

matefizika

Rend, rendezetlenség, szimmetriák (rövidített változat)

dr. Tasnádi Tamás ¹

2018. február 16.



Tartalom

Mi a rend?

Érdekes grafikáktól a periodikus rácsokig

Nem periodikus parkettázások

Dinamikai rendszerek

Szabályosság

- Rend, rendezett = szabályos, szimmetrikus
- Rendezetlen = szabálytalan

Szabályosság

- Rend, rendezett = szabályos, szimmetrikus
- Rendezetlen = szabálytalan

Legegyszerűbb szabály: ismétlődés, periodikusság.

Egy minta ismétlődhet

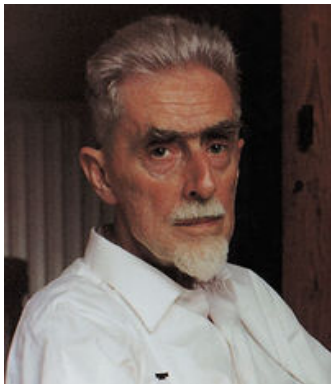
- térben (\implies rácsok, parkettázások)
- időben (\implies dinamikai rendszerek)

Ismétlődés a zenében

- Mike Oldfield: Tubular bells III.
(<https://www.youtube.com/watch?v=txGy3pX4amQ>)
- AC/DC: Thunderstruck
(<https://www.youtube.com/watch?v=v2AC41dg1nM>)
- Cecil Taylor: Szabad rögtönzés
(<https://www.youtube.com/watch?v=EstPgi4eMe4>)
- Stockhausen: Zongoradarab 5/7
(<https://www.youtube.com/watch?v=n4Nx-unH00M>)

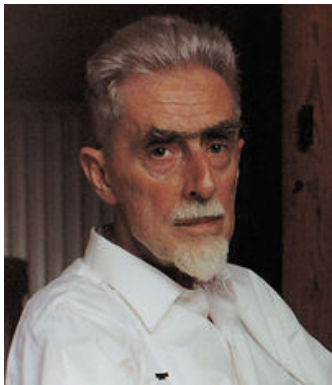
Maurits Cornelis Escher (1898–1972)

Holland grafikus.



Maurits Cornelis Escher (1898–1972)

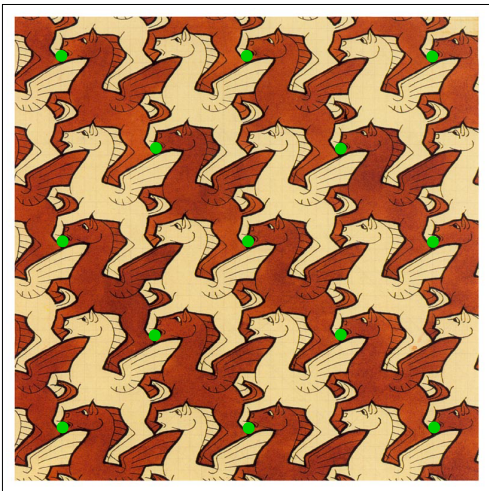
Holland grafikus.



Periodikus grafikától a rácsig I. (Pegazus)

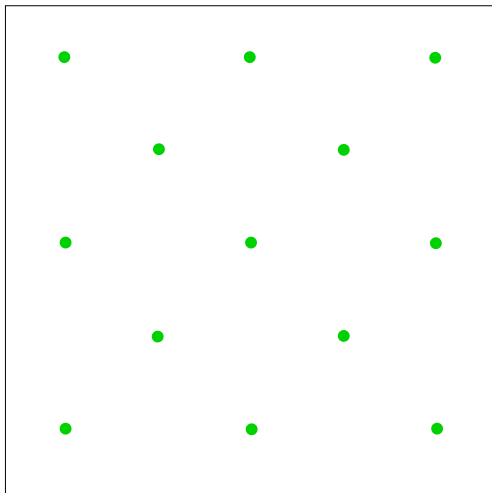


Periodikus grafikától a rácsig I. (Pegazus)

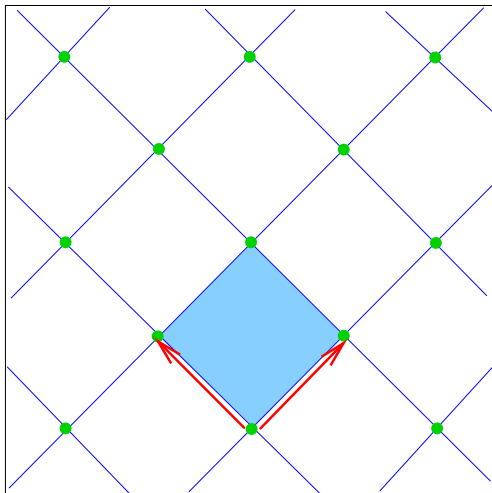


azonos helyzetű pontok

Periodikus grafikától a rácsig I. (Pegazus)

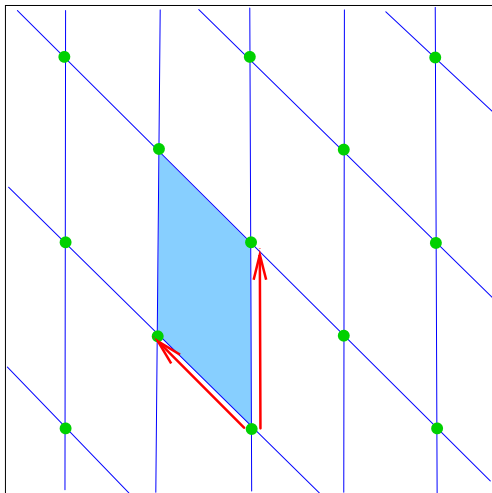


Periodikus grafikától a rácsig I. (Pegazus)



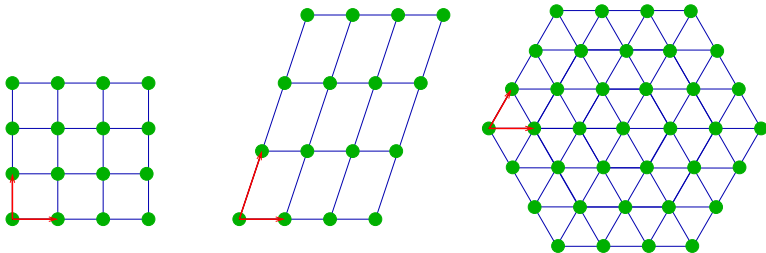
egy elemi cella

Periodikus grafikától a rácsig I. (Pegazus)



egy másik elemi cella

Kétdimenziós rácsok



Létezik 2-, 3-, 4- illetve 6-fogású forgásszimmetriával rendelkező periodikus rács.

Tétel:

Nem létezik ötfogású szimmetriával rendelkező periodikus rács.

Történet

Alapkérdés: Van-e olyan csempekészlet, amivel **csak** aperiodikusan parkettázható a sík?

1961 Hao Wang: -> eldönthetőségi probléma

1964 Robert Berger: aperiodikus parkettázás több, mint 20000, majd 104 dominóval

1976 Raphael M. Robinson: 24 dominó

1973 Roger Penrose: 6 dominó

1974 Roger Penrose: 2 dominó

1984 Kvázikristályok fölfedezése

2010 Joshua E.S. Socolar és Joan M. Taylor: 1 dominó (nem összefüggő)

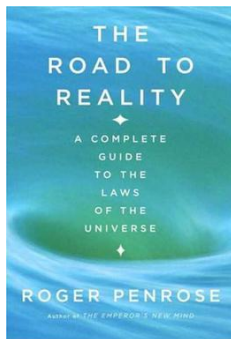
Sir Roger Perose (1931–)

Angol matematikus és elméleti fizikus.

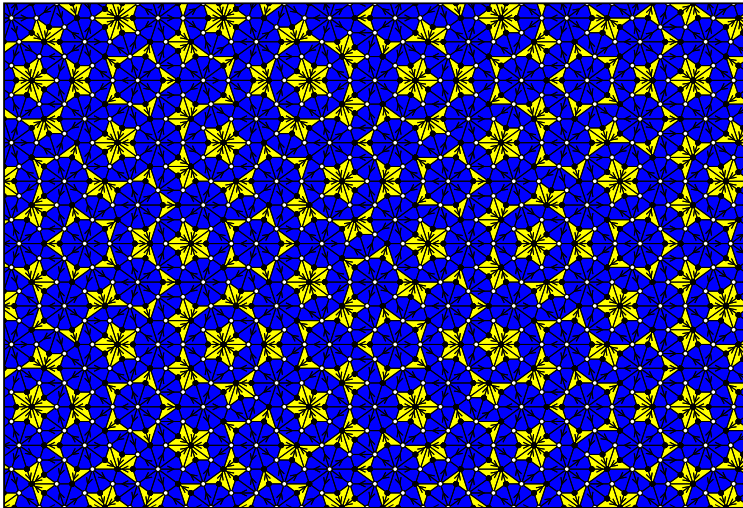


Sir Roger Penrose (1931–)

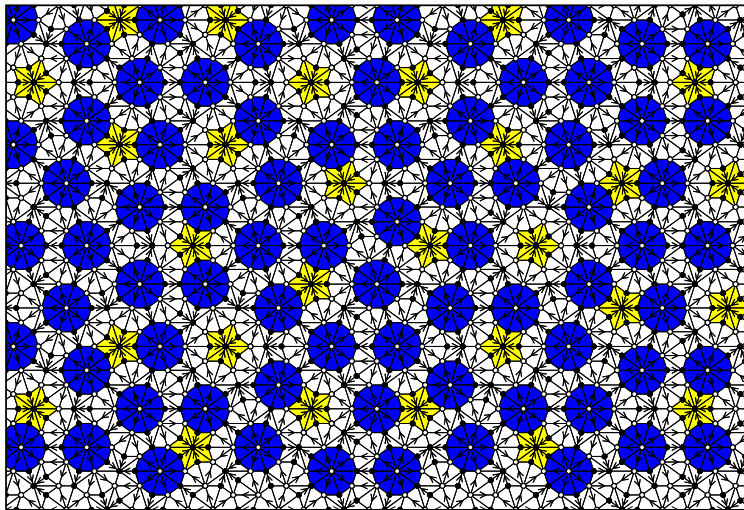
Angol matematikus és elméleti fizikus.



Penrose parkettázás



Penrose parkettázás



A Penrose-parkettázás alaptulajdonságai

- **Létezés:**
Végtelen sok különböző parkettázás létezik a síknak.

A Penrose-parkettázás alaptulajdonságai

- **Létezés:**
Végtelen sok különböző parkettázás létezik a síknak.
- **Nem periodikus:**
Nem létezik periodikus csempézés.

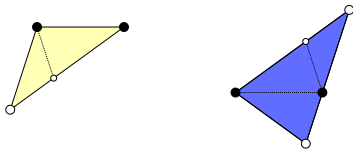
A Penrose-parkettázás alaptulajdonságai

- **Létezés:**
Végtelen sok különböző parkettázás létezik a síknak.
- **Nem periodikus:**
Nem létezik periodikus csempézés.
- **Lokális azonosság:**
Bármely végtelen csempézés tetszőleges véges darabja végtelen sokszor előfordul bármely más végtelen parkettázásban.

A Penrose-parkettázás alaptulajdonságai

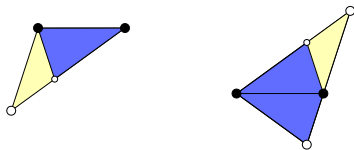
- **Létezés:**
Végtelen sok különböző parkettázás létezik a síknak.
- **Nem periodikus:**
Nem létezik periodikus csempézés.
- **Lokális azonosság:**
Bármely végtelen csempézés tetszőleges véges darabja végtelen sokszor előfordul bármely más végtelen parkettázásban.
- **Előfordulási gyakoriság:**
A kék és sárga háromszög ugyanolyan arányban fordul elő minden parkettázásban.

Az alapcsempék előfordulási aránya



- Előfordulási arány egy véges mintában: $\lambda = \frac{N_L}{N_S}$

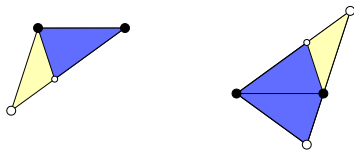
Az alapcsempék előfordulási aránya



- Előfordulási arány egy véges mintában: $\lambda = \frac{N_L}{N_S}$
- Kettős dekompozíció után:

$$N'_L = 2N_L + N_S, \quad N'_S = N_L + N_S, \quad \lambda' = \frac{N'_L}{N'_S} = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}$$

Az alapcsempék előfordulási aránya



- Előfordulási arány egy véges mintában: $\lambda = \frac{N_L}{N_S}$
- Kettős dekompozíció után:

$$N'_L = 2N_L + N_S, \quad N'_S = N_L + N_S, \quad \lambda' = \frac{N'_L}{N'_S} = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}$$

- A skálázási tulajdonság miatt: $\lambda' = \lambda$,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{arany metszés!}$$

Szilárdtestek

Kristály

- Eltolási szimmetria
- Hosszútávú orientációs rend

Szilárdtestek

Kristály

- Eltolási szimmetria
- Hosszútávú orientációs rend

Amorf

- **Nincs** eltolási szimmetria
- **Nincs** hosszútávú orientációs rend

Szilárdtestek

Kristály

- Eltolási szimmetria
- Hosszútávú orientációs rend

Kvázikristály (1984)

- **Nincs** eltolási szimmetria
- Hosszútávú orientációs rend

Amorf

- **Nincs** eltolási szimmetria
- **Nincs** hosszútávú orientációs rend

Szilárdtestek

Kristály

- Eltolási szimmetria
- Hosszútávú orientációs rend

Kvázikristály (1984)

- **Nincs** eltolási szimmetria
- Hosszútávú orientációs rend

Amorf

- **Nincs** eltolási szimmetria
- **Nincs** hosszútávú orientációs rend

Matematikai modellek:

- periodikus csempézések
- rácsok
- aperiodikus csempézések
- Penrose-parkettázás

Kvázikristályok fölfedezése II.

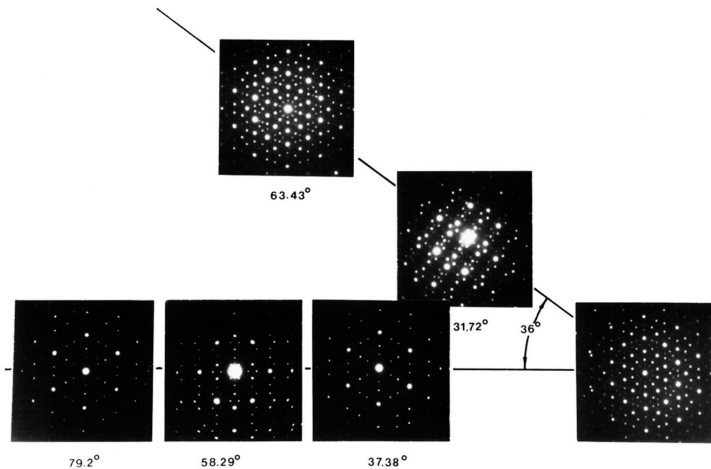
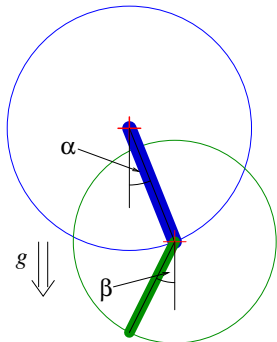


FIG. 2. Selected-area electron diffraction patterns taken from a single grain of the icosahedral phase. Rotations match those in Fig. 1.

Kettős inga

Két egymásra helyezett inga, melyek egy síkban mozoghatnak, nehézségi erőterben.

- determinisztikus
- két szabadsági fok
- **kis kitérések**, lineáris egyenletek
 \implies **szabályos** (kváziperiodikus, periodikus) mozgás
- **nagy kitérések**, nem lineáris egyenletek \implies **kaotikus** dinamika
- kezdeti feltételre való érzékenység

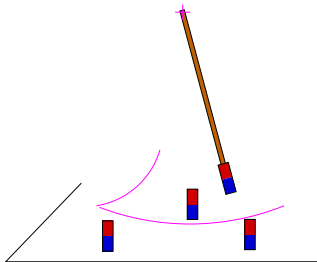


Kísérlet, film, (szimuláció).

Mágneses inga

Az inga végén és az inga alatt néhány pontban egy-egy mágnes található. A kölcsönhatás lehet vonzó vagy taszító is.

- determinisztikus
- két szabadsági fok
- **kaotikus**
- **fraktálszerű** „fázisportré”



Kísérlet, (szimuláció).

Lemmingek populáció-dinamikája

Igen **szapora** rágcsáló.

Populációja:

- változékony,
- sokszor **ciklikusan** változik,
- néha **szabálytalan**.



Nagyon egyszerű modell:

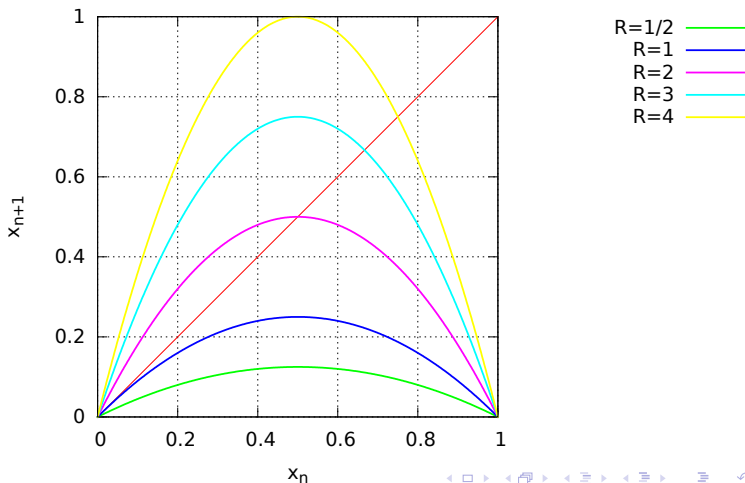
- alacsony populáció \implies gyors növekedés
- magas populáció \implies pusztulás

Logisztikus leképezés

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n)$$

$$0 \leq x_n \leq 1,$$

$$0 \leq R \leq 4$$



Benoît Mandelbrot

Benoît Mandelbrot (1924–2010): lengyel származású francia-amerikai matematikus.

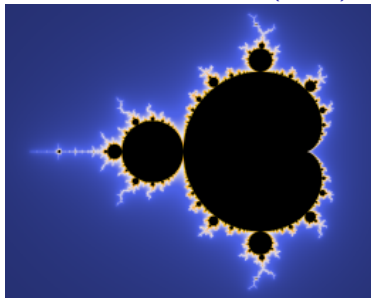


Benoît Mandelbrot

Benoît Mandelbrot (1924–2010): lengyel származású francia-amerikai matematikus.



Mandelbrot-halmaz (1982)



Mandelbrot-halmaz

- Vegyünk egy c komplex számot,
- c segítségével állítsuk elő a

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

rekurzióval adott sorozatot.

$$\begin{aligned} z_0 &= 0, & z_1 &= 0^2 + c = c, \\ z_2 &= c^2 + c, & z_3 &= (c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c \\ &\dots \end{aligned}$$

- c pontosan akkor eleme a Mandelbrot-halmaznak, ha a segítségével megadott z_n sorozat korlátos.

Szimuláció.

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**
- rendezetlen=**szabálytalan**

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**
- rendezetlen=**szabálytalan**
- egyszerű szabály: ismétlődés, **periodikusság** (térben vagy időben)

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**
- rendezetlen=**szabálytalan**
- egyszerű szabály: ismétlődés, **periodikusság** (térben vagy időben)
- léteznek olyan **térbeli** mintázatok is, melyekben nagyfokú szabályosság van, de nincs pontos ismétlődés:

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**
- rendezetlen=**szabálytalan**
- egyszerű szabály: ismétlődés, **periodikusság** (térben vagy időben)
- léteznek olyan **térbeli** mintázatok is, melyekben nagyfokú szabályosság van, de nincs pontos ismétlődés:
 - **Penrose-parkettázás**
 - **Mandelbrot-halmaz**

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**
- rendezetlen=**szabálytalan**
- egyszerű szabály: ismétlődés, **periodikusság** (térben vagy időben)
- léteznek olyan **térbeli** mintázatok is, melyekben nagyfokú szabályosság van, de nincs pontos ismétlődés:
 - **Penrose-parkettázás**
 - **Mandelbrot-halmaz**
- léteznek olyan **időbeli** folyamatok, melyekben szabályos és szabálytalan (kaotikus) mintázatok is megfigyelhetők:

Összefoglalás

- rend=**szabályosság**
- rendezetlen=**szabálytalan**
- egyszerű szabály: ismétlődés, **periodikusság** (térben vagy időben)
- léteznek olyan **térbeli** mintázatok is, melyekben nagyfokú szabályosság van, de nincs pontos ismétlődés:
 - **Penrose-parkettázás**
 - **Mandelbrot-halmaz**
- léteznek olyan **időbeli** folyamatok, melyekben szabályos és szabálytalan (kaotikus) mintázatok is megfigyelhetők:
 - **kaotikus ingák**
 - populáció-dinamika, **logisztikus leképezés**

Köszönöm a figyelmet!

mate**fizika**

