távolságban, akkor

$$x_s(o) = \frac{a}{m_1+m_2} , \quad y_s(o) = 0.$$

Mivel külső erő nem hat, a tömegközéppont egyenesvonalu egyenletes mozgást végez $x_s(o)$, $y_s(o)$ pontból indulva az x tengellyel α szöget bezáró irányban

$$v_{sx} = \frac{m_2 v_2}{m_1+m_2} , \quad v_{sy} = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} .$$

$$|v_s| = \frac{\sqrt{m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2}}{m_1 + m_2} , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} .$$

176. Az ember elmozdulása folyamán, csak belső erők működnek, s ezért a csónak ember együttes tömegközéppontja helyben marad.

Legyen a vizhez rögzitett vonatkoztatási rendszerben az ember helyzetének koordinátája x_1, a csónak helyzetét tömegközéppontjának x_2 koordinátájával adjuk meg. Ha az ember ℓ távolságot tesz meg a csónakhoz képest, és a csónak s távolságot tesz meg a vizhez képest, akkor az ember $\ell + s$ távolságot tesz meg a vizhez képest (ℓ és s előjeles távolságok). A rendszer tömegközéppontjának helybenmaradása miatt:

$$\frac{mx_1 + Mx_2}{m + M} = \frac{m(x_1 + \ell + s) + M(x_2 + s)}{m + M} .$$

Ebből:

$$s = -\frac{\ell m}{m+M} .$$

A csónak elmozdulása tehát ellentétes az ember elmozdulásával.

Szokásos a feladatot az impulzusmegmaradás tételével megoldani. A vizhez rögzitett rendszerben:

$$mv_1 + Mv_2 = 0,$$

ahol

$$v_1 = \frac{\ell + s}{t}, \qquad v_2 = \frac{s}{t}. \quad \text{Ebből}$$

$$m\,\frac{\ell + s}{t} + M\,\frac{s}{t} = 0,$$

és $s = -\dfrac{m\ell}{m+M}$, az előbbi eredményt kaptuk.

Ebben az esetben azonban fel kellett tételezni a mozgásról, hogy egyenletes. Az első megoldásban a mozgásról semmit nem kellett tudnunk. Akármilyen módon mehetett az ember a csónak egyik végéből a másikba; a tömegközépponttétel csak a kezdeti és végállapottal van kapcsolatban. Ebből látható, hogy bár a tömegközéppont tétel és impulzusmegmaradás tétel ugyanazon törvény két megjelenési formája, bizonyos problémák esetén csak az egyik alkalmazása a kedvező.

177. Az előző példa alapján keressük a megoldást!

$$x_M = \frac{m.\ell.\cos\alpha}{m + M}.$$

178. $H = 100$ m
$h_1 = 600$ m
$M = 80$ kg
$m_1 = 30$ kg
$v_1 = 200$ m/s

A függőlegesen zuhanó bomba a nehézségi erő hatása alatt áll. A robbanás feltehetőleg olyan rövid idő alatt történt, hogy közben a nehézségi erő nem tudta lényegesen befolyásolni a bomba mozgásmennyiségét. Tehát a robbanás előtti pillanatban ugyanaz a mozgásmennyiség mint a robbanás utáni pillanatban.

$$M\bar{v} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2$$

Ha a robbanás pontjába helyezett kezdőpontu vonatkoztatási rendszer y tengelye a függőleges irány és vizszintes tengelye $\bar{v}_1$ iránya, akkor

$$M_v = m_2 v_{2y}, \quad v_{2y} = \frac{M}{m_2}\,v = \frac{M}{m_2}\sqrt{2\,gh_1},$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_{2x}, \quad v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2}\,v_1.$$

A második darab tehát ferdén lefelé irányban halad és helyzetének idő függése:

$$x = v_{2x} \cdot t,$$

$$y = v_{2y} \cdot t + \frac{g}{2} t^2 .$$

Keressük azt az x értéket, amely az $y = H - h_1 = 400$ méterhez tartozik, ez pedig az előző két összefüggésből nyert pályaegyenlet alapján meghatározható:

$$y = v_{2y} \frac{x}{v_{2x}} + \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_{2x}^2} ,$$

$$H - h_1 = - \frac{m_2^2}{m_1 M} \cdot \frac{\sqrt{2gh_1}}{v_1} x + \frac{g}{2} \frac{m_2^2}{m_1^2 v_1^2} x^2 .$$

$$x \sim 262 \text{ m}.$$

179. A benne levő üzemanyaggal együtt m tömegű és nyugvó jelhez képest v sebességgel haladó rakéta mozgásmennyisége $I = mv$. Igen kis Δm tömegű gáz kiáramlása folytán a rakéta sebessége változzék meg Δv-vel.

A rendszer együttes mozgásmennyisége:

$$I_1 = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m (v + u).$$

Ha a külső erő nem hat

$$I_1 = I.$$

$$(m - \Delta m)(v + \Delta v + \Delta m)(v + u) = mv,$$

$$mv - \Delta mv + m\Delta v - \Delta m \Delta v + \Delta mv + \Delta mu = mv.$$

$\Delta m \Delta v$, mint másodrendüen kicsiny elhanyagolható, igy

$$m\Delta v = - \Delta mu,$$

$$\Delta v = - \frac{\Delta m}{m} u.$$

Az eredetileg m_o tömegű, v_o sebességű rakéta sebességének megváltozását

$$v - v_o = \lim_{\Delta m \to o} \sum_{m_o}^{m_o - m_1} \left(- \frac{\Delta m}{m} u\right) = - \int_{m_o}^{m_o - m_1} \frac{dm}{m}$$

adja. $\int \frac{dm}{m} = \ln m$, és igy

$$v - v_o = -u \left[\ln (m_o - m_1) - \ln m_o\right] = u \left[\ln m_o - \ln (m_o - m_1)\right] =$$

$$= u \left[\ln \frac{m_o}{m_o - m_1}\right].$$

$$v - v_o = u \ln 2 \sim u.0,69.$$

180. Az előző példa alapján számolva $v_{MAX} \sim 2,78$ m/s.

181. a) Az indulás pillanatában a csigából, kötélből és az emberekből álló rendszer impulzusmomentuma a csiga tengelyére vonatkoztatva zérus. Ha tömegük egyenlő, akkor a nehézségi erő a rendszerre nem gyakorol forgatónyomatékot, tehát az eredő impulzusmomentum nem változik. Ebből következik, hogy a mászók sebessége a csigához képest minden pillanatban ugyanaz kell hogy legyen. Mivel egy magasságból indultak, egyenlő utakat kellett megtenniük felfelé.

b) Legyen a csiga sugara r, a kötél sebessége $v = r\omega$. Az impulzusmegmaradás tételét felirva (v_1, v_2, v előjeles mennyiségek)

$$m(v_1 + v)\, r + m(v_2 + v)\, r = 0.$$

Ebből

$$\omega = - \frac{v_1 + v_2}{r}$$

Természetesen v_1 és v_2 ellenkező előjelű. Tehát ha v_1 nagyobb mint v_2, akkor a csiga a v_1 sebességű tömeg felé forog, mert ekkor $v = r\omega$ negativ.

182. Ha egyidőben érik el a csigát akkor a csigához képest különböző sebességgel kell mozogniuk. Kezdetben, mivel nem másztak a kötélen a sebességük a csigához képest azonos, v_o nagyságu, de ellentétes irányu volt. Az impulzusnyomaték tételt alkalmazva (a tömegek sebessége a ráható nehézségi erővel ellentétes irányu):

$$N_1 - N_{10} + N_2 - N_{20} = M \cdot t$$

$$m_1 v_1 r - (- m_1 v_o r) + (- m_2 v_2 r) - m_2 v_o r = - (m_1 g - m_2 g)\ r \cdot t$$

Egyenletesen gyorsuló mozgást feltételezve

$$\frac{v_o + v_1}{2} \cdot t = b_1 , \qquad \frac{v_o + v_2}{2}\ t = b_2 .$$

A három egyenletből

$$m_1 \frac{2b_1}{t} - m_2 \frac{2b_2}{t} = (m_2 - m_1) \cdot t$$

Tehát a kezdősebesség kiesett.

$$t = \sqrt{\frac{2(m_1 b_1 - m_2 b_2)}{(m_2 - m_1)}} .$$

A gyökjel alatt pozitivnak kell állni, tehát ha

$m_1 > m_2$, akkor $m_2 b_2 > m_1 b_1$, azaz $\frac{m_2}{m_1} > \frac{b_1}{b_2}$, ha

$m_2 > m_1$, akkor $m_1 b_1 > m_2 b_2$, $\frac{m_1}{m_2} > \frac{b_2}{b_1}$.

Tehát a csigától mért távolsága az embereknek nem lehet tetszőleges arányu.

183. $v = \frac{1}{6}$ m/s, az első test sebességével azonos irányu.

184. $v_1 = 2\ \frac{2}{3}$ m/s $\quad v_2 = 4\ \frac{2}{3}$ m/s.

185. Legyen m_1 sebessége az ütközés előtt v_1.
Az ütközés utáni közös sebességet az impulzusmegmaradás törvénye alapján kaphatjuk:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v, \qquad v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 .$$

A relativ energiaveszteség

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} .$$

186. $v_2 = 4,44$ m/s.

187. $u_1 = 0,\ m_1 = 3\, m_2,\ u_2 = 2\, v_1 = -2\, v_2,\ \frac{v_2}{u_2} = -\frac{1}{2}$.

188. A test relativ sebessége a falhoz képest v-u. Ütközés után ugyanezzel a sebességgel pattan vissza. Tömege legyen m. Ekkor

$$T = 2\, m\, u\, (u - v),$$

$$\Delta p = 2\, m\, (v - u) .$$

189. Az első ütközésre felirható:

$$m_1 c_1 = m_2 v_2 + m_1 c_1' ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 c_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 c_1'^2 .$$

Ebből

$$v_2 = \frac{2 m_1 \cdot c_1}{m_1 + m_2} .$$

Ennek alapján értelemszerüen

$$v_3 = \frac{2 m_2 v_2}{m_2 + m_3} = \frac{4 m_1 m_2 c_1}{(m_1 + m_2) \cdot (m_2 + m_3)} = \frac{4 m_1 c_1}{(m_1 + m_3) + \frac{m_1 m_3}{m_2} + m_2} .$$

Ez akkor maximális, ha $\frac{m_1 m_3}{m_2} + m_2$ minimum.

Ez pedig akkor teljesül, ha

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}.$$

190. A surlódási munka megegyezik az ütközés utáni mozgási energiával:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g . \mu . s ,$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2 g \mu s}.$$

Az impulzusmegmaradása tétel alapján

$$(m_1 + m_2) v . \cos\alpha = m_1 v_1 ,$$

$$(m_1 + m_2) v . \sin\alpha = m_2 v_2 .$$

Ennek alapján

$$v_2 \sim 10 \text{ m/s}.$$

A deformációs munka:

$$W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = 1,68 . 10^5 \text{ J}.$$

191. A mozgásmennyiség és energiamegmaradás elvét alkalmazzuk. A kilendülés sebességére felirhatjuk az

$$mv = (m + M)V$$

egyenletet.

A kilendülés magassága az energiamegmaradás elve alapján a kilendülés sebességével

$$(m + M) g h = \frac{1}{2}(m + M) V^2$$

összefüggésben van.

A lövedék sebességére megoldva a két egyenletet

$$v = \frac{m + M}{M} \sqrt{2 g h} = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 g \ell (1 - \cos\alpha)} = 386,8 \text{ m/s}.$$

ℓ a sulypont távolsága a felfüggesztési ponttól, α a kilendülés szöge.

192. $= 7,8^{o}$.

193. Az energia és az impulzus megmaradásából:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1^2 v_1^2}{2m_2} = E\,; \text{ innen } v_1 = 764 \text{ cm/s}; \quad v_2 = \underline{306 \text{ cm/s}}.$$

Ha m_2-t rögzitjük, akkor

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = E; \quad v_1 = \underline{904 \text{ cm/s}}; \quad v_2 = \underline{571 \text{ cm/s}}.$$

194. 1. Egyenlő tömegü golyók rugalmas ütközéskor sebességet cserélnek. Ezért az m_1 tömegü golyót is 40°-ra kell felemelni.

2. Rugalmatlan ütközéskor energiaveszteség lép fel, és a két golyó együttesen mozog.

A m_1 golyónak az m_2 tömeggel való ütközése előtti sebességét az energiatételből határozzuk meg:

$$m_1 g\,\ell\,(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} m\, v_1^2.$$

Az ütközés utáni közös v sebesség az impulzus megmaradásának tételéből számolható:

$$m_1 v_1 = (m_1+m_2)\, v.$$

A közösen elért magasság ismét az energiatétellel számolható:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v^2 = (m_1 + m_2)\, g\,\ell(1 - \cos\alpha)\,.$$

A három egyenlet alapján $\alpha = 83,33^{o}$.

195. Az energia és impulzusmegmaradás tétele alapján számolva:

$h_1 = \frac{1}{9}\,h\,; \quad h_2 = \frac{16}{9}\,h.$

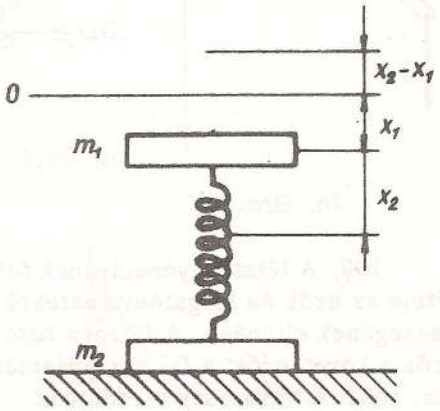
196. Az amplitudót a 194. példa második részének gondolatmenete alapján számolhatjuk:

$$A = \frac{\Delta\ell}{2} = 5 \text{ cm}.$$

A frekvenciát a harmonikus rezgőmozgásnál megismert frekvencia összefüggés alapján, mely szerint a rugó állandót D-t és a tömeget kell ismerni. Ütközés utáni állapotban két rugót kell venni és két tömeget, tehát ugyanaz, mintha egy rugó lenne és egy tömeg. De valóságban is ez a helyzet, mert a két golyó összeütközése után köztük már erőhatás nem lép fel, csak együtt végzik rezgőmozgásukat. Tehát

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = 1,42\ s^{-1}.$$

197. A rugó következtében az m_1 tömeg rezgőmozgást végez, közben a rugó összenyomott vagy megfeszült állapotban van. Összenyomáskor mindkét lemezkét nyomja, megfeszült állapotban mindkettőt huzza. Legyen a rugó nyugalmi állapota a, 0 szinten (75. ábra). m_1 tömeget rátéve x_1 távolságra összenyomódik a rugó. Ha további x_2 távolságra kitéritjük x_2 tágasságu rezgéseket fog végezni. (Lásd Budó Pócza: Kisérleti fizika I.) $x_2 > x_1$ kell hogy legyen, hogy a rugóban feszültség jöhessen létre.



75. ábra

Ha $D(x_2-x_1) \geq m_2 g$ akkor az alsó lemez felemelkedik.

Irjuk fel a határesetre az energiatételt

$$\frac{1}{2}D(x_1+x_2)^2 - m_1 g(x_1+x_2) = \frac{1}{2}D(x_2-x_1)^2 + m_1 g(x_2-x_1).$$

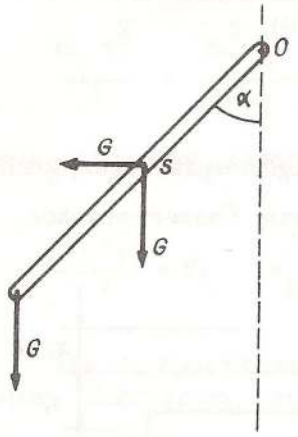
Felhasználva

$D(x_2-x_1) = m_2 g$, és $Dx_1 = m_1 g$ összefüggéseket, kapjuk

$$Dx_2 = m_2 g + m_1 g.$$

Tehát a keresett erő $F \geq (m_1+m_2)\,g$.

198. A merev testre vonatkozó egyensulyi feltételek szerint a ható erők eredője zérus és a ható erők tetszőleges pontra vonatkozó forgatónyomatékainak eredője is zérus. Most csak a forgatónyomatékra vonatkozó összefüggést kell figyelembe venni, mivel a forgástengely feltehetőleg akármilyen erőt képes kompenzálni. (76. ábra.) Mivel a kompenzáló erők nyomatéka 0-ra vonatkozóan zérus, ezért

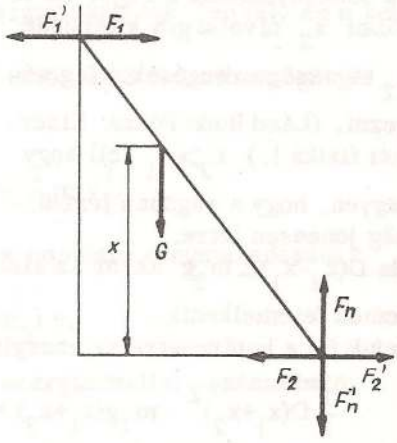


76. ábra

$$G\ell\sin\alpha + G\frac{\ell}{2}\sin\alpha - G\frac{\ell}{2}\cos\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

199. A létra egyensulyának feltétele az erők és forgatónyomatékok összegének eltünése. A létrára ható erők a következők: a fal surlódásmentes, tehát a létra csak merőleges irányu erőt tud átadni és igy a fal reakcióereje F_1 is merőleges a falra, G az ember sulya (77. ábra). A létra és a talaj között van surlódás, igy a kölcsönhatás nem okvetlen merőleges a talajra. A létra és a talaj közötti erő komponensei



77. ábra

$$F_2 \text{ és } F_n.$$

Az erők eredőjének 0-nak kell lenni, ez csak ugy lehet, ha a függőleges és a vizszintes irányuak külön-külön eltünnek, tehát

$$F_1 - F_2 = 0,$$

$$G - F_n = 0.$$

A talajjal való érintkezés pontjára, mint forgástengelyre vonatkozó forgató nyomatékokra felirható egyenlet:

$$F_1 \cdot 4 \sin 50^\circ - G \cdot x \operatorname{ctg} 50^\circ = 0.$$

A három egyenletből:

$$F_2 = \frac{G \, x \operatorname{ctg} 50^\circ}{4 \sin 50^\circ} .$$

F_2 azonban nem lehet nagyobb, mint a maximális surlódási erő, azaz

$$F_2 \leq \mu F_n = \mu G ,$$

tehát

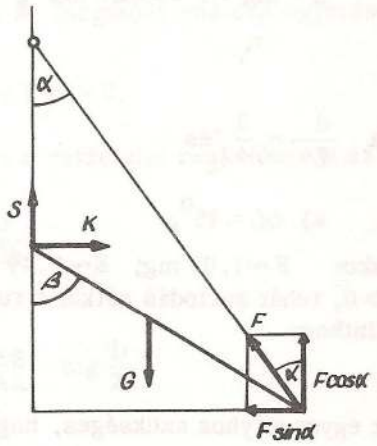
$$\frac{G \, x \operatorname{ctg} 50^\circ}{4 \sin 50^\circ} \leq \mu G,$$

és innen

$$x \leq \frac{4 \mu \sin 50^\circ}{\operatorname{ctg} 50^\circ} = 1,09 \text{ m}.$$

200. A rudra négy erő hat:
(l. 78. ábrát)
az F fonálerő,
az mg nehézségi erő,
a K falra merőleges nyomóerő és
az S surlódási erő.
S>0 (fölfelé mutat) ha a rud lefelé való csuszását,
S<0 (lefelé mutat) ha a rud fölfelé való csuszását akadályozza. Az egyensuly feltétele:

$$\sum \overline{F}_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum \overline{M}_i = 0.$$



78. ábra

Az egyensuly feltételét derékszögü komponensekkel felirva:

$$F \cos\alpha + S - mg = 0$$

$$K - F \sin\alpha = 0.$$

A nyomatékok összegét a rudnak a fallal érintkező végpontjára számitva

$$F \cos\alpha \cdot d \sin\alpha - F \sin\alpha \cdot d \cos\alpha - mg \frac{d}{2} \sin\beta = 0.$$

Ezenkivül fennál még a

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \; ; \quad \sin\beta = \frac{\ell}{d}\sin\alpha$$

összefüggés. Az egyenletekből:

$$F = mg\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha - \sqrt{\frac{d^2}{\ell^2} - \sin^2\alpha}}\,,$$

$$K = F\sin\alpha = mg\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{\frac{d^2}{\ell^2} - \sin^2\alpha}}\,,$$

$$S = mg - F\cos\alpha = mg\,\frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha - 2\sqrt{\frac{d^2}{\ell^2} - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{\frac{d^2}{\ell^2} - \sin^2\alpha}}\,.$$

Ha $\frac{d}{\ell} = \frac{3}{4}$ és

a) $\alpha = 45^\circ$,

akkor $F \sim 1,09$ mg; $K \sim 0,49$ mg; $S \sim 0,23$ mg.
$S > 0$, tehát surlódás nélkül a rud lecsuszik.
Minthogy

$$S \leq \mu_o K,$$

az egyensulyhoz szükséges, hogy

$$\mu_o \geq \frac{S}{K} \sim 0,46.$$

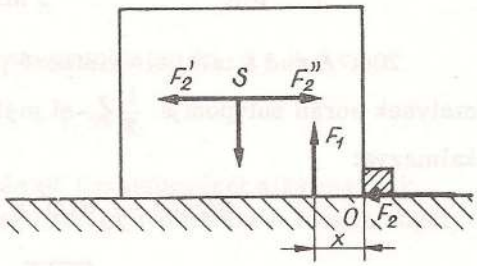
b) $\alpha = 30^\circ$,

akkor $F \sim 1,63$ mg, $K \sim 0,81$ mg; $S \sim 0,41$ mg.

$S < 0$, surlódás nélkül a rud fölfelé csuszna. Az egyensuly létrejöhet, ha

$$\mu_o \geq \frac{S}{K} \sim 0,5.$$

201. A ládára a járműhöz rögzitett léc vizszintes irányu erőt fejt ki. Ezenkivül hat rá a nehézségi erő és a rakfelület nyomóereje. Egyenesvonalu gyorsuló mozgást akkor végez, ha a a ládára ható erőket a sulypontba eltolva az eredő erő nem zérus, hanem a feltételezett gyorsulás irányába mutat. Az erők eltolásakor mindig egy erőpár forgatónyomatéka is fel fog lépni. Akkor nem fog elfordulni a láda, ha a ráható erők forgatónyomatékának összege zérus.



79. ábra

Függőleges irányba levő erőket tekintve: (79. ábra)

$$\overline{mg} + \overline{F}_1 = 0.$$

Nyilván F_1 hatásvonala nem eshet egybe mg hatásvonalával, mert F_2 hatása miatt a forgatónyomatékokra vonatkozó egyensuly nem állna fenn.

F_2 erő sulypontba való eltolását F_2' erő képviseli. Az eltolás miatt fellépő F_2'' és F_2 erőpár valamint mg és F_1 forgatónyomatéka egymást kompenzálja, azaz

$$F_2 \cdot h - mg\,\frac{b}{2} + F_1 x = 0.$$

F_2 maximális akkor, ha x = 0, azaz a rakfelület reakcióereje az 0 pontba koncentrálódik, akkor

$$F_{2MAX} = mg\,\frac{b}{2h}.$$

A láda gyorsul, tehát határesetben

$$ma_{MAX} = F_{2'MAX} = mg\frac{b}{2h},$$

$$a_{MAX} = g\,\frac{b}{2h}.$$

202. $\beta = 5\ s^{-2}$; $\alpha = 10$ rad; $a = 1\ ms^{-2}$.

203. $\beta = 2\pi s^{-2}$; $n = 50$.

204. M = 64 kp.m

205. $\omega = 78,5\ s^{-1}$.

206. $F = 12,5\ N$

207. $\beta = \frac{2F}{MR}$; $n = \frac{F t^2}{2 Mr}$.

208. A rud a talajjal érintkező pontja körül forgó mozgást végez, melynek során sulypontja $\frac{1}{2}\ell$ -el mélyebbre kerül. Az energiatételt alkalmazva:

$$mg\ell = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \ell^2 \omega^2 .$$

$$v = \ell\omega = \sqrt{3 g\ell}.$$

209. Pontrendszerre vonatkozó energiatétel esetén a belső erők potenciális energiáját is figyelembe kell venni. A sulyozók behuzását végző erők belső erőknek tekinthetők. Az energiaváltozás meghatározható, ha a szögsebesség változást ki tudjuk számitani az ismeretlen nagyságu belső erők ismerete nélkül. Az impulzusnyomaték tételben belső erők nem szerepelnek. A külső erő (a nehézségi erő) forgatónyomatéka a függőleges irányu tengelyre vonatkozóan zérus, ezért ha a kezdeti szögsebesség és tehetetlenségi nyomaték ω_1 ill. Θ_1, a végső (a behuzás után) pedig ω_2 ill. Θ_2, akkor

$$\Theta_1\omega_1 = \Theta_2\omega_2.$$

Mivel $\Theta_2 < \Theta_1$, ebből következik, hogy $\frac{1}{2}(\Theta_2\omega^2 - \Theta_1\omega_1^2) > 0$.

A forgó rendszer energiája tehát a belső erők munkája árán növekedett.

210. Az összekapcsolás következtében csak belső erők lépnek fel, tehát a rendszer össz-impulzusnyomatéka megmarad. Ha a közös fordulatszám n, akkor

$$\frac{2\pi n}{60}(\Theta_1 + \Theta_2) = \frac{2\pi n_2}{60}\Theta_2 .$$

$$n = \frac{m_2 d_2^2 n_2}{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2} = 45,7\ \frac{1}{perc}.$$

211. Fizikai ingának tekintve és alkalmazva a tehetetlenségi nyomaték kiszámításánál a Steiner tételt (egy homogén rud végpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3} m\ell^2$), kapjuk, hogy $T = 1,37$s.

212. Az előző példánál adott szempontok alapján $d = 8,3$ cm.

213. Fizikai ingának tekintve: $T = 1,59$ s.

214. A fizikai inga ismert lengésidő összefüggését alkalmazzuk.
Az inga végén levő korong tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkozólag

$$\frac{1}{2} Mr^2 + M(\ell + r)^2$$

a rud tehetetlenségi nyomatéka pedig $\frac{m\ell^2}{3}$, tehát az inga tehetetlenségi nyomatéka:

$$\frac{m\ell^2}{3} + \frac{1}{2} Mr^2 + M(\ell + r)^2.$$

Az inga tömegközéppontjának távolsága a forgástengelytől:

$$s = \frac{\frac{m}{2} + M(\ell + r)}{m + M},$$

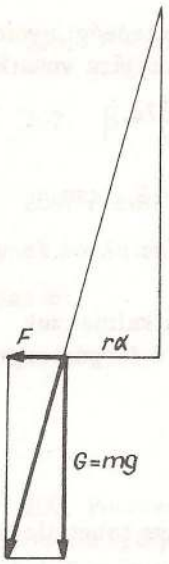
és igy lengésideje:

$$T = 3\pi \sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{3} + \frac{1}{2} Mr^2 + M(\ell + r)^2}{g\left[\frac{m\ell}{2} + M(\ell + r)\right]}}.$$

Ha egyszerüen matematikai ingának tekintjük, akkor a lengésidő

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{\ell + r}{g}}$$

volna. Az igy számitott lengésidő kb. 1%-kal nagyobb a helyes értéknél, a számszerü adatok alapján a hiba tulnyomó részét m elhanyagolása okozza.



80. ábra

215. Ha a korong α szöggel elfordul, akkor az átmérő végpontjai $r \cdot \alpha$ utdarabbal elmozdulnak. A visszatérítő erőre a 80. ábra szerint érvényes, hogy $\frac{F}{mg} \approx \frac{r\alpha}{\ell}$. Mivel most

$$D^* = \frac{Fr}{\alpha} \quad \text{és} \quad \Theta = \frac{mr^2}{2},$$

azért a lengési idő

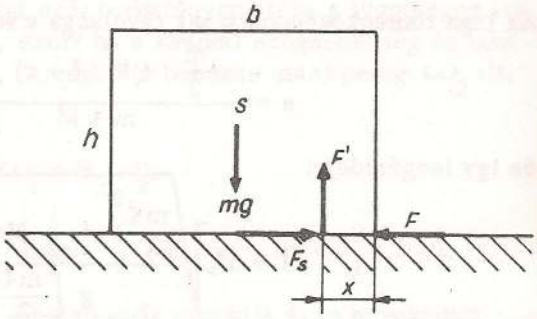
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}};$$

ahonnan

$$\ell = \underline{8{,}0 \text{ cm}}.$$

216. A 201. példától eltérően, most a hasáb csuszik a talajon, surlódásmentes esetben azonban ugyanazon erőhatások lépnek fel mint a 201. példában láttuk. Azonos meggondolások alapján

$$F \leq mg\,\frac{b}{h}.$$



81. ábra

Surlódás fellépése esetén a ható erők (l. 81. ábra).

Függőleges irányban az erők egyensulyt tartanak, tehát

$$mg = F'$$

A vizszintes irányu erők eredője gyorsulást hoz létre

$$ma = F - F_s$$

Forgásnak nem szabad létrejönni, tehát a forgatónyomatékok egyensulyának fenn kell állni (összegük zérus).

Az erők összegzéséhez a sulypontba tóljuk el az erőket, ekkor két erőpár forgatónyomatéka fog fellépni:

$$(F - F_s)\,\frac{h}{2} \quad \text{és} \quad mg\,.\,(\frac{b}{2} - x)\,,$$

ahol x jelenti az F' reakcióerő támadáspontjának távolságát az F erő támadáspontjától. A két erőpár forgatónyomatéka ellentétes irányu és ha állandóan egyensulyt tartanak, akkor

$$(F - F_s)\,\frac{h}{2} = mg\,(\frac{b}{2} - x)$$

Ebben az összefüggésben F és x változhat. F növekedésével x-nek csökkennie kell, de x legkisebb értéke zérus lehet ezért

$$F \leq mg\,(\frac{b}{h} + \mu)$$

217. A mozgási energiának és a forgási energiának zérussá kell válnia, ezért $W = 2,35.10^3$ J.

218. Irjuk le a korong mozgását ugy, mint a tömegközéppont haladó mozgását (transzláció) és a tömegközéppont körüli forgást. A felső pontjában támadó érintőleges F erőn kivül hat a talajjal érintkező pontban támadó, szintén érintő irányu, S surlódási erő is. A surlódási erő irányát a mozgásegyenletek felirásakor még tetszőlegesen vehetjük fel.

1. Ha a surlódási erőt az F erő irányával ellentétesen vesszük fel, a korongra ható F és S erőkből álló erőrendszer helyettesithető a tömegközéppontban támadó F - S erővel és az $M_1 = F\,R$ és $M_2 = S\,R$ nyomatékok összegével.

Két egyező irányban forgató erőpár.

$$M = M_1 + M_2 = (F + S)\,R.$$

A mozgásegyenletek:

$$ma = F - S.$$

$$\Theta_s \beta = (F + S)\,R.$$

Ahol Θ_s a sulypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Tiszta (csuszás nélküli) gördüléssel

$$a = k\beta\,.$$

Ezekből

$$\beta = \frac{2FR}{\Theta_s + mR^2}\ ;\quad a = R\beta = \frac{2FR^2}{\Theta_s + mR^2}\ ;\quad S = F\left(\frac{\Theta_s - mR^2}{\Theta_s + mR^2}\right)$$

$$\Theta_s = \frac{1}{2}mR^2\text{-el:}\quad \beta = \frac{4}{3}\frac{F}{mR},\quad a = \frac{4}{3}\frac{F}{m},\quad S = -\frac{F}{3}.$$

A korong tömegközéppontját az $F - S = F + \frac{1}{3}F = \frac{4}{3}F$ erő gyorsitja.

Az eredmény azt is mutatja, hogy a fellépő surlódási erő iránya a felvett iránnyal ellentétes, vagyis az S az F-el egyező irányu.

2. Ha az S irányát az F irányával egyezőnek vesszük fel, akkor a korongra ható S és F erőkből álló erőrendszer helyettesithető a tömegközéppontban támadó

$$F_1 = F + S$$

erővel és az

$$M = M_1 + M_2 = FR - SR$$

erőpár forgatónyomatékával.

A mozgásegyenletek:

$$ma = F + S$$

$$\Theta_s\beta = (F - S)R,$$

$$a = R\beta.$$

Ezekből:

$$\beta = \frac{2FR}{\Theta_s + mR^2}\ ;\quad a = \frac{2FR^2}{\Theta_s + mR^2}\ ;\quad S = \frac{mR^2 - \Theta_s}{\Theta_s + mR^2}F.$$

$$\Theta_s = \frac{1}{2}mR^2\text{-el:}\quad \beta = \frac{4}{3}\frac{F}{m}\frac{1}{R}\ ;\quad a = \frac{4}{3}\frac{F}{m}\ ;\quad S = \frac{1}{3}F.$$

A kapott eredmény mutatja, hogy a fellépő surlódási erő a felvett irányban hat (azaz iránya F irányával egyezik).

A korong tömegközéppontját az

$$F_1 = F + S = F + \frac{1}{3}F = \frac{4}{3}F \quad \text{erő gyorsitja.}$$

c) A tiszta gördülés feltétele

$$S = \frac{1}{3} F \leq \mu_0 mg ; \qquad F \leq 3 \mu_0 mg.$$

d) $a = \frac{10}{7} \frac{F}{m}$; $S = \frac{3}{7} \frac{F}{m}$.

219. a) Az előző feladat megoldási módszere alapján

$$a = \frac{F}{m} \frac{2}{3} \frac{R+r}{R} .$$

b) Ha $\frac{2}{3} \frac{R+r}{R} > 1$, azaz $2r > R$, akkor $a > \frac{F}{m}$.

Ekkor a surlódási erő segiti a tömegközéppont gyorsitását (az általunk kifejtett erővel egyirányu surlódási erő lép fel).

Ha $\frac{2}{3} \frac{R+r}{R} = 1$, azaz $2r = R$, $a = \frac{F}{m}$, a surlódási erő a gyorsitásnál nem játszik szerepet.

Ha $\frac{2}{3} \frac{R+r}{R} < 1$, azaz $2r < R$, $a < \frac{F}{M}$, a surlódási erő akadályozza a tömegközéppont gyorsitását.

c) Ha F irányát pozitivnak tekintjük, akkor

$$S = ma - F = F \frac{2r - R}{3R} \lesseqgtr 0.$$

Akkor nem fog csuszni, azaz tiszta gördülés van, ha az S surlódási erő kisebb, mint a nyugalmi surlódási erő, azaz

$$|S| \leq \mu_0 mg, \text{ és } \mu_0 \geq \frac{F}{mg} \frac{|2r-R|}{3R} .$$

220. A 218. és 219. példákban látottak alapján

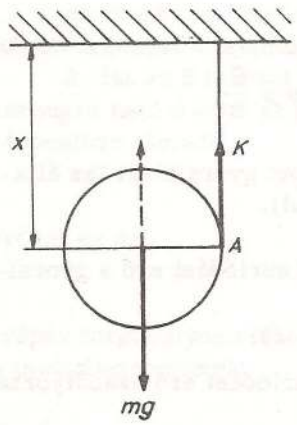
$$a = \frac{F}{m} \frac{2}{3} \frac{R-r}{R} < \frac{F}{m} , \text{ tehát az}$$

$S = F - ma = F \frac{R+2r}{3R}$ surlódó erő mindig akadályozza a korong gyorsulását.

A tiszta gördüléshez szükséges, hogy $S \leq \mu_0 mg$, azaz

$$\mu_0 \leq \frac{F}{mg} \frac{R+2r}{3R} .$$

221. 1. Megoldás. A korong sikmozgást végez. Ez leírható mint a tömegközéppont haladó mozgása és a tömegközéppont körül történő forgás. A korongra hat a középpontjában támadó F=mg lefelé irányuló nehézségi erő, és a kerületén támadó, fölfelé irányuló K kötélerő. (L. 82. ábrát.) A korong kerületén támadó K erő helyettesithető a tömegközéppontban támadó K erővel és M = K R nyomatéku erőpárral. A tömegközéppont haladó mozgásának mozgásegyenlete:



82. ábra

$$ma = mg - K,$$

a tömegközéppont körüli forgás egyenlete:

$$\Theta_s \beta = K R.$$

Ahol Θ_s a sulypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Kényszerfeltétel: $\Delta x = R \Delta \varphi$ (a tömegközéppont elmozdulása egyenlő a korong elfordulása folytán a korongról lecsavarodó fonáldarab hosszával. A korong A kerületi pontja körül ugyanakkora $\Delta \varphi$ szöggel fordul el, mint középpontja körül). Ezért

$$a = R\beta$$

A három egyenletből β, a és K meghatározható:

$$\beta = \frac{mgR}{mR^2 + \Theta_s} ; \quad a = R\beta = \frac{mgR^2}{mR^2 + \Theta_s} ; \quad K = \frac{\Theta_s}{mR^2 + \Theta_s} mg.$$

$$\Theta_s = \frac{1}{2} mR^2\text{-el} \qquad \beta = \frac{2}{3}\frac{g}{R} ; \quad a = \frac{2}{3} g ; \quad K = \frac{1}{3} mg.$$

b) Ha a korongról ℓ hosszuságu fonaldarab csavarodott le, a korong sulypontja ennyivel süllyedt. A munkatétel szerint, mivel a kényszererő munkája zérus (elmozdulást nem hoz létre csak rögziti a pillanatnyi forgáscentrumot):

$$mg\ell = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \omega^2, \quad \text{és} \quad v = R\omega .$$

Tehát

$$v = 2\sqrt{\frac{g\ell}{3}}; \quad \omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{g\ell}{3}} .$$

2. Megoldás. A korong sikmozgása felfogható ugy is, mint az A momentán centrum körüli forgás. E pontra a külső erők nyomatéka $M = mg R$ és igy a forgás egyenlete:

$$\Theta_A \beta = mg R.$$

Steiner tétele szerint $\Theta_A = \Theta_s + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$, és $\beta = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$.

A tömegközéppont gyorsulása: $a = R\beta = \frac{2}{3} g$.

(Ez a megoldás a K kötélerőt közvetlenül nem szolgáltatja.)

b) Ha a korong sikmozgását a momentán centrum körül történő forgással irjuk le, akkor teljes kinetikus energiája forgási energia. A munkatétel szerint (a kötélerő nem végez munkát):

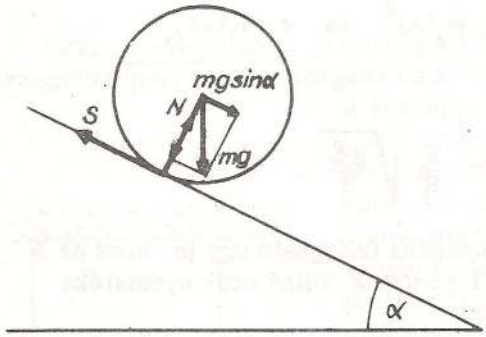
$$mg\ell = \frac{1}{2} \Theta_A \omega^2 = \frac{1}{2} (\Theta_s + m R^2)\omega^2.$$

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{g\ell}{3}}; \quad \text{és} \quad v = 2\sqrt{\frac{g\ell}{3}} .$$

222. A 221. példa megoldásánál követett eljárást alkalmazva:

$$\beta = \frac{2r}{R^2+2r^2} g = \frac{1}{3}\frac{g}{r}; \quad a = \frac{2r^2}{R^2+2r^2} g = \frac{1}{3} g; \quad K = \frac{R^2}{R^2+2r^2} mg = \frac{2}{3} mg.$$

223. 1. Megoldás. A korongra hat a tömegközéppontjában támadó mg függőleges irányu nehézségi erő, a lejtő által kifejtett, a lejtőre merőleges N reakcióerő, valamint a korongot a lejtővel érintkező pontjában támadó S nyugalmi surlódási erő (l. 83. ábra). Az N a nehézségi erőnek a lejtőre merőleges mg cos α összetevőjét kiegyensulyozza, így a mozgás szempontjából csak a lejtő irányu mg sin α összetevő hatásos. A korong kerületén ható S erő helyettesithető a tömegközéppontban támadó S erővel és M = S R nyomatéku erőpárral. A tömegközéppont haladó mozgását meghatározó mozgásegyenlet:



83. ábra

$$m\,a = m\,g \sin\alpha - S.$$

A sulypont körüli forgás egyenlete: $\Theta_s \beta = S\,r$.

Kényszerfeltételből $a = R\beta$.

$\Theta_s = m\,R^2$-el a 3 egyenletből $a = \frac{1}{2} g \sin\alpha$, és $v = \sqrt{2\,as} =$

$= \sqrt{g\,s \sin\alpha}$; $t = \sqrt{\frac{4s}{g \sin\alpha}}$; $s = \frac{a}{2} t^2$ alapján.

2. Megoldás. A munkatétel szerint, ha az s utnak megfelelő magasságkülönbség h:

$$mgh = \frac{1}{2} m\,v^2 + \Theta_s \omega^2,$$

amig a korong nem csuszik: $v = R\omega$:

Tehát $v = \sqrt{g \sin\alpha}$ és $t = \frac{2s}{v}$ -ből $t = \sqrt{\frac{4s}{g \sin\alpha}}$.

3. Megoldás. Ha a korong csuszás nélkül gördül, a lejtővel érintkező pontja nyugalomban van (momentán centrum).

$$\Theta_A \beta = R\,mg \sin\alpha,$$

$$\Theta_A = \Theta_s + m\,R^2, \qquad a = \frac{m\,R^2 \sin\alpha}{\Theta_s + m\,R^2}.$$

És az előzőek alapján folytathatjuk.

A mozgás ezen leirásánál a surlódási erő explicit módon nem kerül ugyan felszinre, mégis fel kell tételeznünk megfelelő nagyságu surlódási erő jelenlétét - szerepe az, hogy minden pillanatban mintegy "rögziti" a momentán centrumot. Munkatétel alapján

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,\Theta_A\,\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,h}{\Theta_A}}\,,$$ és az előzőek alapján kapjuk a keresett adatokat.

224. Az előző példában ismertetett számolások alapján eldönthető, hogy az a henger ér le hamarabb, amelyik tömege a tengelyhez közel van, azaz

$$\sqrt{\frac{3\,s}{g\,\sin\alpha}} < \sqrt{\frac{4\,s}{g\,\sin\alpha}}\,.$$

225. A 223. példában ismertetett számolások alapján, feltéve, hogy a golyó és a henger méretei azonosak:

$$t_{henger}(\text{tömör}) = \sqrt{\frac{3\,s}{g\,\sin\alpha}} \qquad t_{henger}(\text{üreges}) = \sqrt{\frac{4\,s}{g\,\sin\alpha}}\,.$$

$$t_{golyó} = \sqrt{\frac{14\,s}{5\,g\,\sin\alpha}}\,.$$

A tömegpont mozgásánál tanultak alapján:

$$t_{hasáb} = \sqrt{\frac{2\,s}{g\,\sin\alpha}}\,.$$

Az adatok alapján $t_1 = 0,37$ s; $t_2 = 0,08$ s.

226. A sulypont haladó mozgásának mozgásegyenlete:

$$m\,a = m\,g\,\sin\alpha - S.$$

A sulypont körüli forgás egyenlete

$$\Theta_s\,\beta = S\,r.$$

Kényszerfeltétel:

$$a = r\,\beta\,.$$

Ezekből:

$$\beta = 2\,\frac{r\sin\alpha}{R^2+2r^2}\,g\,; \quad a = 2\,\frac{r^2\sin\alpha}{R^2+2r^2}\,g\,; \quad S = \frac{R^2}{R^2+2r^2}\,mg\sin\alpha.$$

Ha $R = kr$;

$$\beta = \frac{1}{r}\,\frac{2}{k^2+2}\,g\sin\alpha \qquad a = \frac{2}{k^2+2}\,g\sin\alpha; \quad S = \frac{k^2}{k^2+2}\,mg\sin\alpha\,.$$

b) Minthogy a nyugalmi surlódási erő legnagyobb értéke $S_{max} = \mu_o\, mg\cos\alpha$, a korong csak addig nem csuszik a sineken, amig

$$S = \frac{k^2}{k^2+2}\,mg\sin\alpha \leq \mu_o\, mg\cos\alpha, \text{ azaz } tg\alpha \leq \frac{k^2+2}{k^2}\,\mu_o.$$

c) A munkatétel szerint $mgh = \frac{1}{2}\,\Theta_s\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\,v^2$ -ből, $v = r\omega$ felhasználásával

$$v^2 = \frac{2\,mghr^2}{\Theta_s + mr^2}\,; \quad \Theta_s = \frac{1}{2}\,m\,R^2 \text{ és } R = kr\text{-el},$$

$$v = 2\sqrt{\frac{gh}{k^2+2}}\,.$$

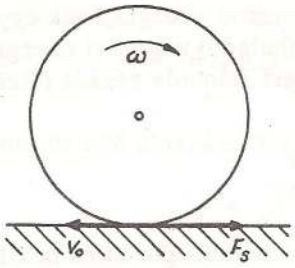
227. 1. Megoldás. A talajtérés pillanatában tengelye körül ω_o szögsebességgel forgó korong talajjal érintkező pontja a talajhoz képest (hátrafelé irányuló)

$$v_o = r\omega_o$$

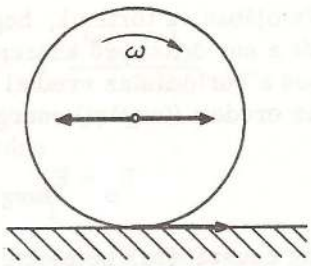
sebességgel rendelkezik, a talajon (hátrafelé) csuszik. Fellép a sebességgel ellentétes irányu (tehát előre irányuló)

$$F_s = \mu mg$$

csuszási surlódási erő (l. 84. ábra). A korong kerületén ható F_s erő helyettesithető ekvivalens, a tömegközéppontban támadó F_s erővel és az $M = F_s R$ nyomatéku erőpárral (l. 85. ábra). A tömegközéppontban támadó



84. ábra



85. ábra

F_s erő a tömegközéppontot gyorsitja:

$$m\,a = F_S = \mu m g\,; \qquad a = \mu g.$$

Az $M = F_s R$ nyomatéku erőpár a korong tengely körüli forgását lassitja:

$$\Theta_s \beta = F_s R \qquad \beta = \frac{\mu m g R}{\Theta_s}\,.$$

t idő alatt a tömegközéppont $v_t = a\,t$ sebességet ér el, tengely körüli forgásának szögsebessége viszont $\omega_t = \omega_o - \beta t$-re csökken. A korong talajjal érintkező kerületi pontjának (a talajhoz viszonyitott) sebessége ekkor $v = v_t - R\omega_t$. Ha ez a talajhoz viszonyitott sebesség zérus (a korong a talajon már nem csuszik) a surlódási erő megszünik, a tömegközéppont tovább már nem gyorsul.

$$v_t - R\omega_t = 0\,; \qquad a\,t - R\,(\omega_o - \beta t) = 0,$$

a tömegközéppont gyorsulásának ideje:

$$t = \frac{R\omega_o}{a + R\beta} = \frac{R\omega_o}{\mu g(\Theta_s + m\,R^2)}\,\Theta_s\,,$$

abroncs esetében $\Theta_s = m\,R^2$

$$v_t = a\,t = \mu g\,\frac{R\omega_o\Theta_s}{\mu g(\Theta_s + mR^2)} = \frac{R\omega_o}{2}$$

Ugy látszik, hogy itt a korongot (a korong sulypontját) a passziv surlódási erő gyorsitja fel v sebességre.

Valójában az történik, hogy a korong forgási energiájának egy része alakul át a surlódási erő közremüködésével (haladó) mozgási energiává, miközben a surlódás az eredeti forgási energia jelentős részét fölemészti.

Az eredeti (forgási) energia:

$$E_o = E_{forg} = \frac{1}{2} \Theta_s \omega_o^2 .$$

A korong csuszásának befejeztével (a csuszás nélküli gördülés beálltával) a korong kinetikus energiája:

$$E_1 = E_{1\,forg} + E_{1\,mozg} = \frac{1}{2} \Theta_s \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 .$$

Tömör korong esetében $\Theta_s = \frac{1}{2} m R^2$ és $\omega_1 = \frac{\omega_o}{3}$,

$$E_o - E_1 = \frac{1}{4} m R^2 \omega_o^2 - \frac{1}{4} m R^2 \frac{\omega_o^2}{9} - \frac{1}{2} m R^2 \frac{\omega_o^2}{9} = \frac{2}{3} E_o .$$

Csuszás közben az eredeti energia 2/3 része felemésztődik!

2. Megoldás. A feladatot a munkatétel alkalmazásával is megoldhatjuk. A korong kinetikus energiája kezdetben

$$E_o = \frac{1}{2} \Theta_s \omega_o^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega_o^2 .$$

A tiszta gördülés bekövetkeztével $v_1 = R\omega_1$ és az energia

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \omega_1^2 = \frac{3}{4} m R^2 \omega_1^2 .$$

Az energia változás

$$E_o - E_1 = L_s = \frac{1}{4} m R^2 (\omega_o^2 - 3\omega_1^2) ,$$

egyenlő a csuszási szakaszban a surlódási erő ellenében végzett munkával. Csuszás közben a surlódási erő $F_s = \mu mg$. Azt kell kiszámitani, mekkora a korong (talajjal érintkező pontjának) a talajon történő relativ elcsuszása. A korong talajjal érintkező pontja a sulypont körüli forgás következtében hátrafelé

$$s_1 = R\left(\omega_o t - \frac{\beta t^2}{2}\right) = R\,\frac{\omega_o - \omega_1}{2}\,t,$$

a sulypont haladó mozgása következtében előre

$$s_2 = \frac{a}{2}t^2 = \frac{v_1}{2}t = R\,\frac{\omega_1}{2}\,t$$

szakaszon csuszik. A talajon való elcsuszás

$$s = s_1 + s_2 = R\,\frac{\omega_o}{2}\,t,$$

$$a\,t = v_1 = R\omega_1 \text{ -ből } \quad t = \frac{R\omega_1}{a}.$$

$$a = \frac{F_s}{m} = \mu g\text{-ből} \quad t = \frac{R\omega_1}{\mu g} \quad \text{és} \quad s = R^2\,\frac{\omega_o\omega_1}{2\mu g}.$$

A surlódási munka: $L_s = F_s \cdot s = m\mu g R^2 \dfrac{\omega_o\omega_1}{2\mu g} = \dfrac{m R^2}{2}\,\omega_o\omega_1$.

Ez $E_o - E_1$-el egyenlő.

$$\frac{1}{4}\,m R^2(\omega_o^2 - 3\omega_1^2) = \frac{1}{2}\,m R^2\omega_o\omega_1, \qquad \text{innen}$$

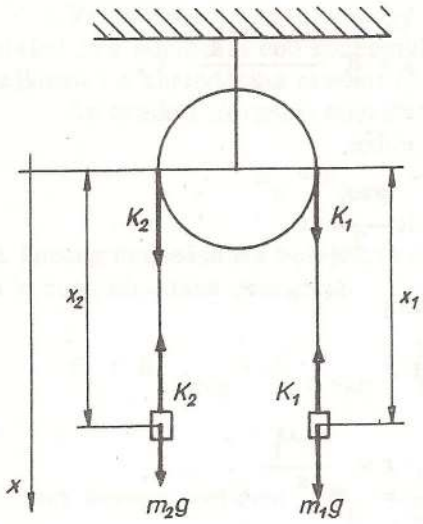
$$3\omega_1^2 + 2\omega_o\omega_1 - \omega_o^2 = 0 \quad \text{és} \quad \omega_1 = \begin{cases} \dfrac{\omega_o}{3} \\ -\omega_o \end{cases}.$$

228. <u>1. Megoldás.</u> Mozgásegyenletek: (l. 86. ábra)

$$m_1 a_1 = m_1 g - K_1,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K_2,$$

$$x_1 + x_2 = \text{állandó, ezért } a_1 + a_2 = 0$$



86. ábra

Ha az óramutató járásával egyező forgásirányt vesszük pozitivnak

$$\Theta\beta = (K_1 - K_2)\, r, \quad \text{és} \quad r\beta = a_1 .$$

Ezekből:

$$a = a_1 = -a_2 = \frac{(m_1 - m_2)\, g\, r^2}{(m_1 + m_2) r^2} =$$

$$= 2,8 \text{ m/s}^2.$$

$$K_1 = m_1 (g - a) = 2,8 \text{ N};$$

$$K_2 = m_2 (g + a) = 1,26 \text{ N}$$

2. Megoldás: Tegyük fel, hogy az m_1 tömegü test a gyorsulással mozog lefelé, akkor az m_2 ugyanilyen gyorsulással mozog fölfelé. Az m_1 tömegü test a fonalat

$$K_1 = m_1 (g - a),$$

az m_2 tömegü test

$$K_2 = m_2 (g + a)$$

erővel fesziti. $K_1 \neq K_2$. A két erő különbsége szolgáltatja a korong forgatásához szükséges nyomatékot.

$$(K_1 - K_2)\, r = \Theta\beta, \quad \text{ahol} \quad \beta = \frac{a}{r},$$

$$(m_1 - m_2) g\, r - a(m_1 + m_2)\, r = \Theta \frac{a}{r},$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g\, R^2}{r^2 (m_1 + m_2)} .$$

Behelyettesitve az előző eredményt kapjuk.
A fonalat feszitő erő az egész fonál mentén csak az esetben egyenlő ($K_1 = K_2$), ha a korong tömege elhanyagolható ($\Theta = 0$).

3. Megoldás. Alkalmazzuk a munkatételt.

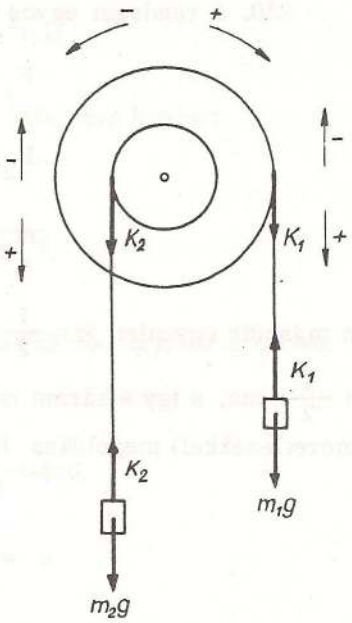
229. 1. Megoldás.

A mozgásegyenletek: (l. 87. ábra).

$$m_1 a_1 = m_1 g - K_1 ,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K_2 ,$$

$$K_1 R - K_2 r = \Theta\beta , \quad a_1 = R\beta , \quad a_2 = -r\beta .$$



87. ábra

Ezekből

$$\beta = \frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + \Theta} g ,$$

$$K_1 = m_1(g - a_1), \quad a_1 = \frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + \Theta} R g .$$

$$K_2 = m_2(g - a_2), \quad a_2 = -\frac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + \Theta} r g .$$

2. Megoldás: Tegyük fel, hogy az m_1 tömegü test $a_1 = R\beta$ gyorsulással mozog lefelé, akkor az m_2 tömegü test $a_2 = r\beta$ gyorsulással mozog fölfelé. Az m_1 tömegü test a fonalat

$$K_1 = m_1 (g - a_1),$$

az m_2 tömegü test

$$K_2 = m_2 (g + a_2)$$

erővel fesziti.

$$K_1 R - K_2 r = \Theta\beta .$$

Ezekből az egyenletekből az előző megoldással azonos eredményeket kap.

3. Megoldás: Alkalmazzuk a munkatételt.

230. A rendszer egyes tagjaira a mozgásegyenletek: (l. 88. ábra)

$$F_1 - F_s = m_1 a ,$$

$$F_2 r - F_1 r = \Theta\beta ,$$

$$m_2 g - F_2 = m_2 a .$$

A második egyenlet $\Theta = \frac{1}{2} mr^2$ és $\beta = \frac{a}{r}$ segitségével $F_2 - F_1 = \frac{1}{2} ma$, s igy a három ismeretlenes egyenletrendszer (a, F_1, F_2 ismeretlenekkel) megoldása $F_s = \mu m_1 g$ helyettesitéssel:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m} g ,$$

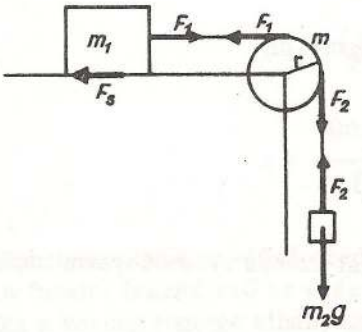
$$F_1 = m_1 g \frac{m_2 (1 + \mu) + m \frac{\mu}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} ,$$

$$F_2 = \frac{m_1 m_2 (1 + \mu) + \frac{1}{2} m m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g .$$

A mozgás feltétele: $a > 0$-ből, $m_2 - \mu m_1 > 0$, $m_2 > \mu m_1$.

Érdekes eredmény, hogy $a = 0$ esetén

$$F_1 = F_2 = m_2 g .$$



88. ábra

231. A rendszer impulzusmomentuma kezdő időpontban

$$|\bar{N}| = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega_0 .$$

Mivel külső erő nem gyakorol forgatónyomatékot, ugyanekkora az impulzusmomentum az ember A helyzetében:

$$|\bar{N}| = (\frac{1}{2} m_1 r^2 + m_2 x^2)\omega.$$

A két kifejezést egyenlővé téve és belőle ω-t kifejezve kapjuk:

$$\omega = \omega_0 \frac{m_1 r^2}{m_1 r^2 + 2m_2 x^2}.$$

232. A rendszer összimpulzusmomentuma zérus. Igy, ha a korong szögsebességét ω_1-gyel jelöljük,

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega_1 + m_2 r^2 (\omega_1 - \omega) = 0.$$

Ebből ω_1-et kifejezve, kapjuk:

$$\omega_1 = - \frac{m_2 r^2 \omega}{\frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_2 r^2}.$$

233. Ha a kis korong β szöggyorsulással forog, a fonalat olyan K erő fesziti, hogy

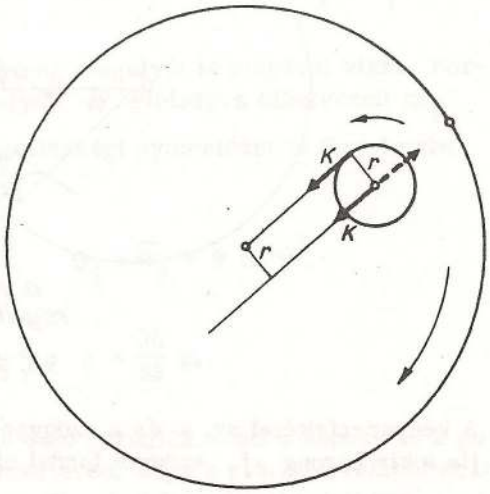
$$K r = \Theta_1 \beta.$$

(l. 89. ábra). A kis korong kerületén ható K erő helyettesithető a kis korong középpontjában támadó K erővel és egy M = K r nyomatéku erőpárral. A kis korong középpontjában támadó K erő a nagy korong középpontjára vonatkozólag M' = - K r forgatónyomatékot ad. Igy a nagy korong szöggyorsulását a

$$- K r = \bar{\Theta}_2 \gamma$$

összefüggés határozza meg.

$$\Theta_1 \beta = - \bar{\Theta}_2 \gamma.$$



89. ábra

Ezt az összefüggést természetesen abból is megkaphatjuk, hogy a fonál által kifejtett külső erő a rendszer forgástengelyére vonatkozólag nem ad forgató nyomatékot - hiszen a fonál átmegy a forgástengelyen - ezért a rendszerre érvényes a forgásmennyiség megmaradása:

$$\Theta_1 \omega_1 + \bar{\Theta}_2 \omega_2 = \text{állandó} ,$$

innen differenciálással

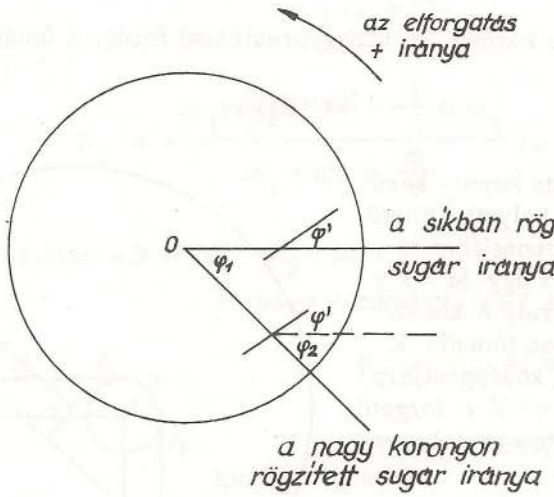
$$\Theta_1 \beta + \bar{\Theta}_2 \gamma = 0 .$$

A mozgásegyenletek:

$$m a = mg - K ,$$

$$\Theta_1 \beta = K r ,$$

$$\bar{\Theta}_2 \gamma = - K r .$$



90. ábra

A kényszerfeltétel az a és a szöggyorsulások között szolgáltat összefüggést. Ha a kis korong φ_1 szöggel fordul el a rögzitett 0a egyeneshez képest és a nagy korong elfordulása ugyanezen rögzitett egyeneshez képest φ_2,

(l. 90. ábrát) akkor a kis korong elfordulása a nagy kononghoz (a nagy korongon megrajzolt sugárhoz) képest - a forgásirányokat is figyelembe véve

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 , \quad \ddot{\varphi} = \beta - \gamma .$$

A fonál lecsavarodását a kis korongnak a nagy koronghoz viszonyitott elfordulása szabja meg, igy

$$a = r(\beta - \gamma) .$$

A négy egyenletből

$$\beta = \frac{m g r}{\Theta_1 + m r^2 (1 + \frac{\Theta_1}{\bar{\Theta}_2})} = \frac{m g r \bar{\Theta}_2}{\Theta_1 \Theta_2 + m r^2 (\Theta_1 + \bar{\Theta}_2)} ,$$

$$\gamma = - \frac{m g r}{\bar{\Theta}_2 + m r^2 (1 + \frac{\bar{\Theta}_2}{\Theta_1})} = \frac{m g r \Theta_1}{\Theta_1 \bar{\Theta}_2 + m r^2 (\Theta_1 + \bar{\Theta}_2)}$$

$$a = \frac{m g r^2}{\Theta_1 \bar{\Theta}_2 + m r^2 (\Theta_1 + \bar{\Theta}_2)} (\Theta_1 + \bar{\Theta}_2).$$

$\Theta_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2$ és $\Theta_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2$ - tel $\bar{\Theta}_2 = \Theta_2 + m_1 \ell^2$

A nagy korong forgása közben a kis korong tengelyét is magával viszi. Forgásának leirásánál tehát a forgástengelytől ℓ távolságra elhelyezett m_1 tömegpontból származó $m_1 \ell^2$ tehetetlenségi nyomatékot is figyelembe kell venni!

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} m r^2, \quad \bar{\Theta}_2 = \frac{17}{2} m r^2, \quad \Theta_1 + \bar{\Theta}_2 = 9 m r^2.$$

$$\beta = \frac{34}{53} \frac{g}{r}; \quad \gamma = - \frac{2}{53} \frac{g}{r} ; \quad a = \frac{36}{53} g.$$

234. Az alkotó menti csatornában való gördülés miatt a kupnak és a golyónak a szögsebessége azonos. Ez abból ered, hogy a csatorna falából származó erő, mint belső erő hat a golyóra. Ez az erő ismeretlen nagyságu, ezért az energiatételt nem alkalmazhatjuk a szögsebesség számitására.

Az impulzusnyomaték tételben viszont a belső erők nem szerepelnek, ezért ezt alkalmazhatjuk. A külső erő, azaz a nehézségi erőnek a függőleges tengelyre vonatkozó nyomatéka zérus, tehát az impulzusnyomaték állandó:

$$\Theta\omega_o = (\Theta + mR^2)\omega,$$

ahonnan

$$\omega = \frac{\Theta}{\Theta + mR^2}\omega_o.$$

235. Ha a rendszer tehetetlenségi nyomatéka akkor, mikor az m_1 tömegpont még a korong kerületén van Θ, mikor a tömegpont már a centrumban van $\Theta_1 < \Theta$ és ekkor a rendszer szögsebessége $\omega_1 > \omega$, a forgásmennyiség (impulzusnyomaték) megmaradása miatt

$$\Theta\omega = \Theta_1\omega_1.$$

A kinetikus energia megváltozása

$$\frac{1}{2}(\Theta\omega_1^2 - \Theta\omega^2) = \frac{1}{2}\Theta\omega^2\left(\frac{\Theta}{\Theta_1} - 1\right) > 0.$$

A kinetikus energia megváltozása adja a végzett munkát

$$L = \frac{1}{2}\Theta\omega^2\left(\frac{\Theta}{\Theta_1} - 1\right).$$

Ha a korong tehetetlenségi nyomatéka Θ_o, akkor

$$\Theta = \Theta_o + m_1R^2, \text{ és } \Theta_1 = \Theta_o,$$

$$L = \frac{1}{2}(\Theta_o + m_1R^2)\frac{\Theta - \Theta_o}{\Theta_o}\omega^2 = \frac{1}{2}(\Theta_o + m_1R^2)\frac{m_1R^2}{\Theta_o}\omega^2.$$

Megjegyzés: Az m_1 tömegpontot belső erővel is a forgáscentrumba hozhatjuk (pl. forgózsámolyon ülve kinyujtott kezünkben tartott sulyzót kezünk behajlitásával a forgáscentrum felé közelitjük). Ugyanezt elérhetjük külső erő alkalmazásával is (pl. ugy, hogy az átfurt tengelyen az m_1 tömegpont-

hoz kötött fonalat vezetünk keresztül, s azt a tengely irányába huzzuk). Minthogy a tömegpont centrumba hozatalához sugárirányu erőt kell kifejteni, ennek forgatónyomatéka a forgástengelyre vonatkozólag külső erő esetében is zérus. A forgásmennyiség (impulzusnyomaték) megmaradás tétele alkalmazható.

236. 1. Megoldás. Külön-külön felirhatjuk a korong és a fonál végére függesztett test mozgását leiró mozgásegyenleteket.

$$m\,a = m\,g - K\,,$$

$$\Theta\beta = K\,r.$$

Ha a fonál nyujthatatlan érvényes még a $a = r\beta$ összefüggés (kényszerfeltétel) is.
Ezekből

$$\beta = \frac{m\,g\,r}{\Theta + m\,r^2}\,; \qquad a = \frac{m\,g\,r^2}{\Theta + m r^2}.$$

$v^2 = 2\,ah$ és $v = r\omega$ összefüggésekből $h = 0,86$ m.

2. Megoldás. Tegyük fel, hogy a korong β szöggyorsulással forog. Ekkor a fonal végére függesztett test $a = r\beta$ gyorsulással mozog lefelé, igy a fonalat

$$K = m\,(g - a)$$

erővel fesziti. A K erő szolgáltatja a korong gyorsitását előidéző forgató nyomatékot:

$$m\,(g - a)\,r = \Theta\beta = \Theta\,\frac{a}{r}$$

Ebből a ill. $\beta = \frac{a}{r}$ meghatározható. Továbbiakban az előző megoldással azonos módon járunk el.

3. Megoldás. Az energiamegmaradás elvét alkalmazva, mivel az időtől független kényszer (kötélerők) összes munkája zérus:

$$\frac{1}{2}\,m\,.\,\omega^2\,r^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 = mgh\,.$$

Innen

$$h = \frac{(mr^2 + \Theta)\omega^2}{2\,mg} = 0,86\ \text{m}.$$

237. Az előző példa megoldásaihoz hasonló módon számolva:

$$\omega = 16\ s^{-1}.$$

238. A rendszer összenergiája:

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{r_1^2}\right)\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}Dx^2.$$

A mozgásegyenletet idő szerinti deriválással kapjuk:

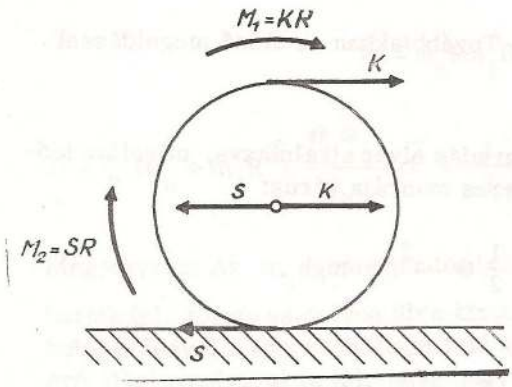
$$\left(m + \frac{\Theta}{r_1^2}\right)\ddot{x} - mg + Dx = 0.$$

Innen a gyorsulás

$$x = \frac{mg}{m + \frac{\Theta}{r_1^2}} - \frac{Dx}{m + \frac{\Theta}{r_1^2}}.$$

A gyorsulás egy konstanstól eltekintve a kitéréssel arányos. Ez rezgőmozgást eredményez, melynek lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{\Theta}{r^2}}{D}}.$$



91. ábra

239. Ha a fonalat feszitő erő K és a korong és lap között fellépő nyugalmi surlódási erő irányát a K irányával ellentétesnek vesszük fel, (l. 91. ábrát) a mozgásegyenletek

$$m_1 a_1 = m_1 g - K.$$

A korong tömegközéppontjának haladó mozgására

$$m\,a = K - S\,.$$

A korong tömegközéppont körüli forgására

$$\Theta_s \beta = M_1 + M_2 = (K + S)\,R.$$

Kényszerfeltételek $a = R\beta$, $a_1 = a + R\beta$

(az m_1 függőleges elmozdulását a korong tömegközéppontjának elmozdulása és a tömegközéppont körül történt forgás folytán a korongról lecsavarodó fonáldarab együttesen adja meg).
Ezekből:

$$\beta = \frac{2\,m_1\,R}{\Theta_s + 4\,m_1 R^2 + mR^2}\,g\,; \quad a = \frac{2\,m_1\,R^2}{\Theta_s + 4\,m_1 R^2 + mR^2}\,g;$$

$$K = \frac{\Theta_s + mR^2}{\Theta_s + 4\,m_1 R^2 + mR^2}\,m_1 g\,; \quad S = \frac{\Theta_s - m\,R^2}{\Theta_s + 4m_1 R^2 + mR^2}\,m_1 g\,.$$

Ha $\Theta_s = \frac{1}{2} m\,R^2$, akkor

$$\beta = \frac{4\,m_1}{3\,mR + 8\,m_1 R}\,g; \quad a = \frac{4\,m_1}{3\,m + 8\,m_1}\,g;$$

$$K = \frac{3\,m}{3m + 8m_1}\,m_1\,g; \quad S = \frac{m}{3\,m + 8m_1}\,m_1 g.$$

A tömegközéppontot a

$$K - S = \frac{4m}{3m + 8\,m_1}\,m_1 g$$

erő gyorsitja. (A kapott eredmény mutatja, hogy a surlódási erő felvett iránya a ténylegesen fellépő surlódási erő irányával ellentétes, vagyis a fellépő surlódási erő a K erővel egyező irányu. A surlódás belesegit a tömegközéppont gyorsitásába!)

b) A tiszta gördülés feltétele az, hogy a fellépő surlódási erő (abszolut értéke) μ_o mg-nél kisebb legyen

$$\frac{m}{3\,m + 8\,m_1} m_1 g \leq \mu_o mg, \quad \frac{m_1}{3\,m + 8\,m_1} \leq \mu_o .$$

240. Mozgásegyenleteket felirva:

$$\Theta_A \beta = K(R-r) + mg\ R ,$$

$$m_1 a_1 = m_1 g - K.$$

A kényszerfeltétel: $a_1 = (R - r)$.

Ezekből: $K = m_1 g - m_1 (R - r)\beta$

$$\beta = \frac{m_1 (R - r) + m R}{\Theta_A + m_1 (R - r)^2} g = 0,36 \frac{g}{r} .$$

$\Theta_A = \frac{3}{2} m R^2$. (Steiner tétellel számitva)