Kinetikus gázelmélet

A feladatokban előforduló állandók:

A Boltzmann-állandó: $k = 1,38.10^{-16} \frac{erg}{fok}$.

A molekulasulynyi mennyiségben levő molekulák száma, a Loschmidt-szám: $N_o = 6,02.10^{23}$.

Az egyetemes gázállandó: $R = k.N_o = 8,31.10^7 \frac{erg}{fok.mol}$.

Az ideális gáz nyomása felirható a

$$p = \frac{nkT}{V}$$

alakban, ahol T a hőmérséklet, n a molekulák száma és V a térfogat.

De felirható a nyomás

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} = \frac{1}{3} \frac{n}{V} \mu \overline{v^2} \; *$$

összefüggéssel is, ahol ρ a sürüség, $\overline{v^2}$ a sebességnégyzetek átlagértéke, μ egy molekula tömege.

A Maxwell-féle sebességeloszlási törvény megadja, hogy n számu molekulából hánynak (Δn) a sebessége esik a v és v+ Δ v közötti sebességtartományba:

---

*Ebben a fejezetben a felülvonás nem vektormennyiséget, hanem átlagértéket jelöl.

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{2kT}\right)^{+\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} \Delta v$$

Itt T a hőmérséklet Kelvin-fokokban.

A görbe maximumának megfelelő v_o legvalószínübb sebesség:

$$v_o = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

M a gramm molekulasuly.

A sebességek átlagértéke a $\bar{v}$ középsebesség:

$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 1,13\ v_o$$

A sebességnégyzetek átlagértékének négyzetgyöke a négyzetes középsebesség

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,22\ \bar{v}$$

Ütközési szám és közepes szabad uthossz

Azt, hogy egy molekula hányszor ütközik másodpercenként a többi molekulával, a Z ütközési szám adja meg:

$$Z = 4\sqrt{2}\pi r^2 N \bar{v}.$$

Itt r a gázkinetikai átmérő fele, N a térfogategységben levő molekulaszám.

A közepes szabad uthossz:

$$\bar{\ell} = \frac{\bar{v}}{Z} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 N}.$$

Belső surlódás és diffuzió

A gázok η belső surlódási együtthatója:

$$\eta = \frac{1}{3}\mu N \bar{v} \bar{\ell} = \frac{1}{3}\rho \bar{v} \bar{\ell} .$$

Itt ρ a sürüség, N a térfogategységenkénti molekulaszám, $\bar{\ell}$ a közepes szabad uthossz, μ pedig egy molekula tömege.

A diffuziót egyenletes koncentrációváltozás esetén Fick első törvénye irja le:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = - D \frac{\Delta N}{\Delta x}$$

Itt Δ n az x-tengelyre merőleges egységnyi felületen Δ t idő alatt átáramló molekulák számát jelenti. Δ N az x tengely Δ x szakaszán fellépő koncentrációváltozás. D a diffuziós együttható, amely egyfajta molekulákból álló rendszerben

$$D = \frac{1}{3} . \bar{v} . \bar{\ell}$$

A Boltzmann-féle eloszlás

Ha a molekulák olyan erőnek vannak alávetve, amely U potenciállal rendelkezik, ugy két pont között, amelyek között a potenciálkülönbség Δ U, a koncentrációk aránya:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{\Delta U}{kT}}$$

N_1 a koncentráció az U + Δ U, N_2 az U potenciálu helyen. Pl. a nehézségi erőtérben z magasságban mgz a potenciál, igy

$$\frac{N_2}{N_o} = e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

Ez a barometrikus magasságformula.

A Brown-mozgás Einstein-Smoluchowski által kidolgozott elmélete szerint a részecskék közepes elmozdulásnégyzete $\overline{x^2}$:

$$\overline{x^2} = \frac{kT}{3\pi\eta r}\tau$$

ahol τ az időtartam, r a részecske sugara és η a folyadék viszkozitása.

A termodinamikai valószinüséget a

$$W = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots N_k!}$$

kifejezés határozza meg, ahol N az összes részecskék száma, N_1, N_2, ... N_k pedig az egyes lehetséges energiaállapotokban tartózkodó részecskék száma. Az $S = k \ln W$ kifejezés teremt kapcsolatot az entrópia és a termodinamikai valószinüség között.

Feladatok

454. A gyakorlatban csak nagy technikai felkészültséggel megvalósitható 10^{-12} Hgmm nyomásu gáz 1 cm^3-ében hány gázmolekula található 27 C^o-hőmérsékleten?

455. Határozzuk meg a négyzetes középsebességet 0 C^o-on H_2, O_2 és CO_2 gázban.

456. Mekkora egy H_2 molekula legvalószinübb sebessége 27 C^o hőmérsékleten? Hány fokra kell növelni a hőmérsékletet, hogy kétszer akkora legyen a legvalószinübb sebesség?

457. 0 C^o hőmérsékletü nitrogén molekuláinak hányad része rendelkezik 100 $\frac{m}{s}$ és 110 $\frac{m}{s}$ sebességintervallumhoz tartozó értékkel?

458. 300 C^o hőmérsékletü hidrogén gázban mekkora az 1500 m/s és 1510 m/s sebességtartományban levő molekulák számának viszonya a 3000 m/s és 3010 m/s közötti sebességgel rendelkező molekulák számához?

459. Határozzuk meg 227 C^o hőmérsékleten a klórmolekulák legvalószínűbb sebességét (v_o), átlagsebességét ($\bar{v}$) és négyzetes középsebességét ($\sqrt{\overline{v^2}}$).

460. A Dulong-Petit törvény alapján határozzuk meg az aluminium, a vas és az ólom fajhőjét, ha atomsulyaik rendre 27,56 és 207.

461. Hány ütközést szenved másodpercenként 600 K^o hőmérsékletü neongáz egy atomja 1 Hgmm nyomáson, ha a neonatom gázkinetikai átmérője $2,04.10^{-8}$ cm?

462. Határozzuk meg, hogy egy hidrogéngázt tartalmazó edény 1 cm^3-ében 0 C^o-on és 1 atm nyomáson mennyi a gázmolekulák közötti ütközések száma 1 s alatt. A H_2 molekula gázkinetikai átmérője $3,28.10^{-8}$ cm.

463. Határozzuk meg egy literes lombikban a CO_2 gáz maximális nyomását, ha a molekula szabad uthossza nagyobb az edény méreteinél. A szén-dioxid molekula gázkinetikai átmérője $3,8.10^{-8}$ cm, a hőmérséklet pedig 27 C^o.

464. Ideális gázt melegitünk állandó nyomáson. Hogyan változik a hőmérséklet változásakor a közepes szabad uthossz és a molekulák 1 másodperc alatti ütközéseinek száma?

465. Ideális gázt izotermikusan összenyomunk. Hogyan függ a közepes szabad uthossz és a molekulák másodpercenkénti ütközéseinek száma a nyomástól?

466. 0 C^o-on és egy meghatározott nyomáson az oxigénmolekulák közepes szabad uthossza $9,5.10^{-6}$ cm. Hány ütközés következik be 1 másodperc alatt, ha a nyomást az eredeti nyomásnak egy század részére csökkentjük?

467. Nitrogén esetében 0 C^o hőmérsékleten a belső surlódási együttható $\eta = 16,8.10^{-5}$ g/cm.s. Határozzuk meg a nitrogénmolekula közepes szabad uthosszának értékét 1 atm nyomás esetén.

468. Gázban mozgó kis sugaru golyóra ható surlódóerőt az $F = 6 . \pi . \eta$ rv Stokes-féle összefüggés adja meg, ahol η a gáz belső sur-

lódási együtthatója, r a gömb sugara, v a sebessége. Mekkora maximális sebességet érhet el egy 1 mm átmérőjü ólomszemcse (az ólom sürüsége 11,4 g/cm^3), ha

a) nitrogéngázban esik (a nitrogénmolekulák gázkinetikai átmérője 3.10^{-8} cm, a hőmérséklet 0 C^o),

b) hidrogéngázban esik (a hidrogénmolekulák gázkinetikai átmérője $2,2.10^{-8}$ cm, a hőmérséklet 0 C^o).

469. Mekkora sebességet érhet el egy 0,3 mm átmérőjü esőcsepp, ha a levegő belső surlódási együtthatója $1,2.10^{-4}$ g/cm.s?

470. Loschmidt eredeti gondolatmenetéhez hasonlóan határozzuk meg a molekulasulynyi mennyiségben levő molekulák számát, ha tudjuk, hogy 0 C^o hőmérsékleten, 1 atm nyomásnál a nitrogéngáz molekuláinak közepes szabad uthossza $5,9.10^{-6}$ cm, a cseppfolyós nitrogén sürüsége pedig $1,3 \frac{g}{cm^3}$.

471. Határozzuk meg a normál állapotu hidrogéngáz diffuziós együtthatóját, ha a hidrogénmolekulák közepes szabad uthossza $1,6.10^{-5}$ cm.

472. Határozzuk meg a levegő diffuziós és belső surlódási együtthatóját 760 Hgmm nyomáson és 10 C^o-on. Egy molekula gázkinetikai átmérőjét vegyük 3.10^{-8} cm-nek.

473. Hány g nitrogén diffundált át 10 másodperc alatt 100 cm^2 felületen, ha a felületre merőleges irányban a sürüség gradiense $1,26.10^{-5}$ g/cm^4. A hőmérséklet 27 C^o, a nitrogénmolekulák közepes szabad uthossza 10^{-5} cm.

474. Mekkora a termodinamikai valószinüsége annak a rendszernek, amelynek hat részecskéje hat különböző energiaállapotban foglalhat helyet és a makroeloszlás

a) 0 0 1 1 3 1
b) 0 1 0 0 5 0

alaku?

475. Mekkora a termodinamikai valószinüsége annak a 10 részecskéből álló 6 lehetséges energiaállapottal rendelkező rendszernek, amelynek makroeloszlása

0 2 1 0 4 3 ?

476. Számitsuk ki, mi a valószinüsége annak, hogy 1 erg energia egy 14 C^o hőmérsékletü testről egy 15 C^o hőmérsékletü testre önként átmenjen?

477. Egy kaloriméterben levő 1 liter 27 C^o hőmérsékletü vizbe 2 kg sulyu 67 C^o hőmérsékletü, 0,5 cal/g.fok fajhőjü fémdarabot dobunk: a két anyag hőmérséklete csakhamar kiegyenlitődik. Hányszor nagyobb a végállapot valószinüsége, mint a kiindulási állapoté?

454. $3,25 \cdot 10^4$

455. $\sqrt{\overline{v^2}} = 1840 \frac{m}{s}$ (H_2), $461 \frac{m}{s}$ (O_2), $393 \frac{m}{s}$ (CO_2)

456. $v_o = 1580 \frac{m}{s}$

457. 0,33%

458. 0,98

459. $v_o = 342 \frac{m}{s}$; $\overline{v} = 386 \frac{m}{s}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 420 \frac{m}{s}$

460. $C_{Al} = 0,22 \frac{cal}{g \cdot fok}$; $C_{Fe} = 0,106 \frac{cal}{g \cdot fok}$; $C_{Pb} = 0,029 \frac{cal}{g \cdot fok}$

461. $2,2.10^6$

462. Ha z jelöli 1 molekula másodpercenkénti ütközéseinek számát, N pedig az 1 cm^3-ben levő molekulaszámot, ugy a keresett másodpercenkénti ütközés $\frac{Nz}{2}$, hiszen minden ütközésben két molekula vesz részt. A példában $\frac{Nz}{2} = 1,55.10^{29}$.

463. Ha a lombikot gömb alakunak tételezzük fel, ugy a szabad uthossz minimálisan a gömb átmérője kell hogy legyen, és az ehhez tartozó nyomás $3,67.10^{-4}$ Hgmm.
Tehát $p < 3,67.10^{-4}$ Hgmm.

464. Minthogy a közepes szabad uthossz a gáz egészét jellemző menynyiségek közül csupán a térfogategységenkénti molekulaszám reciprokával, azaz a térfogattal arányos, ezen keresztül a hőmérséklettel is arányos, hiszen állandó nyomáson a térfogat-hőmérséklet arány állandó. Igy $\bar{\ell} \sim T$.
A másodpercenkénti ütközések száma a térfogategységben levő molekulaszámmal egyenesen, tehát a térfogattal és igy a hőmérséklettel forditva arányos, de ezen kivül még az átlagsebességgel, azaz a hőmérséklet négyzetgyökével is egyenesen arányos - ezért $z \sim T^{-\frac{1}{2}}$.

465. Az előző feladat megoldásánál alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan: $\bar{\ell} \sim p^{-1}$, $z \sim p$

466. Az izotermikus nyomáscsökkenés hatására a közepes szabad uthossz százszorosára növekedett. Minghogy $z = \frac{\bar{v}}{\bar{\ell}}$, ahol $\bar{v}$ az átlagsebesség: $\bar{v} = 0,92 . \sqrt{\overline{v^2}}$, ezért $z = 4,5.10^7$.

467. $8,9.10^{-6}$ cm.

468. A golyó akkor fog állandó sebességgel esni, ha a surlódóerő megegyezik a sulyával, azaz $6\pi\eta rv = \frac{4}{3} r^3 \pi\rho g$, ahol ρ az ólom sürüsége. Ebből $v = \frac{2\rho r^2 g}{9\eta}$.

Ehhez csupán a belső surlódási együtthatót kell meghatározni, de az az eddigiek alapján nem jelent nehézséget.

Az eredmény: v = 350 m/s (nitrogénben) és v = 770 m/s (hidrogénben).

469. $v = 4,1$ m/s.

470. A közepes szabad uthossz $\bar{\ell} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 N}$ kifejezése teremt egy összefüggést a gázkinetikai sugár (r) és a térfogategységben levő molekulaszám között. A hiányzó másik egyenlet abból a feltételezésből kapható, hogy a cseppfolyós nitrogénben a molekulák szorosan egymás mellett helyezkednek el. Ha az atomokat gömb alakuaknak tekintjük, még akkor is a térfogat bizonyos hányada "üresen" marad, mert a gömbsokaság nem töltheti ki teljesen a rendelkezésére álló térfogatot. De mert a valóságos elhelyezkedésről nincs tudomásunk, első durva közelitésként töltsük be az egész térfogatot a gömb alaku molekulákkal, ugy $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{N.V'}$, ahol ρ a gáz sürüsége, ρ' a cseppfolyós nitrogén sürüsége, V' pedig egy molekula térfogata: $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$. Igy számolva N_o (a mólnyi mennyiségben levő molekulaszám) = $3,4.10^{23}$.

471. $D = 0,91 \frac{cm^2}{s}$.

472. $D = 0,148 \frac{cm^2}{s}$; $\eta = 1,82.10^{-4}$ g/cm s.

473. A hőmérséklet meghatározza a molekulák $\bar{v}$ átlagsebességét, ebből és a közepes szabad uthosszból a D diffuziós együttható kiszámitható, aminek segitségével az átdiffundált tömegre 2.10^{-3} g adódik.

474. A termodinamikai valószinüség:

$$W = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots N_k!}$$

Igy a) W = 120
b) W = 6

475. W = 12600

476. Az $S = k \ln W$ egyenletből $W = e^{\frac{S}{k}}$

Ezért $\frac{W_1}{W_2} = e^{\frac{\Delta S}{k}}$, ahol $\Delta S = S_1 - S_2$

Itt S_1, W_1 a kezdeti állapot, S_2, W_2 pedig az 1 erg energiaátadás utáni állapot energiája és termodinamikai valószinüsége.

$$\Delta S = \left(\frac{1}{287} - \frac{1}{288}\right) \frac{\text{erg}}{\text{fok}}$$

$\frac{W_1}{W_2} = e^{10^{11}}$, tehát a spontán energiaátmenet valószinüsége

$$e^{-10^{11}}$$

477. $\frac{W_2}{W_1} = e^{10^{24}}$