Anyagi pont dinamikája

Egy tömegpont mozgásegyenletét Newton II. axiómája szolgáltatja:

$$\overline{F} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2},$$

ahol $\overline{F}$ a tömegpontra ható erők eredője, $\frac{d^2r}{dt^2}$ a tömegpontnak az inercia-rendszerhez képest mért gyorsulása. Ez a kezdeti helyzet és kezdősebesség ismeretében egyértelmüen meghatározza az

$$\overline{r} = \overline{r}\ (t)$$

egyenletet, vagyis a mozgás időbeli lefolyását.

Egyenesvonalu lesz a mozgás, ha az anyagi pontra a sebességével párhuzamos erő hat.

Minden más esetben görbevonalu mozgás jön létre, és az erő minden pontban felbontható

$$F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{és} \qquad F_n = m\frac{v^2}{R}$$

tangenciális és normális erőkomponensekre, melyek a korábban megismert a_t - t és a_n-et hozzák létre. A tangenciális erő a sebesség nagyságát változtatja meg, a normális vagy más néven centripetális erő pedig a pálya görbültségét okozza.

Egy m tömegü $\overline{v}$ sebességü anyagi pont <u>impulzusán</u> vagy mozgásmennyiségén az

$$\overline{I} = m\,\overline{v}$$

mennyiséget értjük.

Az impulzustétel szerint

$$\bar{I} - \bar{I}_o = \lim_{\Delta t_i \to o} \sum \bar{F}_o \, \Delta t_i = \int_{t_o}^{t} \bar{F} \, dt \, .$$

Ha az erő az időben állandó, akkor a tételt a következő egyszerűbb alakban használhatjuk:

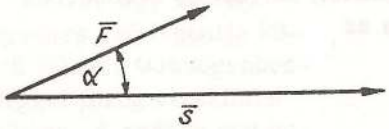
$$m \bar{v} - m \bar{v}_o = \bar{F} (t - t_o) \, .$$

Ha egy tömegpontra állandó erő hat és ennek hatására s elmozdulást végez, akkor a munka:

$$W = \bar{F} \bar{s} = F \, s \cos \alpha ,$$

(lásd 9. ábra) vagy derékszögű komponensekkel kifejezve

$$W = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z \, .$$



9. ábra

Ha az erő a mozgás folyamán változik, akkor

$$W = \lim_{\Delta s \to o} \sum_{A}^{B} F_s \, . \, \Delta s = \int_{A}^{B} F_s \, d s .$$

A teljesitmény $P = \frac{dW}{dt}$ egyenletes munkavégzés esetén "az időegység alatt végzett munkát" jelenti.

Az anyagi pont rendelkezhet helyzeténél fogva is energiával, az un. helyzeti, vagy potenciális energiával. Helyzeti energiáról természetesen csak a vonatkoztatási pont megadásával együtt van értelme beszélni, mert a helyzeti energia egyenlő avval a munkával, amit a testre ható erő végez, amig a test adott helyéről a vonatkoztatási pontul választott helyre jut.

Az m tömegü v sebességü anyagi pont mozgási (kinetikus) energiája

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \, .$$

A végzett munka mindig egyenlő a mozgási energia megváltozásával. A mozgási és helyzeti energiák összegét mechanikai összenergiának nevezzük.

A mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$W = W_{pont} + W_{kin} = \text{állandó.}$$

Ez akkor érvényes, ha az erő a térkoordináták függvénye, de az időtől közvetlenül nem függ, és ha a végzett munka csak a kezdő és a véghelyzet függvénye. (Konzervativ erő.)

Feladatok

76. A 10 000 tonnás óceánjáró hajtóművének mekkora erőt kell kifejtenie, hogy az 54 km/h sebességü hajó 1250 m-es uton megálljon?

77. Egy 5 kg tömegü testre állandó 10 N nagyságu erő hat az 5 m/s kezdősebességgel megegyező irányban. Az erőhatás kezdetétől számitott 15 s mulva mekkora lesz a test sebessége és mekkora utat tesz meg ez alatt az idő alatt?

78. G = 15 kp sulyu terhet álló helyzetből egyenletesen gyorsitva függőlegesen 9 m magasságra emelünk.

a) Mekkora a gyorsulás, ha a végsebesség 6 m/s?
b) Mekkora erő szükséges a mozgatáshoz?
c) Mennyi ideig tart a mozgás és mekkora az átlagsebesség az utolsó s-ban?

79. Egy 2,45 kg-os test 11 m/s^2 gyorsulással függőlegesen lefelé esik. Mekkora erő hat a testre a Föld vonzóerején kivül?

80. Mekkora erővel emelhetünk 10 m magasra egy 50 kg-os testet 2 s alatt egyenletesen gyorsitva?

81. Mekkora erővel kell egy 15 Mp sulyu kocsit tolni, hogy álló helyzetből 80 s alatt 3 m/s sebességet érjen el?

a) A surlódás tekintetbevétele nélkül,
b) 0,01 surlódási együttható figyelembevételével.

82. Egy autót 4 m/s^2 gyorsulással inditanak. A vezető az 5. másodperc végén akadályt pillant meg és 1 s telik el a cselekvésig. Hány métert halad az autó az akadály megpillantása után, ha a fék a kerekeket teljesen lefékezi? Mennyit haladt volna, ha a vezető azonnal fékez? A lefékezett autó és az uttest közötti surlódási tényező 0,5.

83. A gépkocsi 10 m/s sebességgel fut sima, vizszintes uton. Ha kikapcsoljuk a motort, ekkor a gépkocsi 150 m-t tesz meg és megáll. Mennyi ideig mozgott a gépkocsi leállitott motorral és mekkora a surlódási együttható?

84. 12,5 tonnás trolibusz állóhelyzetből indul meg és 3 s alatt 15 km/h sebességet ér el. Mekkora vonóerőt fejt ki a trolibusz motorja, ha a mozgás egyenletesen gyorsuló, és ha feltesszük, hogy az ellenállás a trolibusz sulyának 2 %-a?

85. Vizszintes utszakaszon egy mozdony 20 000 kp állandó huzóerőt fejt ki. 600 m távolságon az 1250 tonnás szerelvény sebessége 32,4 km/h-ról 54 km/h-ra növekedett. Mekkora erő forditódik az ellenállások leküzdésére?

86. Álló teherautó közepén fekszik egy láda. Az autó s uton egyenletesen gyorsulva v sebességre tesz szert. Mekkora legyen a surlódási együttható, hogy a láda ne csusszék meg?

87. Vizszintes talajon egy testet F_1 erő a_1, F_2 erő a_2 gyorsulással mozgat. Mekkora a test tömege? Mekkora a surlódási erő? Mekkora a surlódási együttható? ($F_1 = 5N$, $F_2 = 3N$, $a_1 = 0,6\ m/s^2$, $a_2 = 0,2\ m/s^2$.)

88. Teherautó induláskor t idő alatt éri el a v_o sebességet. Mennyivel csuszik hátra a rakfelületen fekvő láda, ha a láda és a rakfelület között a surlódási együttható μ? Legyen $v_o = 54$ km/h, $\mu = 0,3$ és $t = 4,8$ s.

89. Egy vasutikocsi rakománya és a kocsi padlója közötti surlódási együttható 0,2. A kocsi sebessége 25 m/s. Mekkora az a legrövidebb távolság, amelyen belül a kocsit a rakomány megcsuszásának veszélye nélkül állithatjuk meg?

90. Vasuti vontató tömege m = 60 tonna, legnagyobb vonóereje F = 600 kp. A vontatott szerelvény összes tömege $m_s = 180$ tonna, a vontatási ellenállás tényezője: $\mu = 0,01$.

a) Milyen hosszu uton képes felgyorsitani a szerelvényt v = 70 km/h sebességre egyenletes gyorsulással?

b) Mennyi a gyorsulás ideje?

c) Mekkora fékezőerőre van szükség ahhoz, hogy a szerelvény s_f = 1500 m hosszu uton álljon meg?

d) Mennyi a megállás ideje?

91. Egy tehergépkocsi vaslemez boritásu rakodószintjére M = 1200 kg tömegü transzformátort helyeznek. A "nagy súlyra való tekintettel" nem kötözik le.

a) Milyen nagy gyorsulással indulhat a vezető, hogy a szállitandó darab meg ne csusszon? (μ = 0,1)

b) Ezzel a gyorsulással hány m hosszu ut befutása után ér el v = 30 km/h sebességet?

c) Mekkora vonóerő szükséges ekkora gyorsulás biztositásához, ha a gépkocsi tömege M_k = 3800 kg és a vontatási ellenállás együtthatója μ_v = 0,04?

Megjegyzés: a vontatási ellenállást a surlódáshoz hasonlóan arányosnak vesszük a nyomóerővel, a pályaellenállást szintén.

92. Személyautó v = 32 km/h sebességgel halad. Tőle s = 48 m távolságban hirtelen akadály bukkan fel.

a) Mekkora gyorsulással kell mozognia, hogy az előirt uton megálljon?

b) Ha a kerék és a talaj közöt a surlódási tényező μ = 0,1, elérhető-e ez a gyorsulás megcsuszás nélküli fékezéssel?

93. M = 500 tonna tömegü vonat v = 72 km/h sebességgel halad. A vonat m_1 = 400 tonna és m_2 = 100 tonna tömegre szakad szét; a mozdony huzóereje változatlan. Mekkora távolságra van egymástól a két vonatrész a hátsó rész megállásának pillanatában, ha a surlódási együttható μ =0,01?

94. Egy villamos v_1 = 34 km/h sebességgel haladva, épités alatt álló felüljáróhoz ér, amelyen sebessége legfeljebb v_2 = 5 km/h lehet.

a) A fékezést az átjáró előtt s = 80 m-rel kezdve meg, mennyi a fékezési idő?

b) Mekkora a villamos lassulása és a szükséges fékező erő, ha össztömege m = 12 500 kg és μ = 0,01?

95. Milyen nagynak kell lennie minimálisan az autó hajtókerekeinek gumiabroncsai és az ut közötti surlódási együtthatónak, ha a 2 tonna tömegü és 4 Mp terhelésü autó 0,2 m/s^2 gyorsulást kap?

Vizsgáljuk a feladatot két esetre: 1. Valamennyi kerék hajtókerék;

2. csak a hátsó kerekek hajtókerekek. Vegyük tekintetbe, hogy az autó sulypontja a tengelyek között középen, a teher sulypontja pedig a hátsó tengely felett fekszik.

96. Vizszintes deszkán fekszik egy sulyos test. A deszka és a teher közötti surlódási együttható 0,1. Mekkora gyorsulást kell adnunk vizszintes irányban a deszkának, hogy a teher lemaradjon róla?

97. Egy asztalon 1 kp sulyu deszka, a deszkán 2 kp sulyu teher fekszik. Mekkora F erővel kell hatni a deszkára, hogy az a teher alól kicsusszék? A teher és a deszka közötti surlódási együttható 0,25, a deszka és az asztal közötti surlódási együttható pedig 0,5.

98. Vizszintes sikon fekvő 2 kp sulyu teherhez fonalat erősitünk. A fonál 10 kp-os huzóerőnél szakad el. A surlódási tényező a teher és a sik között 0,1. Határozzuk meg azt a legnagyobb vizszintes irányu gyorsulást, amelyet ennek a fonálnak a segitségével a tehernek adhatunk.

99. Egy 10 m hosszu 30°-os surlódásmentes lejtőn mennyi idő alatt csuszik le a lejtő tetejére helyezett test? Mekkora sebességgel érkezik a lejtő aljára?

100. Egy faltól 50 cm-re levő, a talajon fekvő egyenesen át különböző hajlásszögü sikokat támasztunk a falnak. Mekkora szög mellett csuszik le egy test a sikon a faltól indulva 0,6 s alatt? Mekkora szög mellett legrövidebb a csuszási idő?

101. Egy pontszerü test α hajlásszögü lejtő A pontjából indulva surlódás nélkül csuszik le a lejtőn. Mekkora legyen az α szög, hogy a pont a legrövidebb idő alatt a legmesszebbre távolodjék el az A-n átmenő függőleges egyenestől?

102. 10 N sulyu test a vizszinteshez 30° hajlási ferde sikon csuszik le. Mekkora a gyorsulása, ha a csuszó surlódási együttható 0,2?

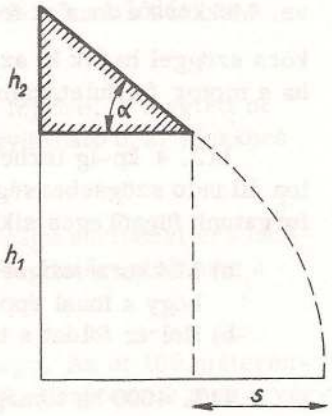
103. Az 1,5 Mp sulyu gépkocsit a 0,2 emelkedésü lejtőn a fék még éppen tartani tudja. Mekkora vizszintes utszakaszon áll meg az ugyanilyen mértékben meghuzott fék hatására a 43,2 km/h sebességgel haladó gépkocsi?

104. Megrakott $m_1 = 420$ kg tömegü csille $\alpha = 8^{\circ}$-os lejtős pályán lefelé indul. Rakománya $m_2 = 560$ kg. A pálya ellenállási tényezője $\mu = 0,08$.

a) Mekkora a gyorsulása?
b) Mekkora a sebessége $s_1 = 600$ m ut befutása után?
c) Hány m hosszu ut befutása után kell megkezdeni a fékezést, ha azt akarjuk, hogy a kocsi $v_3 = 6$ m/s-nál jobban ne gyorsuljon fel?
d) Mekkora fékezőerőt kell alkalmazni a $v_3 = 6$ m/s állandó sebesség fenntartására?
e) Mennyi idő alatt fut le a kocsi a lejtőn, ha annak hossza $s_2 = 900$ m, és a $v_3 = 6$ m/s elérése után ezzel az állandó sebességgel halad tovább?

105. Egy kerékpáros v sebességgel α hajlásszögü lejtő aljához érkezik. Milyen magasra ér fel a lejtőn a kerékpár hajtása nélkül, ha a surlódási tényező μ és a közegellenállástól eltekintünk? Adatok: $\alpha = 6^o$, v = = 18 km/h, $\mu = 0,01$.

106. Vizszintes sik fölött h_1 magasságban α hajlásszögü h_2 magasságu lejtőt helyezünk el. Ennek tetejéről test csuszik le, mely a vizszintesen mérve a lejtő csucsától s távolságban csapódik le (10. ábra). Mennyi a lejtő és a test között a surlódási együttható? ($\alpha = 45^o$, $h_1 = 24$ m, $h_2 = 10$ m, s = 12 m.)

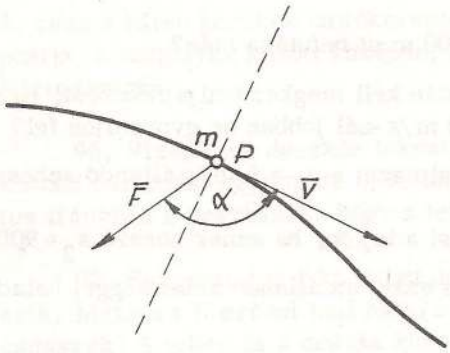


10. ábra

107. Egy m tömegü anyagi pont sima vizszintes sikon v_o kezdősebességgel egyenesvonalu mozgást végez a ráható állandó vizszintes irányu F erő hatására. Mennyi idő mulva lesz sebessége nv_o? (n egész számot jelöl.)

108. Egy m tömegü anyagi pont vizszintes sikon, egyenes mentén mozog. A mozgás irányában egy állandó nagyságu F erő hat rá. Mekkora uton növekszik a test sebessége a kezdeti v_o érték n-szeresére?

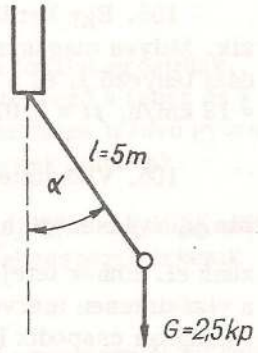
109. M = 2 tonna tömegü kalapács h = 1 m magasságból ráesik az üllőn elhelyezett fémtömbre. A tömb deformációja $\Delta t = 0,01$ s alatt végbemegy. Mekkora F közepes nyomóerőt fejt ki a kalapács a fémtömbre?



11. ábra

110. m = 2 kg tömegü anyagi pont görbevonalu pályát ir le (11. ábra). Adott időpontban a P pontban van és sebessége v = 3 m/s. Ekkor a pontra ható erő F = 5 kp nagyságu és a sebesség irányával $\alpha = 120^{o}$-os szöget zár be. Határozzuk meg a pálya P pontbeli görbületi sugarát és pályamenti gyorsulását.

111. 5 m hosszu fonálon függő 2,5 kp sulyu fémgömb egy motor tengelyére van szerelve. Mekkora a fonalat feszitő erő (F_f) és mekkora szöggel hajlik ki az inga a függőlegestől, ha a motor fordulatszáma 72/perc? (12. ábra.)



12. ábra

112. 4 kp-ig terhelhető 1 m hosszu fonálon állandó szögsebességgel 1 kg tömegü követ forgatunk függőleges sikban.

a) Mekkora szögsebességgel kell forgatni, hogy a fonal éppen elszakadjon?
b) Hol ér földet a kő, ha a forgástengely a föld felett 4 méterre van?

113. 4000 kg tömegü gépkocsi 2,5 m/s^2 állandó gyorsulással gyorsit, amig eléri a 72 km/h sebességet.

a) Mennyi idő alatt?
b) Mekkora uton?
c) Mekkora erő hozza létre a gyorsulást?
d) Mekkora munkavégzés árán gyorsul fel erre a sebességre?
e) Mekkora a motor maximális teljesitménye? (Mindenféle surlódás, légellenállás elhanyagolható.)

114. Egy gépkocsi tömege 800 kg. Indulásnál 6 másodpercig gyorsit 2,5 m/s^2 gyorsulással. Mekkora az átlagteljesitmény a 6 másodperc alatt? Irjuk fela pillanatnyi teljesitményt, mint az idő függvényét! Számitsuk ki a teljesitmény legnagyobb értékét. (A surlódástól eltekintünk.)

115. 1,5 Mp sulyt emelünk 0,5 m/s^2 állandó gyorsulással. Mekkora az első 4 s alatt végzett munka?

116. 2 kg tömegü testet állandó erővel emelünk függőlegesen. 1 méteres szakaszon a végzett munka 8 mkp. Mekkora gyorsulással emeljük a testet?

117. Egy mozdony 2500 LE teljesitményü. Mekkora átlagsebességgel viheti a mozdony a 2800 tonnás tehervonatot, ha a surlódási tényező 0,005?

118. A 800 tonnás vasuti szerelvény 72 km/h sebességgel halad, amikor leveszik a gőzt. Az ellenállás a suly 0,5 %-a. Mekkora munkát végez az ellenállási erő a teljes megállásig? Mekkora uton és mennyi idő eltelte után áll meg a szerelvény?

119. Egy gépkocsi egyenletesen gyorsulva indul. Melyik esetben és hány százalékkal végez több munkát a gépkocsimotor:

a) amig sebességét 0-ról 5 m/s-re növeli,
b) amig sebességét 5 m/s-ról 10 m/s-re növeli. A surlódási és a közegellenállási erőtől eltekintünk.

120. 15 kg-os testet huznak fel egy 20 fokos lejtőre. A megtett ut 60 m, a mozgási sebesség állandó. A surlódási együttható 0,2. Mekkora munkát végez a huzóerő a testen?

121. Egy 20 tonna tömegü vagon 612 kp nagyságu surlódási erő hatására egyenletesen lassul. Kezdősebessége 54 km/h. Határozzuk meg a surlódási erő munkáját a megállásig.

122. Egy 2 tonna tömegü gépkocsi hegyre megy. Az ut 100 méterenként 4 métert emelkedik. A surlódási tényező 0,08. Határozzuk meg a végzett munkát az ut egy 3 km-es szakaszán.

123. 30°-os hajlásszögü lejtőre huzunk fel egy m = 5 kg tömegü testet, a lejtő hosszával párhuzamos erővel, állandó P = 150 W teljesitménynyel. A mozgás végig egyenletes. Milyen magasra jut fel a test 5 s alatt? Mekkora a hatásfok? A lejtő és a test közötti surlódási együttható 0,2.

124. Egy 1 tonna tömegü gépkocsi kikapcsolt motorral gurul le egy lejtős uton 54 km/h sebességgel. Az ut 100 méterenként 4 métert süllyed. Mekkora a motor teljesitménye, ha a gépkocsi ugyanazon az uton ugyanakkora sebességgel felfelé halad?

125. 1 kg tömegü testet 20 m/s sebességgel függőlegesen felfelé hajitunk. 1 s mulva mekkora lesz a mozgási és helyzeti energiája?

126. Surlódásmentes, vizszintes üveglap egyik végén 500 g-os tömeg van. Ha az üveglapnak ezt a végét 2,5 cm-rel megemeljük, mekkora lesz a tömeg sebessége, mire lejut a lap másik végéhez?

127. m tömegü golyóból és ℓ hosszuságu, nyujthatatlan fonálból álló ingát a függőlegestől 90°-kal kilenditünk, majd elengedünk. Mekkora erő fesziti a fonalat a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor? (A fonál tömege és közegellenállás elhanyagolható.)

128. Vizszintes talajon v_o kezdősebességgel ellökött test a surlódás következtében s ut megtétele után áll meg. Mekkora a talaj és a test között a surlódási együttható?

129. a) Mekkora volt az inditó gyorsulása annak az m= 200 kg tömegü motorkerékpárnak, amelynek mozgási energiája s = 35 m ut befutása után W = 11 790 J?

b) μ = 0,03 esetén mekkora volt a motor által kifejtett inditó vonóerő?

c) Mennyi a gyorsitás ideje?

130. Valamely balesetnél egy 1500 kg tömegü gépkocsi maximális fékezéssel 36 m-es fékuton állt meg. A helyszinre kiszállt rendőrség az ugyanazon gépkocsival végzett kisérlettel megállapitotta, hogy 54 km/h sebességről 18 m hosszu uton lehet a kocsit lefékezni.

a) Mekkora volt a kocsi sebessége a baleset előtt?

b) Mekkora volt az állandónak tekinthető fékező erő?

131. Az expressz-vonat egy kisváros határába érkezik, sebessége v_1 = 90 km/h. Az állomáson nem áll meg, de csökkentett v_2 = 45 km/h sebességgel halad át. A vezető a sebességcsökkentést szabad kifutással akarja elérni. A vontatási ellenállás együtthatója μ = 0,019.

a) Az emlitett állomás előtt hány m-rel kell a "hajtást" megszüntetnie?

b) Mennyi idő mulva ér az állomásra erről a helyről?

c) Mekkora a fékut, ha még F_f = 1200 kp fékezőerőt is alkalmaz, és mennyi idő alatt éri el az állomást ebben az esetben ugyanolyan (lásd a)) távolságból, ha a vonat tömege m = 210 tonna?

d) Jelent-e az első megoldás energia-megtakaritást, s ha igen, mennyit?

132. Egy m = 300 tonna tömegü gyorsvonat v = 80 km/h sebességgel halad.

a) Mekkora a mozgási energiája?

b) A vonatnak forgalmi rendellenesség miatt jelző előtt meg kell állnia. Mekkora fékezőerőt kell alkalmazni s_f = 1,2 km-es fékut és μ = 0,01 esetén?

c) Szabad kifutással milyen hosszu ut befutása után állna meg a szerelvény?

d) Mekkora egyenletes gyorsulással indulhat ujra a vonat, ha a mozdony hasznos teljesitménye P = 2200 LE?

e) Milyen hosszu utszakaszon képes elérni az adott sebességet?

f) Mennyi késést okoz a megadott esetben a tilos jelzőállás, ha a vonat a jelző előtt t_v = 3,6 percet áll?

g) Az egyenletes sebességü szakaszon mekkora a mozdony által kifejtendő hasznos teljesitmény?

133. Két autó halad az országuton egymás mögött ℓ_1 = 200 m távolságra, mindkettő v = 50 km/h sebességgel. A hátsó autó az előtte haladót ℓ_2 = 10 m-rel előzi meg, mialatt az s = 1500 m hosszu utat tesz meg, a megadott - állandó - sebességgel.

a) Mekkora ekkor a sebessége?

b) Mekkora - állandó - gyorsulással mozgott az előző gépkocsi?

c) μ = 0,03 esetén m= 1870 kg össztömeg mellett, hány LE a motor legnagyobb terhelése a gyorsitás folyamán?

d) Mennyivel nőtt a teljesitményszükséglet a gyorsulás alatt?

134. Egy v_1 = 20 km/h sebességgel haladó kerékpáros $\alpha = 2^o$-os lejtőhöz érkezik, ahol μ = 0,01.

a) Hajtás nélkül milyen magasra ér fel?

b) Mekkora gyorsulással mozog felfelé?

c) Mennyi idő mulva áll meg?

135. Egy $\alpha = 5^o$-os lejtős utszakaszon fogaskerekü vasutat épitenek. A vontatandó szerelvény össztömege m = 96 tonna.

a) μ = 0,04 mellett mekkora lesz a vonóerő egyenletes mozgás esetén?

b) P = 510 LE-s vontató-teljesitmény esetén mekkora sebességet tud elérni felfelé a szerelvény?

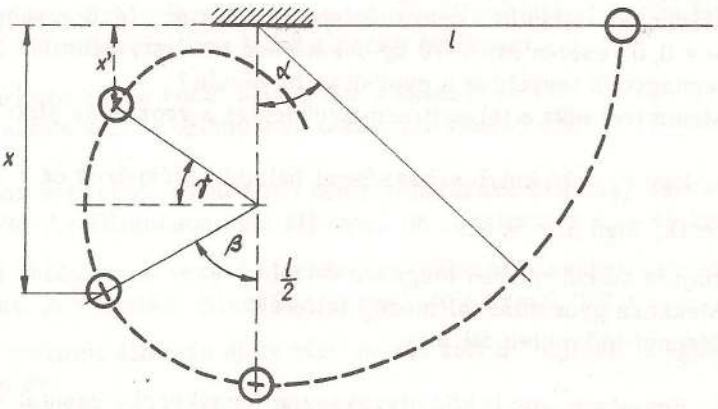
136. Egy 1800 kg-os gépkocsi 5°-os lejtőn jön le a garázs 10 m magas emeletéről. A lejtő aljára érve sebessége 3 m/s. Mekkora munkát kellett fékezésre kifejtenie?

137. Egy 75 kp sulyu szánkó két szembenálló 30°-os hajlásszögü lejtős pályán mozog. Az egyik lejtőn elindul lefelé, 200 m ut megtétele után leért a lejtő aljára, de a kapott energia tovább viszi a másik lejtőn felfelé. Milyen hosszu utat tesz meg felfelé, ha a surlódási együttható 0,03?

138. 60°-os lejtő és a rajta mozgó tárgy közötti surlódási együttható 0,2. A tárgyat a lejtőn 11 m/s kezdősebességgel fellökjük. Mennyi ideig és milyen magasra csuszik fel? Mennyi idő mulva és mekkora sebességgel érkezik vissza?

139. Egy h magasságu ℓ hosszuságu lejtőt egy fém és egy falécből állitunk össze. A pálya felső részéről rövid fémhasábot eresztünk el. A fém és a fa rész hosszának milyen arányánál érjük el, hogy a hasáb a pálya végén megálljon? Mennyi időre van szükség a teljes ut megtételére, ha a fémhasáb és a fém surlódási együtthatója 0,2, a fémhasábé és a fáé 0,6, h = 5 m, ℓ = 13 m.

140. Egy 1 m hosszu fonálingát, melyen 200 g tömeg lóg, kitéritünk a vizszintesig. Mekkora függőleges kezdősebességgel kell visszalöknünk, hogy a függőlegestől mért 60°-os kitérésnél a fonál elszakadjon? A fonál 0,8 kp terhelésnél szakad el.



13. ábra

141. Egy fonalingát nyugalmi helyzetéhez képest 90°-os szögben kitérve tartunk, majd elengedünk. Az inga hossza ℓ, tömege m. Amikor átlendül a függőleges helyzeten, a fonál egy szögbe ütközik. Ezért a tömegpont tovább egy $\frac{\ell}{2}$ sugaru körpályán halad, majd bizonyos magasságot elérve elválik a körpályától (lásd 13. ábra).

a) Számitsuk ki a fonalat mozgás közben feszitő erőt.
b) Milyen magasságban válik el a tömegpont a körpályától.

142. Mekkora tömeg végez rezgést azon a 30 p/cm állandóju rugón, melyen a maximális kitérés 5 cm, és a tömeg 80 cm/s sebességgel halad át az egyensulyi helyzeten?

143. Egy rugón függő sulyt 60 ponddal megnövelve a rezgésidő megkétszereződik. Mekkora az eredeti suly?

144. Egy tehergépkocsi 800 kg tömegü karosszériája 1,8 t teher hatására 6 cm-t süllyed.

a) Mekkora a gépkocsiban előálló lengések rezgésideje?
b) Mekkora az üres gépkocsi rezgésideje?

145. Egy rugó rugalmassági állandója 25 p/cm. Mekkora sulyt akasszunk rá, hogy a nehézségi erő hatására percenként 25 rezgést végezzen?

146. Egy rugón függő 200 pond sulyu tömeg percenként 42 rezgést végez. Mekkora megnyulást eredményez a suly a rugón a rezgések lecsillapodása után?

147. m = 2 kg tömegü anyagi pontra F = -Dx alaku rugalmas erő hat. x_1 = 1 m távolságban az erő nagysága 8 N. A kezdő időpontban x_o = 1 m és v_o = 4 m/s. Határozzuk meg a pont mozgásának törvényét.

148. Mennyivel nyult meg a dinamométer rugója, ha a mutatója a 4 kp-os skálaponton áll és a nyujtás közben 1,6 joule munkát végeztünk?

149. Egy rugót 20 pcm munka árán tudunk 8 cm-rel megnyujtani. Mekkorának adódik a rezgésidő, ha egy m = 50 g tömegü testet a végéhez erősitünk?

150. Mekkora energiája van a 10 cm-re kinyujtott dinamométer rugójának, ha a mutatója az 5 kp-os skálaponton van?

151. Bizonyitsuk be, hogy harmonikus rezgőmozgás esetén a mozgási és a helyzeti energia összege a mozgás során állandó, azaz harmonikus rezgőmozgás esetén is fennáll az energiamegmaradás törvénye.

152. D = 0,03 kp/cm rugalmassági állandóju ℓ_o = 30 cm nyugalmi hosszuságu felfüggesztett rugó végére m = 10 dkg tömegü golyót helyezünk. A golyó állandó nagyságu sebességgel vizszintes kört ir le, miközben a rugó

tengelye a függőlegessel 45°-os szöget zár be. Mekkor a rugó megnyulása és a golyó sebességének nagysága?

153. Egy M tömegü testet rugalmas fonal B végére erősitjük. A fonal A vége rögzitett, megnyujtatlan állapotban ℓ_0 = 24 cm hosszuságu, és akkor tart Mg erővel egyensulyt, ha megnyulása $\Delta \ell_0$ = 2 cm. A test kezdetben az A pontban áll, azután elengedjük, ugyhogy szabadon esik mindaddig, amig a fonal engedi, azután a fonal elkezd nyulni, eközben fékezi a test esését, végül meg is állitja. Tegyük fel, hogy a fonal megnyulásával arányos erőt fejt ki a végére kötött testre. Mekkora lesz a fonal maximális megnyulása?

154. A Hold 27 nap 7 óra alatt végez egy teljes fordulatot a Föld körül, pályájának sugara a Föld sugarának 60-szorosa. Számitsuk ki ezen adatokból a g nehézségi gyorsulást a Földön!

155. Számitsuk ki, mekkora a nehézségi gyorsulás 20 km magasságban a Föld felett, ha a Föld felszinén g = 9,81 m/s^2, a Föld sugara pedig R = 6370 km.

156. Tegyük fel, hogy egy mübolygó a földfelszin felett 1000 km magasságban kering a Föld körül. Mekkora sebességgel keringene, ha csak a Föld vonzóereje hat rá?

157. m tömegü test kezdősebesség nélkül igen nagy h magasságból esik a Földre. Mekkora a kinetikus energiája a Föld felszinére való esés pillanatában? Mekkora a végsebessége, ha végtelen távolból kezdősebesség nélkül esik a Földre? A légellenállást hanyagoljuk el!

158. Mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy 1 kg-os testet a Föld felületéről holdtávolba taszitsunk? A Hold-Föld átlagos távolság 60 földsugárral egyenlő.

159. Mekkora a szökési sebesség:

a) A Föld felszinén?

b) Mekkora teljesitménnyel gyorsitható fel a 100 kg tömegü test a szökési sebességre 100 s alatt?

160. Nyikolajev szovjet ürhajós pályájának földközeli pontja 183 km-re, földtávoli pontja pedig 251 km-re volt a földfelszintől. Számitsuk ki az ürhajó maximális és minimális sebességét, továbbá keringési idejét. Mekkora lenne keringési sebessége, ha változatlan energiával körpályán futna?

MEGOLDÁSOK

76. A hajó mozgását egyenletesen változó mozgásnak tekintjük. A gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

A ható erő Newton II. törvénye alapján

$$F = m\,a = m\,\frac{v^2}{2s} = 9.\ 10^5\ \mathrm{N} = \underline{9{,}2\ .\ 10^4\ \mathrm{kp}}\ .$$

77. Állandó erő hatására $a = \frac{F}{m}$ gyorsulásu egyenletesen gyorsuló mozgás jön létre. A sebesség

$$v = a\,t + v_o = 35\ \frac{m}{s}$$

Az ut: $$s = v_o\,t + \frac{a}{2}\,t^2 = 300\ m.$$

78.

a) $$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{6^2}{2.9} = 2\ m/s^2$$

b) $$ma = F - mg \qquad F = 177\ N$$

c) $$t = \frac{v}{a} = \frac{6}{2} = 3\ s, \qquad v_k = v - \frac{a}{2}\,\Delta t = 6 - \frac{2}{2}\,1 = 5\ m/s$$

79. Kb. 0,3 kp.

80. 75 kp.

81. A kocsi tömege $15 \cdot 10^3$ kg, mindkét esetben $m \cdot a = m\frac{v}{t} = 562,5$ N

a) Ennyi a szükséges tolóerő, ha nem vesszük figyelembe a surlódást.

b) Surlódási erő $F_s = \mu G = 1471,5$ N. Most $ma = F_t - F_s$,

tehát $$F_t = 2034\ N = 207,3\ kp$$

82. a) Sebesség 5. másodperc végén 20 m/s, 6. másodperc végén 24 m/s, tehát a 6. másodperc alatt megtett ut 22 m. A fékezési erő $ma' = \mu mg$, azaz a lassulás $a' = \mu g = 5\ m/s^2$, a fékut $v^2/2a' = 57,6$ m. Összesen 79,6 m.

b) 20 m/s-ról lassit $v^2/2a' = m$ uton.

83. Az idő $\frac{2s}{v} = 30$ s; gyorsulás abszolut értéke $a = \frac{v^2}{2s} = \frac{1}{3}\ m/s^2$.

$$\mu = \frac{F_3}{G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \approx \frac{1}{30}.$$

84. $ma = F_v - F_s$, $F_v \approx 2000$ kp.

85. 5000 kp.

86. Az egyenletesen gyorsuló mozgásra, ha a kezdősebesség 0, a gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

A teherautóra helyezett láda azért gyorsulhat, mert rá a láda és az autó érintkezési felülete mentén surlódási erő hat. Ennek maximális értéke

$$F_s = \mu F_{ny}, \quad \text{ahol most} \quad F_{ny} = mg.$$

Az m tömegü láda ezek szerint $a_1 = \mu g$ gyorsulással mozoghat. Annak feltétele, hogy a láda az autóval csuszás nélkül együtt mozogjon:

$$\frac{v^2}{2s} < \mu g, \quad \text{tehát a surlódási együttható:} \quad \mu > \frac{v^2}{2gs}.$$

87. Ha a surlódási erő F_s, a testet $F - F_s$ gyorsitja.

$$F_1 - F_s = m a_1$$

$$F_2 - F_s = m a_2$$

$$m = \frac{F_1 - F_2}{a_1 - a_2}$$

$$F_s = \frac{F_2 a_1 - F_1 a_2}{a_1 - a_2}; \quad \mu = \frac{F_s}{mg} = \frac{F_2 a_1 - F_1 a_2}{(F_1 - F_2)\, g}$$

Az adatokkal:

$$m = 5 \text{ kg}, \quad F_s = 2 \text{ N},$$

$$\mu \approx 0{,}04.$$

88. A jármü felgyorsulása közben

$$s_1 = \frac{a}{2} t^2 = \frac{v_o t}{2}$$

utat tesz meg. A láda gyorsulása:

$$b = \frac{F_s}{m} = \mu g, \text{ ha } a \geq \mu g$$

a láda által t idő alatt megtett ut:

$$s_2 = \frac{1}{2} \mu g t^2.$$

A láda t idő alatt

$$s = s_1 - s_2$$ uttal csuszik hátra a rakfelületen.

Mivel a láda sebessége t időpontban

$$v_1 = \mu g t < v_o,$$

a láda a jármü v_o sebességü egyenletes mozgása közben is hátrafelé csuszik mindaddig, míg μg gyorsulással a jármü v_o sebességét el nem éri.

$$t_1 = \frac{v_o - \mu t}{\mu g} = \frac{v_o}{\mu g} - t.$$

Ezalatt a jármü

$$s_1' = v_o t_1,$$

a láda

$$s_2' = v_1 t_1 + \frac{1}{2} \mu g t_1^2$$

utat tesz meg. A láda hátracsuszása ebben a szakaszban

$$s_1' - s_2' = v_o t_1 - v_1 t_1 - \frac{1}{2} \mu g t_1^2 = (v_o - v_1).(\frac{v_o}{\mu g} - t) - \frac{1}{2} \mu g(\frac{v_o}{\mu g} - t)^2$$

A láda teljes hátracsuszása:

$$s = s_1 - s_2 + s_1' - s_2' = \frac{v_o}{2}\left(\frac{v_o}{\mu g} - t\right) = \frac{v_o}{2\mu g}(v_o - v_1).$$

Az adatokkal:

$$\text{Mivel } a = \frac{15\ \frac{m}{s}}{4,8\ s} = 3,125\ \frac{m}{s^2} > 0,3 \cdot 9,81 = 1,943\ \frac{m}{s^2}$$

használhatjuk a fenti formulát.

$$s = 2,25\ m.$$

89. A láda addig nem csuszik meg, amig a gyorsitáshoz szükséges erő kisebb a lehetséges legnagyobb surlódási erőnél, tehát $m\,a \leq \mu mg$ a feltétele annak, hogy még ne következzék be elcsuszás.

Az egyenletesen változó mozgás törvényeiből

$$s = \frac{v^2}{2a}, \text{ vagyis, hogy a láda ne csusszék el,}$$

$$s \geq \frac{v^2}{2\mu g} = 156,2\ m \text{ kell, hogy legyen.}$$

90.

a) és b) $s_i = \frac{v \cdot t_i}{2}$; $t_i = \frac{v}{a}$; $a = \frac{F_d}{m}$

$$\underline{F_d} = F - F_s = \underline{3600\ kp}$$

$\underline{a} = \underline{0,1471\ m/s^2}$, ezzel $\underline{t_i} = \underline{132\ s = 2,2\ perc}$

igy $\underline{s_i} = \underline{1281\ m.}$

c) A testre ható erők eredője:

$$m\,a_1 = F_s + F_F;\quad F_F = m\,a_1 - F_s;$$

$$a_1 = \frac{v^2}{2s_f} = 0,126\ m/s^2; \qquad \underline{ma_1} = \underline{3082\ kp = 30\ 400\ N}$$

tehát

$$F_F = 3082 - 2400 = \underline{682 \text{ kp} \cong 6800 \text{ N}}$$

d) $$t_1 = \frac{v}{a_1} = \underline{154,3 \text{ s}}$$

91. $M = 1200$ kg $\qquad M_k = 3800$ kg

$\mu = 0,1 \qquad \mu_v = 0,04$

$v = 30$ km/h $= 8,34$ m/s

a) A megcsuszás határán $M \cdot a_{max} = \mu M \cdot g$, tehát $a_{max} = \mu \cdot g$

$$\underline{a_{max}} = \underline{0,981 \text{ m/s}^2}$$

b) $$\underline{s} = \frac{v^2}{2a} = \underline{35,4 \text{ m}}$$

c) $$ma = F_f - \mu \cdot G_ö ;$$

$$\underline{F_f = 700 \text{ kp.}}$$

92. a) $$\underline{a_1} = \frac{v^2}{2s} = \frac{79}{96} = \underline{0,823 \text{ m/s}^2}$$

b) $$m \cdot a_1 \leqq \mu m g$$

$$\frac{a_1}{g} = 0,0839 < \mu = 0,1 \text{ és igy}$$

<u>a gépkocsi az előirt uton belül megcsuszás nélkül megállhat.</u>

93. A huzóerő egyenlő a surlódási erővel (I. axioma)

$$F = \mu mg$$

Szétszakadás után a hátsó rész fékezőereje:

$$F_2 = \mu . m_2 g$$

A lassulás $a_2 = \frac{F_2}{m_2} = \mu g$. A mozgás ideje: $t = \frac{v}{a_2} = \frac{v}{\mu g}$.

Megtett utja: $s_2 = vt - \frac{a_2}{2} . t^2 = v . \frac{v}{\mu g} - \frac{\mu g}{2} . \frac{v^2}{(\mu g)^2} = \frac{v^2}{2\mu g}$.

Szétszakadás után az elülső rész gyorsitó ereje:

$$F - \mu m_1 g = \mu m_2 g = m_1 a_1$$

Gyorsulása:

$$a_1 = \frac{\mu m_2 g}{m_1} .$$

Megtett utja t idő alatt: $s_1 = vt + \frac{a_1}{2} t^2$.

A kérdezett távolság: $s_1 - s_2 = \frac{v^2}{2\mu g} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \approx \underline{2548 \text{ m}}$

94. a) $\underline{t} = \frac{2s}{v_1 + v_2} = \underline{14,75 \text{ s.}}$

b) Lassulás: $a_1 = \frac{v}{t} = 0,546 \text{ m/s}^2$

A fékezőerő, melynek hatására ez a lassulás létrejöhet:

$$F_ö = m . a_1 = 6800 \text{ N}$$

Ennek egy részét képezi a vontatási ellenállás, mint "természetes" fékező hatás:

$$\underline{F_s} = \mu G = 0,017 . 12500 = \underline{212,2 \text{ kp}}$$

A szükséges fékezőerő tehát:

$$\underline{F} = F_ö - F_s = 483,8 \text{ kp} = \underline{4740 \text{ N}}$$

95. 1. Ha valamennyi kerék hajtókerék, akkor $\mu \geqq \frac{a}{g} \approx 0,02$. Ez esetben a minimális surlódási együttható nem függ az autó sulyától.

2. Ha csupán a hátsó kerekek hajtókerekek, akkor $\mu \geqq \frac{a}{ng}$, ahol n az autó hátsó kerekére eső sulynak az összes sulyhoz való arányát jelenti. Az adott esetben n = 5/6, igy $\mu \geqq \frac{0,2\,m/s^2}{5/6g} \approx 0,024$.

96. A deszka gyorsulásának 0,98 m/s^2-nél nagyobbnak kell lennie.

97. Legyen M a deszka, m' a teher tömege, μ_1 és μ_2 a surlódási tényezők. A deszkára alkalmazva Newton II. törvényét:

$$F' - F'_s - F''_s = Ma,$$

ahol F' a keresett huzóerő,

F'_s az asztal és a deszka közötti surlódási erő,

$$F'_s = \mu_1 (m' + M)\, g,$$

F''_s a deszka és a teher közötti surlódási erő:

$$F''_s = \mu_2\, m'\, g.$$

A teher gyorsulása legfeljebb a lehet, amelyet F''_s eredőből számithatunk:

$$F''_s = m'a, \qquad \mu_2\, m'g = m'\, a\,, \qquad a = \mu_2\, g.$$

Ennél nagyobb gyorsulással kell mozognia a deszkának.

A deszkára vonatkozó Newton-egyenlet a határesetben, azaz a fenti a gyorsulásu mozgás esetén:

$$F' - \mu_1 (m' + M)\, g - \mu_2\, m'\, g = M\, \mu_2 g\,.$$

Ebből $$F' = (\mu_1 + \mu_2)\,.\,(m' + M)\, g = 2,25 \text{ kp}.$$

A keresett erőnek ennél nagyobbnak kell lennie.

98. $$m\,a = F - \mu.\,G$$

Ebből $$a_{max} = 48,07\ m/s^2.$$

99. A testre ható G nehézségi erőt egy $F_1 = G \cdot \sin\alpha$, a lejtő alapjával párhuzamos erőre és egy a lejtőre merőleges F_2 erőre bontjuk. A test az F_1 erő hatására $a = g \cdot \sin\alpha$ gyorsulással mozog. A zérus kezdősebességü egyenletesen gyorsuló mozgás $v = at$ és $s = \frac{a}{2}t^2$ összefüggéseit használva

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \approx \underline{2{,}01\ s}$$

A végsebesség pedig: $v = a \cdot t \approx \underline{9{,}91\ m/s.}$

100. A gyorsító erő $F = mg \sin\alpha$, tehát a gyorsulás $a = g \sin\alpha$. A lejtő alapja b, hossza

$$s = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{g \sin\alpha}{2} t^2$$

$$\frac{2b}{gt^2} = \sin\alpha \cos\alpha; \quad \sin 2\alpha = \frac{4b}{gt^2}$$

Ha $t = 0{,}6$ s és $b = 50$ cm, $\alpha = 17{,}25^\circ$, vagy $\alpha = 72{,}75^\circ$

$$t^2 = \frac{4b}{g \sin 2\alpha}$$

akkor a legkisebb, ha $\sin 2\alpha = 1$ (a legnagyobb). Ekkor

$$\alpha = 45^\circ, \quad t_{min} = 0{,}44\ s.$$

101. Az adott egyenestől való eltávolodás akkor a leggyorsabb, ha a test gyorsulásának vizszintes összetevője $a = g \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{g}{2} \sin 2\alpha$ a legnagyobb, vagyis a követelményt kielégitő szög $\alpha = 45^\circ$.

102. A mozgató erő a nehézségi erő lejtőmenti komponensének és a surlódási erőnek a különbsége.

A test tömege $m = \frac{G}{g} = \frac{10}{9{,}81}$ kg.

A mozgásegyenlet $G \sin\alpha - F_s = ma$.

Végül a gyorsulás:

$$a = \frac{G \sin\alpha - \mu G \cos\alpha}{m} \approx 3,24 \text{ m/s}^2.$$

103.

$$s = \frac{v^2}{2a} = 36 \text{ m}.$$

$$\text{tg}\alpha = 0,2 = \mu$$

$$a = \mu g = 2 \text{ m/s}^2$$

104. a)

$$F_d = (m_1 + m_2)g.(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = (m_1 + m_2)a_1$$

$$\underline{a_1 = 0,586 \text{ m/s}^2}$$

b)

$$v_1 = \frac{2s_1}{t_1}; \quad t_1 = \frac{v_1}{a_1}; \quad \text{igy}$$

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1} = \sqrt{2 \,.\, 0,586 \,.\, 600} = 26,58 \text{ m/s}$$

$$\underline{v_1 = 26,58 \text{ m/s} = 95,6 \text{ km/h.}}$$

c)

$$\underline{s_3} = \frac{v_3^2}{2a_1} = \frac{36}{2.0,586} = \underline{30,75 \text{ m}}$$

d)

$$\underline{F_f = F_d = 58,6 \text{ kp}}$$

e)

$$t_2 = t_3 + t; \quad t_2 = \frac{2s_3}{v_3} + \frac{s_2 - s_3}{v_3} = \underline{155,05 \text{ s}}$$

105. A kerékpáros mozgási energiája a lejtő alján részben helyzeti energiára, részben a surlódási erő ellenében végzett munkára forditódik. Ha h az elért magasság és s a megtett ut, akkor

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + \mu mg \,.\, \cos\alpha \,.\, s$$

Mivel $h = s \cdot \sin\alpha$, végül

$$h = \frac{v^2}{2g\,(1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha)} \approx \underline{1,15\ \mathrm{m}}$$

106. A lejtő aljáról v sebességgel induló ferde hajitás pálya-egyenletéből:

$$h_1 = s\,\mathrm{tg}\alpha + \frac{g}{2v^2}\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) \cdot s^2 .$$

Másrészt a lecsuszó test gyorsulása

$$a = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad \frac{h_2}{\sin\alpha} = 2\,gh_2 \cdot \left(1 - \frac{\mu}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$$

v^2 kiküszöbölése után:

$$\mu = \left(1 - \frac{s^2}{4\,h_2} \cdot \frac{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}{h_1 - s\,\mathrm{tg}\alpha}\right) \cdot \mathrm{tg}\alpha = \underline{0,4}$$

107. Alkalmazzuk az impulzus-tételt, a keresett idő:

$$t = \frac{m\,(n - 1)\,v_o}{F}$$

108. Alkalmazzuk az "eleven erő" (kinetikai energia) tételét:

$$Fs = \frac{1}{2}\,m\,(nv_o)^2 - \frac{1}{2}\,mv_o^2 .$$

Innen a keresett távolság

$$s = \frac{(n^2 - 1)\,mv_o^2}{2F} .$$

109. A kalapács sebessége akkor, amikor a tömbhöz ér: $v = \sqrt{2\,gh}$ és ez Δt idő alatt zérusra csökken.

Az impulzus-tételt a kalapácsra alkalmazva kapjuk:

$$-M\sqrt{2gh} = (Mg - F) \cdot \Delta t$$

$$F = \frac{M\sqrt{2\,gh}}{\Delta t} + Mg = 904600\ \mathrm{N}.$$

110. A 11. ábrán a térgörbe pályát a P pontbeli érintősikba eső vetülettel ábrázoltuk. A mozgásegyenlet főnormális irányu komponense:

$$m \frac{v^2}{R} = F \cos 60^o.$$

Ebből

$$R = \frac{m v^2}{F \cos 60^o} = 0,424 \text{ m}.$$

A mozgásegyenlet érintőirányu komponenséből:

$$a_s = \frac{F_s}{m} = -12,3 \text{ m/s}^2.$$

111. Az m tömegü testre két erő hat: a nehézségi erő és az az erő, amellyel a fonál őt huzza. E két erő eredője a körmozgást fenntartó un. centripetális erő. Ismerjük egyik összetevőjét (G) és másik összetevőjének (F_f) irányát, valamint saját irányát, ami vizszintes. Ezen adatokból meg tudjuk szerkeszteni nagyságát is. A 12. ábrából:

$$\sin\alpha = \frac{r}{\ell} = \frac{m\omega^2 r,}{F_f}, \text{ ahonnan}$$

$$F_f = m\omega^2 \ell \approx 700 \text{ N} \quad \text{és } \alpha \approx 88^o.$$

112. a) Körmozgás közben a fonalat akkor fesziti legnagyobb erő, amikor a test a körpálya legalsó pontján halad el. Ekkor a testre ható erők (a kötél által kifejtett és a nehézségi erő) eredője: F-mg biztositja a körpályán való mozgáshoz szükséges centripetális erőt ebben a helyzetben.

Tehát $$F - m g = m r\omega^2.$$

Mivel a kötélerő maximálisan 4 kp-nyi lehet, ez 1 kg tömegü test esetén a testre ható nehézségi erő négyszerese, vagyis

$$F = 4 \text{ mg}$$

Behelyettesitve: $3 \text{ mg} = m r\omega_o^2$, $\omega_o = \sqrt{\frac{3g}{r}} \approx 5,5 \text{ s}^{-1}$.

b) A fonál a test legalsó helyzetében szakad el. A test ekkor

$$v = r\omega_o$$

nagyságu és vizszintes irányu kezdősebességgel hajitva esik 3 m magasságból. Függőleges irányu mozgása szabadesés, amiből az esési idő:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ez alatt az idő alatt vizszintes irányban egyenletesen mozogva

$$s = v \cdot t \quad \text{utat tesz meg.}$$

Az előbbi képletek felhasználásával

$$s = r\sqrt{\frac{3g}{r}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$s = \sqrt{6\,r\,h} \approx 4,23 \text{ m}$$

Ennyit távolodott el vizszintes irányban a test.

113. a) $t = \frac{v}{a} = 8$ s

b) $s = \frac{v}{2}\,t = 80$ m

c) $F = m \cdot a = 4000 \text{ kg} \cdot 2,5 \text{ m/s}^2 = 10^4$ N

d) A munkavégzés mozgási energiában realizálódik, tehát

$$W = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = 8 \cdot 10^5 \text{ joule}$$

e) Mivel $P = F \cdot v$,

ezért állandó F gyorsitóerő esetén a maximális teljesitményt a maximális sebesség elérésekor kell a motornak kifejtenie:

$$P_{max} = F \cdot v_{max} = 2 \cdot 10^5 \text{ W} = 273 \text{ LE.}$$

114. $P = F \cdot a \cdot t = 5000 \cdot t.$

A teljesitmény legnagyobb értéke, $P_{max} = 5000$ W/s $\cdot$ 6 s = 30000 W.

115. Az emelő erő F, a test sulya mg. Az eredő erő F - mg = ma. Ebből

$$W = m\,(a + g)\,\frac{a}{2}\,t^2 = 6300 \text{ mkp.}$$

116. $$a = \frac{W - mgh}{mh} = 29,4 \text{ m/s}^2.$$

117. $$v = \frac{P}{F} = 13,4 \text{ m/s} = 48,2 \text{ km/h.}$$

118. A szerelvény tömege 800 tonna = $8 \cdot 10^5$ kg, sebessége abban a pillanatban, amikor a lassulás megkezdődik 72 km/h = 20 m/s. Mozgási energiája ekkor:

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = 1,6 \cdot 10^8 \text{ joule.}$$

Ez az energia felemésztődik s uton a F ellenállási erő ellen végzett munkára. Az ellenállási erő a szerelvény sulyának 0,5%-a, vagyis

$$F = \frac{0,5}{100}\,G = \frac{0,5}{100}\,800 \text{ Mp} = 4 \text{ Mp}$$

$$F = 4000 \text{ kp}$$

A munkavégzés $1,6 \cdot 10^8$ joule $\approx 1,63 \cdot 10^7$ mkp

$W = F \cdot s$ alapján a megtett ut:

$$s = \frac{W}{F} \approx 4,01 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$s \approx 4010 \text{ m.}$$

A megállásig eltelt idő:

$$t = \frac{s}{\frac{v}{2}} = \frac{2\,s}{v} = 401 \text{ s}$$

119. A második esetben 200%-kal nagyobb a munkavégzés.

120. A testre négy erő hat: F_1 huzóerő, F_2 surlódási erő, F_3 a talaj reakcióereje, F_4 a nehézségi erő.

Mivel az emelkedőn a test egyensulyban van:

$$F_3 = F_4 \cos\alpha = 138,3 \text{ N},$$

$$F_1 = F_2 + F_4 \sin\alpha = F_2 + 50,3 \text{ N},$$

$$F_2 = F_3 = 27,7 \text{ N}.$$

Igy $F_1 = 78$ N és $W = F_1 \cdot s = 4680$ joule.

121. $W = \frac{1}{2} m v^2 = 2,25 \cdot 10^6 \text{ J} = 2,3 \cdot 10^5$ mkp.

122. A gépkocsi akkor halad egyenletesen, ha a ráható erők eredője nulla. Ez akkor teljesül, ha az erők lejtő menti komponenseinek összege és a lejtőre merőleges komponenseink összege külön-külön nulla. Tehát

$$F = F_s - mg \sin\alpha = 0, \quad F_n - mg \cos\alpha = 0.$$

A F_s surlódási erő μF_n. A motor huzóereje

$$F = mg \sin\alpha + \mu mg \cos\alpha.$$

Az s uton végzett munka

$$W = (mg \sin\alpha + \mu mg \cos\alpha) \cdot s = 7,2 \cdot 10^5 \text{ mkp}.$$

123. $v = \frac{P}{F}$, ahol F az előző feladatmegoldásban is szereplő huzóerő;

$$h = v.t \sin\alpha = 11,3 \text{ m}, \quad \eta = 74,3\%.$$

124. Ha a legurulás egyenletes $mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha = 0$. Ebből $\mu = \text{tg}\alpha$. Felfelé haladáskor $F - mg \sin\alpha - mg \cos\alpha = 0$. A F huzóerő teljesitménye

$$P = F \cdot v = 2 mg \sin\alpha \cdot v = 1200 \text{ mkp/s}.$$

125. A felfelé hajitott test sebessége t idő mulva, ha v_o a kezdősebesség:

$$v = v_o - gt = 10,19 \text{ m/s}.$$

A mozgási energia $W_m = \frac{1}{2} m v^2 \approx 51,9$ J.

t idő alatt megtett ut: $s = v_o t - \frac{g}{2} t^2 = 15,1$ m.

A helyzeti energia:

$$W_h = mgs = 148,1 \text{ J}.$$

126. v = 70 cm/s, csak a lejtő magasságától függ.

127. A fonál azért feszül meg, mert ennek közvetitésével fejti ki a függesztő kampó az m tömegü golyóra azt az erőt, mely a testre ható nehézségi erő kiegyensulyozásához, valamint a körpályán tartáshoz szüksé-ges.

Tehát a feszitőerő:

$$F = m\,g + m\frac{v^2}{\ell} .$$

A sebességet ugy tudjuk kiszámitani, hogy alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$m\,g\,\ell = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Tehát $$F = m\,g + 2\,m\,g = 3\,m\,g .$$

128. A test addig mozog, mig a kezdeti mozgási energiáját a surlódási erő ellenében végzett munka fel nem emészti.

$$\frac{1}{2}\,m\,v_o^2 = F_s\,.\,s = \mu\,m\,g\,.\,s$$

$$\mu = \frac{v_o^2}{2\,g\,s} .$$

129. Egyenletes gyorsulást tételezve fel.

a) $a = \frac{v^2}{2s}$; $\underline{a = 1,68 \text{ m/s}^2}$ $v = \sqrt{\frac{2\,W}{m}} = 10,84 \text{ m/s}$

b) $F_i = m\,.\,a + \mu.\,G = G\,(\frac{a}{g} + \mu) = 40,4 \text{ kp} = 400 \text{ N}$

$$t = \frac{2\,s}{v} = \underline{6,5 \text{ s.}}$$

130. a) $\frac{1}{2}mv_1^2 = Fs_1$; $\frac{1}{2}mv_2^2 = Fs_2$; $v_2 = v_1\sqrt{s_2/s_1} = \underline{76,14 \text{ km/h}}$

b) $\underline{F} = \frac{mv_1^2}{2s_1} = \underline{9,375 \cdot 10^3 \text{ N} = 9,557 \cdot 10^2 \text{ kp}}$

131. a) A sebességcsökkenésnek megfelelő energia-csökkenés a surlódó erő munkájával lesz egyenlő:

$$\mu mgs = \frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2) \qquad s = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \underline{1256 \text{ m}}$$

b) $t_o = \frac{2\,s}{v_1 + v_2} = 67 \text{ s}$

c) $s_f = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2a_f}$; $a_f = \frac{F_ö}{m} = \frac{\mu mg + F_f}{m} = 0,2421 \text{ m/s}$,

tehát $\underline{s_f} = 966 \text{ m}$.

d) Jelent! Utóbbi esetben a fékut rövidebb ugyan, de a hajtóerőt tovább - éppen az $(s - s_f)$-nek megfelelő távolságon kell fenntartani. A hajtóerő munkája ezen az úton szabad kifutás esetén nem szükséges, tehát megtakaritásként jelentkezik. Mivel a fékezésig v_1 áll, ezért

$$W = F_h (s - s_f) ; \quad F_h = \mu G = 39142 \text{ N} ; \quad s - s_f = 290 \text{ m}$$

$\underline{W = 1,135 \cdot 10^7 \text{ J}}$ a "megtakaritott" energia.

132. a) $W = \frac{m \cdot v^2}{2} = \underline{74 \cdot 10^6 \text{ J}}$

b) $F = m \cdot a_f - \mu \cdot G$; $\quad F = G(\frac{a_f}{g} - \mu)$;

A szükséges lassulás

$$a_f = \frac{v^2}{2s_f} = 0,205 \text{ m/s}^2$$

Ezzel $\underline{F = 3270 \text{ kp} \approx 32000 \text{ N}}$

c) $\frac{m \cdot v^2}{2} = \mu G \cdot s_o$; $\underline{s_o} = \frac{v^2}{2g} = \underline{2510 \text{ m}}$

d) $a_i = \frac{F_d}{m}$; $F_d = \frac{P}{v} = \mu G$

$\underline{F_d = 4440 \text{ kp} = 43500 \text{ N}}$

Ezzel $\underline{a_i} = \underline{0,1452 \text{ m/s}^2}$

e) $\underline{s_i} = \frac{v^2}{2a_i} = \underline{1690 \text{ m}}$

f) Az $s_f + s_i = 2890$ m ut befutásához - a megadott sebesség mellett - $t_o = \underline{130 \text{ s}}$ időre lenne szükség. Ezzel szemben a fékezés ideje $t_f = \frac{v}{a_f} = 108,3$ s, az inditás ideje $t_i = \frac{2s_i}{v} = 152,7$ s és igy az $s_f + s_i = 2890$ m ut befutása $\underline{\Delta t} = t_1 + t_f - t_o = \underline{131,0 \text{ s} = 2,182}$ perccel tovább tart.

A késési időt a várakozásban töltött idő tovább növeli.

A teljes késés:

$\underline{t_k} = t_v + \Delta t = \underline{5,782 \text{ perc}}$

g) $P_e = \mu \cdot G \cdot v = 888$ LE $= \underline{650 \text{ kW}}$

133. a) Az első autó az előzés alatt változatlan sebességgel $s = 1500$ m hosszu utat fut be, mig a hátsó $s_1 = s + \ell_1 + \ell_2 = 1710$ m hosszu utat.

Az előzés alatt eltelt idő

$\underline{t} = \frac{s}{v} = \underline{108 \text{ s}}$, a sebességnövekedés

$$v_1 - v = \frac{2(s_1 - s)}{t} = 3,89 \text{ m/s}.$$

Ezzel $\underline{v_1 = 17,79 \text{ m/s} = 64,4 \text{ km/h}}$

Az alkalmazott - egyenletes - gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{v_1 - v}{t} = \underline{0,036 \text{ m/s}^2}$$

c) A gyorsulás utolsó pillanatában szükséges teljesitmény:

$$P = \frac{F \cdot v_1}{75}; \quad F = \frac{G}{g} \cdot a + \mu G = G\left(\frac{a}{g} + \mu\right) = 62,93 \text{ kp}$$

tehát $\underline{P = 14,91 \text{ LE}}$

d) A teljesitményszükséglet v = áll. sebesség mellett:

$$P_v = F_v \cdot v; \quad F_v = \mu \cdot G = 56,1 \text{ kp} \qquad P_v = 10,4 \text{ LE}$$

$$\Delta P = P - P_v = \underline{4,5 \text{ LE}}$$

134. a)

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = mg \cdot h + \mu \cdot mg \cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$\underline{h} = \frac{v_1^2}{2g\left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right)} = \underline{1,22 \text{ m}}$$

Ez az emelkedés a lejtőn s_o = m hosszu utnak felel meg.

b)

$$\underline{a_1} = \frac{v_1^2}{2s_o} = \underline{0,441 \text{ m/s}^2}$$

c)

$$\underline{t_1} = \frac{2s_o}{v_1} = \underline{12,55 \text{ s}}$$

135.

a)

$$F = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 12200 \text{ kp}$$

b)

$$\underline{v_{max}} = 3,14 \text{ m/s} = \underline{11,3 \text{ km/h}}$$

136. $1,68 \cdot 10^5$ J, a lejtő hajlásszögétől függetlenül.

137. $\alpha = 30^o$

$s = 200$ m

$\mu = 0,03$

Ha a közegellenállást nem vesszük figyelembe, akkor a helyzeti energia veszteség = a surlódási munka

$mg\,(s-x)\sin\alpha = \mu mg\,(s+x)\cos\alpha$,

ahonnan az adatokkal $x = 181$ m

138. A mozgási energia tétel szerint

$$\frac{1}{2}\, m\, v_o^2 = mg\,\ell \sin\alpha + \mu mg \,.\, \cos\alpha \,.\, \ell \;,$$

ahol m a tárgy tömege, v_o a kezdősebessége, μ a surlódási együttható és ℓ a lejtőn megtett ut hossza. A fenti egyenletből $\ell = 6,37$ m.

Az $\ell = \frac{v_o}{2} \,.\, t$ alapján $t = 1,15$ s adódik.

Hasonlóan számolva, a visszaérkezés sebessége $v = 9,8$ m/s, és a fellökéstől számitva 2,4 s mulva ér vissza a test.

139. A kinetikai energia tétele alapján, ha ℓ_1 és ℓ_2 pálya egyenes szakaszai és α a lejtő hajlásszöge

$$0 = mg\,(\ell_1 \sin\alpha + \ell_2 \sin\alpha) - (mg\mu_1 \cos\alpha \,.\, \ell_1 + mg\mu_2 \cos\alpha \,.\, \ell_2),$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\ell} \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{\ell^2}} = \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell}$$

és ezekből $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{11}{13}$.

Az $\ell_1 + \ell_2 = 13$ egyenlettel összevetve

$$\ell_1 = \frac{143}{24}\ \text{m}, \quad \ell_2 = \frac{169}{24}\ \text{m}.$$

$$a_1 = 2\ \text{m/s}^2; \quad a_2 = 1,7\ \text{m/s}^2; \quad t_1 + t_2 \approx 6,2\ \text{s}.$$

140. A körmozgást végző golyóra két erő hat: a fonálerő és a nehézségi erő. Newton II. axiomája szerint

$$F - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{r}.$$

A fonálerő tehát

$$F = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\alpha.$$

A F ismeretében az a v sebesség, amelynél a fonál elszakadt, meghatározható. Az energiamegmaradási elv szerint:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\,\ell\cos\alpha, \quad \text{ahonnan}$$

$$v_o^2 = v^2 - 2g\,\ell\cos\alpha, \qquad v_o = 5\ \text{m/s}.$$

141. a) Előző feladat megoldásában láttuk, hogy a feszitőerő:

$$F = m\,v^2/\ell + mg\cos\alpha,$$

ahol α a függőlegestől mért szög. Minthogy most $v_o = 0$,

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = mg\,\ell\cos\alpha,$$

ami a függőleges helyzetben ($\alpha = 0$) 3 mg feszitőerőt jelent.

Ekkor azonban a fonál középen megakad, s a testet $\frac{\ell}{2}$ sugaru körpályára kell kényszeriteni. Ehhez nyilván nagyobb centripetális erőre van szükség. Az előbbi 3 mg erőből mg kellett a nehézségi erő leküzdésére, a maradó 2 mg pedig az ℓ sugaru körpályán tartáshoz. Feleakkora sugaru körpályán tartáshoz - változatlan kerületi sebesség mellett - kétszer akkora centripetális erőt, tehát 4 mg-t kell kifejteni, mert állandó kerületi sebesség mellett forditva arányos a körpálya sugarával. Továbbra is kell még mg erő a nehézségi erő leküzdésére, tehát a fonál feszitőereje abban a pillanatban, amikor a fonál a szögben megakad, 3 mg-ről 5 mg-re ugrik fel.

Határozzuk meg most már a feszitőerőt abban az esetben, amikor az inga $\frac{\ell}{2}$ hosszuságu alsó fele a függőlegestől β szöggel hajlott már el (13. ábra). ($0 \leqq \beta \leqq 90^o$)

Az energiamegmaradás szerint $\frac{1}{2}m\,v^2 = 2\,mgx$, ahol most

$$x = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}\cos\beta$$

A feszitőerő nagysága $F = G' + F_c$, ahol $G' = mg \cos\beta$ és

$$F_c = m \frac{v^2}{\ell/2} = 2\,mg\,(1 + \cos\beta)\,.$$

Ezeket beirva a feszitőerő kifejezésébe, kapjuk:

$$F = 2\,mg + 3mg \cos\beta$$

Speciális esetben $\beta = 0$-nál (függőleges helyzet)

$$F = F_2 = 5\,mg,$$ ahogyan ezt vártuk is, és

$\beta = 90^\circ$-nál: $F = F_3 = 2\,mg$. A fonál tehát vizszintes helyzetben is feszül, 2 mg erőt fejtve ki.

Az inga tovább lendül felfelé. Közben már a szükséges centripetális erő egy részét a nehézségi erő fonálirányu vetülete biztositja:

$$F = F_c - G'\,.$$

Ha most γ-val jelöljük a fonálnak a vizszintessel bezárt szögét,

$$G' = mg\,.\,\sin\gamma \quad \text{és} \quad x' = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\,.\,\sin\gamma\,.$$

Mivel most $v^2 = 2\,gx'$, a feszitőerőre adódik: $F = 2mg - 3\,mg \sin\gamma$.

b) Abban a pillanatban, amikor

$$\sin\gamma = \frac{2}{3}\,,$$

a feszitőerő nullává válik. A következő pillanatban pedig a nehézségi erőnek a kör középpontja, vagyis a bevert szög felé mutató összetevője nagyobb lesz már, mint a körmozgás folytatásához szükséges centripetális erő. A test ekkor elhagyja a körpályát, tehát itt

$$x' = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\,.\,\frac{2}{3} = \frac{\ell}{6}\,,$$ vagyis elindulási

helyzeténél $\ell/6$-tal van mélyebben.

142. Az ismeretlen tömeg $= \dfrac{a^2 D}{2} = \underline{0{,}115\ \text{kg.}}$

143. G = <u>20 pond.</u>

144. $D = 3 \cdot 10^5$ N/m ; $T = \underline{0,59\ s}$; $T_o = \underline{0,33\ s.}$

145. $m = \dfrac{T^2 D}{4\pi^2} = \underline{3,6\ kg.}$

146. $D = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} = 3,87$ N/m , $\ell = \underline{0,507\ m.}$

147. Az általános megoldás:

$$x = A \cos\omega t + B \sin\omega t,$$

ahol $A = x_o = 1$ m, $\omega = \sqrt{\dfrac{F_1}{mx_1}} = 2/s$, $B = \dfrac{v_o}{\omega} = 2$ m.

148. 8 cm.

149. $T = \underline{1,78\ s.}$

150. $\underline{2,5\ J}$

151. A mozgási energia egy tetszés szerinti t időpillanatban

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A\omega\cos\omega t)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\omega t,$$

a helyzeti energia:

$$E_h = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D (A \sin\omega t)^2 = \frac{1}{2} D A^2 \sin^2\omega t.$$ Mivel

$$\omega^2 = \frac{D}{m}, \quad E = E_m + E_h = \frac{1}{2} m \frac{D}{m} A^2 \cos^2\omega t + \frac{1}{2} D A^2 \sin^2\omega t =$$

$$= \frac{1}{2} D A^2 (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{1}{2} m (\omega A)^2,$$ amely az

időtől független állandó érték.

152. A golyó által leirt körpálya sugara $\dfrac{\ell_o + \Delta\ell}{\sqrt{2}}$.

A rugó és a sulyerő eredője szolgáltatja a centripetális erőt:

$$\left(\frac{m\,v^2\sqrt{2}}{\ell_o+\Delta\ell}\right)^2 = \left(D\frac{\Delta\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 - (mg)^2 .$$

Másrészt $$\frac{m\,v^2\sqrt{2}}{\ell_o+\Delta\ell} = mg .$$

Az előző összefüggésbe ezt beírva nyerjük: $mg\sqrt{2} = D\frac{\Delta\ell}{\sqrt{2}}$, ahonnan

$$\Delta\ell = \frac{2\,mg}{D} = 0,0667\ \text{m} = 6,67\ \text{cm}, \quad v = \sqrt{\frac{g(\ell_o+\Delta\ell)}{2}} = 1,61\ \text{m/s}.$$

153. A nehézségi erő potenciálját válasszuk ugy, hogy a A pont magasságában nulla legyen. A test potenciális energiája tehát az eredeti helyzetben nulla. Amikor a fonal megnyulása maximális, akkor a test éppen áll, kinetikus energiája nincs. A nehézségi erőtől származó potenciális energiája

$$-Mg\,(\ell_o+\Delta\ell_{max}) .$$

A fonal megnyulásából eredő potenciális energiája pedig $\frac{D}{2}\Delta\ell_{max}$, ahol D a rugalmas erő arányossági tényezője.

Az energiamegmaradás tétele szerint e két potenciális energia összegének nullának kell lennie:

$$\frac{D}{2}\Delta\ell_{max} - Mg\,(\ell_o+\Delta\ell_{max}) = 0.$$

D értékét abból számithatjuk ki, hogy $\Delta\ell_o$ megnyulásánál a fonal Mg erővel tart egyensulyt, tehát $Mg = D\Delta\ell_o$, innen

$$D = \frac{Mg}{\Delta\ell_o}, \quad \text{és igy} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\ell_{max}^2}{\Delta\ell_o} - (\ell_o+\Delta\ell_{max}) = 0,$$

rendezve $$\Delta\ell_{max} = \Delta\ell_o\,.\,\left(1+\sqrt{1+\frac{2\ell_o}{\Delta\ell_o}}\right).$$

154. $a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . 60\,R = \frac{g}{60^2}$, ahol a Föld sugara R = 6370 km,

tehát

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\,60^3\,.\,R = 9,8\ \text{m/s}^2.$$

155. $$g' = \left(\frac{6370}{6390}\right)^2 \cdot g = 0,994 . g = 9,75 \text{ m/s}^2.$$

156. 1000 km magasságban a gravitációs gyorsulás a

$$F = \gamma \frac{M\,m}{r^2} \text{-ből } a = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} = g\left(\frac{6370}{7370}\right)^2 = 7,25 \text{ m/s}^2.$$

A műbolygó ekkora gyorsulással csak akkor maradhat körpályáján, ha

$$a = \frac{v^2}{r} \text{ és igy } \underline{v} = \sqrt{a \cdot r} = \underline{7310 \text{ m/s.}}$$

157. Igen nagy magasságról van szó, tehát csak a tömegvonzóerővel számolhatunk. (g nem állandó!) A Földet gömbnek tekintve, ugy vehetjük, hogy egész tömege a középpontjában van egyesitve. A Föld tömege: M, sugara: R.

A kinetikus energia h magasságban = 0 (mert v = 0)

A kinetikus energia a Föld felszinén: $\frac{1}{2} m v^2$

Potenciális energia a Föld felszin felett h magasságban:

$$-\frac{\gamma mM}{R+h} + \text{konst.}$$

Potenciális energia a Föld felszinén: $-\frac{\gamma mM}{R} + \text{konst.}$

$$E_{kin} = \gamma m \cdot M\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right] = \frac{\gamma m\,M\,h}{r(R+h)}$$

A végsebesség a Föld felszinén:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2\,M\,h\,\gamma}{R(R+h)}}$$

Ha $h \to \infty$, akkor:

$$v = \sqrt{\frac{2\,M\,\gamma}{R(\frac{R}{h}+1)}} = \sqrt{\frac{2\,M\,\gamma}{R}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

158. $W = \frac{\gamma m M}{R} - \frac{\gamma m M}{60 R} = \frac{59}{60} mg R \cong 6,2 \cdot 10^7 J$.

159. a) Ha csak a test és a Föld közötti gravitációs vonzást vesszük figyelembe, ahhoz, hogy az m tömegü test a Föld felszinéről a végtelenbe jusson rajta a nehézségi erőtér ellenében

$$W = \gamma \frac{M.m}{R} = mg R \text{ munkát kell végezni.}$$

Ha ezt a munkát a testtel közölt kinetikus energia fedezi:

$$\frac{1}{2} mv_{sz}^2 = \gamma \frac{M.m}{R} = mg R ;$$

$v_{sz}^2 = 2gR.$

$R = 6,37 \cdot 10^6$ m;

$v_{sz} = \underline{11,18 \text{ km/s}}$

b) $\frac{1}{2} mv_{sz}^2 \frac{M.m}{R+h} = mg \frac{R^2}{R+h}$

$$v_{sz}(h) = \sqrt{2gR \cdot \frac{R}{R+h}} .$$

c) $P = \frac{W}{t} = \frac{mg R}{t} \approx 6,25 \cdot 10^7$ watt $= 6,25 \cdot 10^4$ kw $\approx 8,5 \cdot 10^4$ LE.

160. Legyen r_1 a minimális, r_2 a maximális távolság az erő centrumától. Akkor

$$r_1 = 6553 \text{ km}, \qquad r_2 = 6621 \text{ km}.$$

Az impulzusmomentum állandósága alapján $v_1 r_1 = v_2 r_2$.

Az energiamegmaradás elve alapján

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \gamma \frac{M}{r_1} = \frac{1}{2} v_2^2 - \gamma \frac{M}{r_2}, \text{ mivel pedig } \gamma M = g R^2,$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2 gR^2 \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} .$$

Innen

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gr_1^2 R^2}{(r_2 + r_1) r_1 r_2}} = 7,72 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

$$v_1 = \frac{r_2}{r_1} v_2 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

$$2a = r_1 + r_2 = 1,3174 \cdot 10^7 \text{ m .}$$

A keringési idő

$$R = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}} = 89 \text{ perc.}$$

$$v = \frac{2a\pi}{T} = 7,75 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$