

MateFIZIKA: Szélsőérték-elvek a mechanikában

Tasnádi Tamás*

2016. február 26.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Energiaminimum-elv a mechanikában	2
1.1. Rugón nyugvó test	2
1.2. Töltések egyensúlya függőleges helyzetben	3
1.3. Belógó kötélre akasztott csiga	4
1.4. Matematikai kitekintés	4
1.5. Félgömbön billegő téglá	5
1.6. Izogonális pont	7
2. „Okos” szappanhártyák	8
2.1. A felületi feszültség	8
2.2. Kísérletek	9
2.3. A görbületi nyomás	11
Hivatkozások	12

*BME, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Bevezetés

A *szélsőérték* a matematikában *minimumot* vagy *maximumot* jelent. Általában azt mondjuk, hogy az f függvénynek egy x_0 pontban *lokális minimuma* van, ha a pont egy kis környezetében a függvényértékek nem kisebbek $f(x_0)$ -nál. Hasonlóan definiálható a *lokális maximum* fogalma is, és a kettőt együtt *lokális szélsőértéknek* nevezzük. A lokális jelző elhagyásával a minimumok legkisebbikére illetve a maximumok közül a legnagyobbra utalunk.

A fizikában igen sok törvény megfogalmazható *szélsőérték-elvként*, azaz olyan formában, hogy valamely rendszer megvalósuló állapota esetén bizonyos függvénynek minimuma vagy maximuma van. A mechanikában a leggyakoribb ilyen függvény az energia.

1. Energiaminimum-elv a mechanikában

Egy mechanikai rendszer egyensúlyának feltétele általában az, hogy a rendszerben levő testekre ható *eredő erők és forgatónyomatékok nullák* legyenek. Ez sokszor egyenértékű egy alkalmasan bevezetett *energia-függvény szélsőértékével*.

Általában beszélhetünk *stabil* és *instabil* egyensúlyi helyzetekről. Erők, forgatónyomatékok nyelvén a stabilitás azt jelenti, hogy a rendszert az egyensúlyi helyzetéből kitérítve a testekre olyan irányú erők, forgatónyomatékok hatnak, amelyek azokat az *egyensúlyi helyzet felé* igyekeznek visszatéríteni. Az energiának ilyenkor *lokális minimuma* van az egyensúlyi helyzetben.

Néhány egyszerű példán bemutatjuk, hogyan vizsgálhatók az egyensúlyi helyzetek erőkkel illetve energiával.

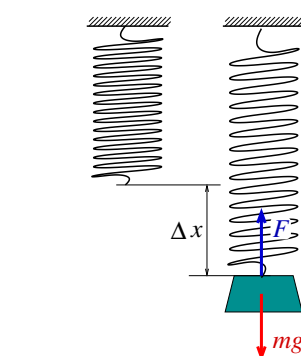
1.1. Rugón nyugvó test

Kísérlet: Akasszunk egyik végén rögzített rugóra testeket és vizsgáljuk meg a rugó megnyúlását!

Feladat: Egy D direkciós erejű, függőleges rugóra m tömegű testet akasztunk (1. ábra). Mennyivel nyúlik meg a rugó?

Megoldás (erőkkel): Egyensúlyi helyzetben a rugóra akasztott testre ható eredő erő zérus, azaz

$$mg = D\Delta x, \quad \text{ahonnan} \quad \Delta x = \frac{mg}{D}.$$



1. ábra. A rugón nyugvó test.

Az egyensúlyi helyzet *stabil*, hiszen ha a testet kicsit lejjebb helyezzük, a rugóerő megnő, tehát fölfelé irányul az eredő erő. ■

Megoldás (energiával): A rendszer teljes energiája a rugó rugalmas energiájának és a test helyzeti energiájának az összege. Ennek szélsőértékhelyét teljes négyzetté alakítással kereshetjük meg:

$$E(\Delta x) = \frac{1}{2}D\Delta x^2 - mg\Delta x = \frac{D}{2}\left(\Delta x - \frac{mg}{D}\right)^2 - \frac{m^2g^2}{2D}.$$

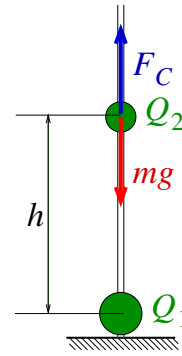
A kifejezésnek akkor van szélsőértéke, ha a négyzetes tag nulla, azaz $\Delta x = \frac{mg}{D}$. A függvénynek *minimuma* van, tehát az egyensúly *stabil*. ■

1.2. Töltések egyensúlya függőleges helyzetben

Feladat: Egy rögzített $Q_1 > 0$ ponttöltés fölötti függőleges félegyenesen m tömegű, $Q_2 > 0$ töltésű test mozoghat szabadon (2. ábra). Milyen h magasságban lesz a felső töltés egyensúlyban?

Megoldás (erőkkel): Egyensúlyi helyzetben a felső töltésre zérus erő hat, tehát

$$mg = k\frac{Q_1Q_2}{d^2}, \quad \text{ahonnan} \quad h = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}.$$



■ 2. ábra. Az egymást taszító töltések.

Megoldás (energiával): A rendszer teljes energiája felső töltés helyzeti energiájának és a töltésrendszer elektrosztatikus energiájának összege. A két tag összegét alulról becsülhetjük a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséggel:

$$E(h) = \underbrace{mgh}_{E_1} + \underbrace{k\frac{Q_1Q_2}{h}}_{E_2} = 2\frac{E_1 + E_2}{2} \geq 2\sqrt{E_1E_2} = 2mgkQ_1Q_2.$$

A mértani közép nem függ h -tól! A számtani közép pontosan akkor egyezik meg a mértanival, ha a tagok megegyeznek, ez a feltétel adja meg az energia minimumát:

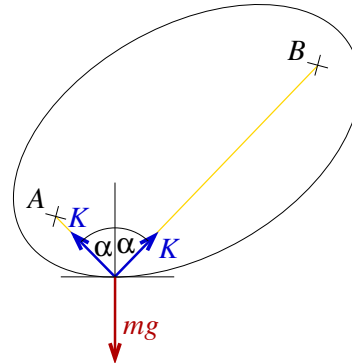
$$E_1 = E_2, \quad \text{azaz} \quad mgh = k\frac{Q_1Q_2}{h}, \quad \text{ahonnan} \quad h = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}.$$

A számtani, mértani és más közepekről sok érdekesség olvasható a [11, 12] és [13] cikkekben. ■

1.3. Belógó kötélre akasztott csiga

Az előző két feladatban láthattuk, hogy az egyensúlyi helyzet kétféle módon való meghatározása ugyanarra az eredményre vezet. Mostani példánkban felhasználjuk ezt a fizikai elvet, és ennek segítségével egy matematikai tételt bizonyítunk be!

Kísérlet: Rögzítsük egy $2a$ hosszúságú kötél két végpontját a tetszőlegesen választott A és B pontban, a kötéltre helyezünk mozgó csigát, és arra akasszunk egy súlyt (3. ábra)! Figyeljük meg, hogy hol van a csiga egyensúlyban!



Feladat: Határozzuk meg a csiga egyensúlyi helyzetét!

Megoldás: Most is kétféleképpen oldhatjuk meg a feladatot. Az erők nyelvén fogalmazva, az egyensúlyi helyzetben a csigára ható két K kötélerő összege éppen ellentétes a súlyra ható mg nehézségi erővel. Mivel a kötélerők azonosak, a nehézségi erő hatásvonalala felezi a kötélszárak által alkotott szöget.

3. ábra. A laza kötélben levő mozgó csiga.

Ugyanakkor az egyensúlyi helyzetben a rendszer energiája minimális, ami azt jelenti, hogy a csiga a lehető legmélyebb helyzetben van. A kötélt által megszabott kényszer miatt a csiga ellipszisen mozog, amelynek fókuszpontjai a kötelek rögzített végpontjai (A és B), és nagytengelye a kötélt hosszának fele, azaz a . Tehát a csiga az ellipszis legmélyebb pontjában van nyugalomban, ahol az ellipszis érintője vízszintes. ■

A két feltétel összevetéséből érdekes geometriai állítást kapunk:

Geometriai tétel: Az ellipszis érintője felezi az adott pontba húzott vezérsugarak külső szögét.

A kúpszeletekről sok érdekesség olvasható az [5] és a [6] cikkekben.

1.4. Matematikai kitekintés

Sokszor ismernünk kell, hogy bizonyos függvények hogyan közelíthetők egy adott pont körül lineáris vagy másodfokú polinommal.

Közismert, hogy kis szögek szinusza, tangense közelítőleg megegyezik magával a kis szöggel (radiánban), azaz

$$\sin \varepsilon \approx \text{tg } \varepsilon \approx \varepsilon, \quad \text{ha } |\varepsilon| \ll 1.$$

Ez az állítás könnyen szemléltethető, ha az egységkörben lerajzoljuk a szöget, a szinuszt és a tangenszt reprezentáló ívet és szakaszokat (4. ábra).

Közismert az is, hogy $|\varepsilon| \ll 1$ esetén (azaz ha ε abszolút értéke jóval kisebb, mint egy) $|\varepsilon|^3 \ll |\varepsilon|^2 \ll |\varepsilon| \ll 1$, és ezért

$$(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon, \quad (1 + \varepsilon)^3 \approx 1 + 3\varepsilon.$$

Az előzőek felhasználásával, és az egyenletek algebrai rendezésével az is megmutatható, hogy

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon.$$

Az előző összefüggések általánosítása a hatványfüggvényekre érvényes lineáris közelítő formula:

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon, \quad \text{ha } |\varepsilon| \ll 1 \text{ és } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tetszőleges, sima f valós függvényt is közelíthetünk egy x pont körül. A másodrendben érvényes formula a következő:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \cdot (\Delta x)^2 + \dots \quad (1)$$

Ezt a koszinusz függvényre alkalmazva az $x = 0$ pontban:

$$\cos \varepsilon \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

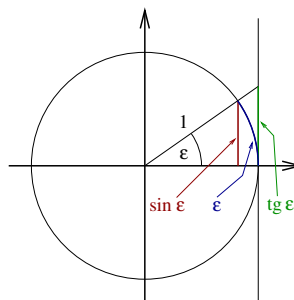
Az (1) formula általánosítása az úgynevezett *Taylor-sorfejtés*, melyről bővebben lehet olvasni például a [2] és a [3] cikkekben. Az integrálás, deriválás után érdeklődőknek az [1] cikket ajánljuk.

1.5. Félgömbön billegő téгла

Most az eddigieknél kicsit bonyolultabb stabilitási problémát vizsgálunk meg.

Kísérlet: Vízszintesen nyugvó, R sugarú félgömb tetejére helyezünk különböző magasságú téglatesteket, az 5. ábrán látható módon. Figyeljük meg, hogy az alacsony téglatestek stabil helyzetben vannak a félgömb tetején, míg a magasabbak lebillennek róla!

Feladat: Milyen h magasságú homogén téгла áll meg *stabilan* az R sugarú félgömbön?



4. ábra. Kis szög szinusza és tangense.

Legyen O a félgömb középpontja, A a félgömb felszínének legmagasabb pontja, T a ϕ szöggel kibillentett téglatest és a félgömb érintkezési pontja, B a téglatest alsó lapjának középpontja, és S a téglatest tömegközéppontja, ahogy az 5. ábra mutatja.

Erre a feladatra is két megoldást adunk.

Megoldás (forgatónyomatékkal): A téglára két erő hat: az mg nehézségi erő, amely az S tömegközéppontban támad, és a félgömb K kényszerereje, amely a T érintkezési pontban támad. Vizsgáljuk a testre ható forgatónyomatékokat a T központra nézve! A K erő forgatónyomatéka zérus, hiszen K a T -ben támad. A téglát kicsiny ϕ szöggel jobbra kitérítve, a forgatónyomatékok eredője a téglát igyekszik visszabilenteni, tehát a nehézségi erő hatásvonala T -től balra helyezkedik el. Ez pontosan azt jelenti hogy a $\vec{T}\vec{S} = \vec{T}\vec{B} + \vec{B}\vec{S}$ vektor vízszintes komponense balra mutat, azaz

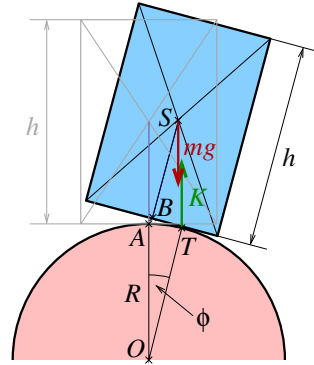
$$-\underbrace{|TB|}_{R\phi} \underbrace{\cos \phi}_{\approx 1} + |BS| \underbrace{\sin \phi}_{\approx \phi} \approx \left(-R + \frac{h}{2}\right)\phi < 0.$$

Felhasználtuk, hogy kis szög koszinusza közel 1, és kis szög szinusza közelíthető a szöggel (radiánban), valamint, hogy a téglatest tiszta gördülése miatt $|BT| = R\phi$ (hiszen mindkettő megegyezik az AT ívhosszal). Tehát az egyensúly akkor stabil, ha $h < 2R$, azaz a téglatest magassága kisebb a félgömb átmérőjénél. ■

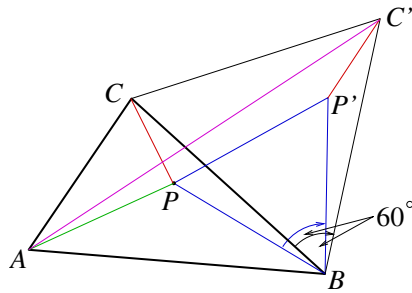
Megoldás (energiával): A téglatest helyzete akkor *stabil*, ha kis ϕ szöggel kitérítve helyzeti energiája nő, azaz S tömegközéppontja magasabbra kerül. Legyen a helyzeti energia zérus szintje az O pontban. Az S pont magassága megegyezik az $\vec{O}\vec{S} = \vec{O}\vec{T} + \vec{T}\vec{B} + \vec{B}\vec{S}$ vektor függőleges koordinátájával, tehát a téglatest helyzeti energiája:

$$\begin{aligned} E(\phi) &= mg \left(R \underbrace{\cos \phi}_{1 - \frac{\phi^2}{2}} + R\phi \underbrace{\sin \phi}_{\phi} + \frac{h}{2} \underbrace{\cos \phi}_{1 - \frac{\phi^2}{2}} \right) \approx \\ &\approx mg \left(R + \frac{h}{2} \right) + mg \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{4} \right) \phi^2. \end{aligned}$$

Mivel a kifejezés egyik tagja $\phi \sin \phi \approx \phi^2$, ezért a kifejezésben szereplő koszinusz függvényeket is másodrendben kellett közelítenünk a $\cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$ formulával.



5. ábra. A félgömbre helyezett téglát kicsit kibillentett helyzetben.



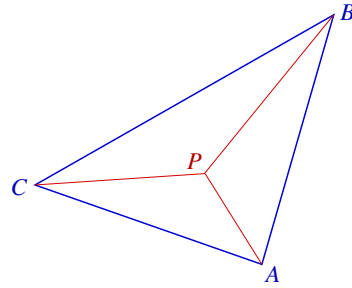
7. ábra. A $PBC\triangle$ -nek a B körüli elforgatottja a $P'BC'\triangle$.

Az $E(\phi)$ függvénynek akkor van lokális minimuma az origóban, ha ϕ^2 együttthatója pozitív, azaz $h < 2R$; ez a stabilitás feltétele. ■

1.6. Izogonális pont

Pierre de Fermat-tól származik a következő feladat, amelyet feladványul adott *Evangelista Torricelli*-nek.

Feladat: Adott az ABC háromszög (6. ábra). A sík mely P pontjára minimális a háromszög csúcsaitól mért távolságok $|PA| + |PB| + |PC|$ összege?



A megoldást jelentő P pontot a háromszög *izogonális pontjának* nevezzük.

A feladatnak több szép megoldása is van. Először ismerjünk meg egy elemi geometriai megoldást!

6. ábra. Az ABC háromszög és izogonális pontja P .

Megoldás (geometriai): Forgassuk el a PBC háromszöget a B csúcs körül 60° -kal, a 7. ábrán látható módon. Az így kapott háromszög új csúcsai legyenek P' és C' .

A forgatás miatt az ábrán azonos színnel jelölt szakaszok hosszai megegyeznek, azaz $|PB| = |P'B| = |PP'|$ és $|PC| = |P'C'|$, tehát

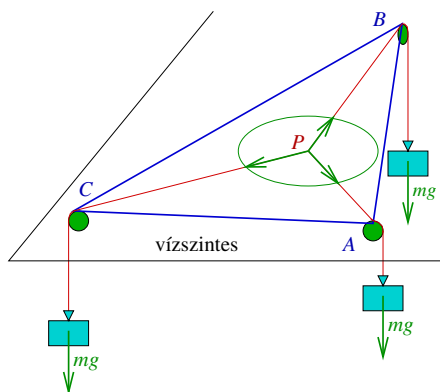
$$|PA| + |PB| + |PC| = |AP| + |PP'| + |P'C'| \geq |AC'|.$$

Az $APP'C'$ törtvonal hossza pontosan akkor minimális, ha a négy pont egy egyenesen helyezkedik el. Ekkor azonban $\angle APB = \angle BP'C' = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$. Tehát a P izogonális pont azon pontja a háromszögnek, amelyből mindhárom oldal 120° szög alatt látszik.

Megjegyezzük, hogy ha a háromszögnek egyik szöge 120° -nál nagyobb, akkor P ebbe a csúcsba esik. ■

Most egy másik, igen szellemes megoldást is adunk a feladatra, amely fizikából kölcsönzött gondolatmenetet tartalmaz. Végezzük el a következő (gondolat)kísérletet!

Kísérlet: A vizsgált háromszöget ve-
gyük föl vízszintesen, és a három csú-
csába helyezzünk egy-egy csigát! Há-
rom kötélt egyik végét kössük össze!
Mindhárom kötélszárat vessük át a
három csiga egyikén, és a kötelek sza-
bad végére erősítsünk azonos, m tö-
megű testeket, a 8. ábrán látható mó-
don. A rendszert hagyjuk magára, és
figyeljük meg, hogy hol helyezkedik
el a háromszögben a kötelek közös P
végpontja.



Megoldás (fizikai): Egyrészt, a kö-
telek közös P végpontja ott van egyen-
súlyban, ahol a három kötélereő ki-
egyenlíti egymást. Mivel mindhárom
kötélereő nagysága azonos mg , ezért egyensúlyban a kötél-
szárok azonos, 120° -
os szöveget zárnak be egymással.

8. ábra. A három csigán átvett kö-
telek súlyokkal.

Másrészt, egyensúly esetén a súlyok együttes helyzeti energiája minimá-
lis. Ez éppen azt jelenti, hogy az $|PA| + |PB| + |PC|$ összeg minimális, tehát
 P az izogonális pont. (Valóban, amennyivel növekszik például az AP szakasz
hossza, annnyival kerül följebb ennek a kötélnek a végén levő súly.) ■

Az izogonális pontról további érdekességeket olvashatunk a [4] cikkben.
A háromszög más nevezetes pontjaival kapcsolatos fizikai megfontolások ta-
lálhatók a [7] cikkekben és az ehhez fűzött megjegyzésben [9].

2. „Okos” szappanhártyák

Ebben a fejezetben *felületi feszültséggel* kapcsolatos jelenségeket vizsgálunk.
A minimális nagyságú felület kialakítására törekvő szappanhártyák sokszor
matematikailag igen bonyolult szélsőértékproblémát szinte azonnal megoldan-
nak, ezért valóban illik rájuk az „okos” jelző.

2.1. A felületi feszültség

Egy folyadék felületén levő részecskék általában energetikailag kedvezőtle-
nebb helyzetben vannak, mint a belső részecskék. Ezért a folyadékok igyekez-
nek *minimalizálni* felszínüket. A folyadékok, szappanhártyák felszíne (adott

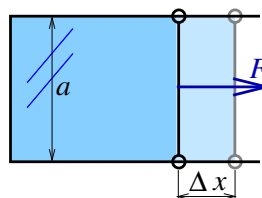
kényszerek mellett) „magától” olyan alakú lesz, hogy a felület nagysága, és így a felületi energia minimális legyen.

De mi is pontosan a *felületi feszültség*? Ez egy anyagpárt jellemző állandó. Tipikusan (a mi kísérleteinkben mindig) az egyik közeg a levegő, a másik a vizsgált folyadék (szappanoldat). A γ felületi feszültségre kétféle ekvivalens definíciót adhatunk; egyrészt, megadja a két közeg közti egységnyi területű határfelület energiáját, másrészt, megadja, hogy a közeget határ a pereme mentén egységnyi hosszban mekkora erővel igyekezik összehúzódnia, tehát

$$\gamma = \frac{E}{A}, \quad \text{illetve} \quad \gamma = \frac{F}{L},$$

ahol E az A területű közeget határ kialakításához szükséges energia, F pedig a közeget határ által a közeget határ peremén L hosszúságú szakaszra kifejtett húzóerő.

A két definíció azonossága könnyen látható egyszerű geometria esetén. Egy U-alakú keretet zárjunk le könnyen csúszó rúddal, és az így kapott téglalpra feszítsünk szappanhártyát (9. ábra). Az a hosszúságú mozgó rúd Δx -el való elmozdításakor $W = F\Delta x$ munkát végzünk, és a szappanhártya teljes (első és hátsó) felületét $A = 2a\Delta x$ -el növeljük. Tehát egységnyi felület energiája



9. ábra. A mozgó oldalú keretre feszített szappanhártya.

$$\gamma = \frac{W}{A} = \frac{F\Delta x}{2a\Delta x} = \frac{F}{2a},$$

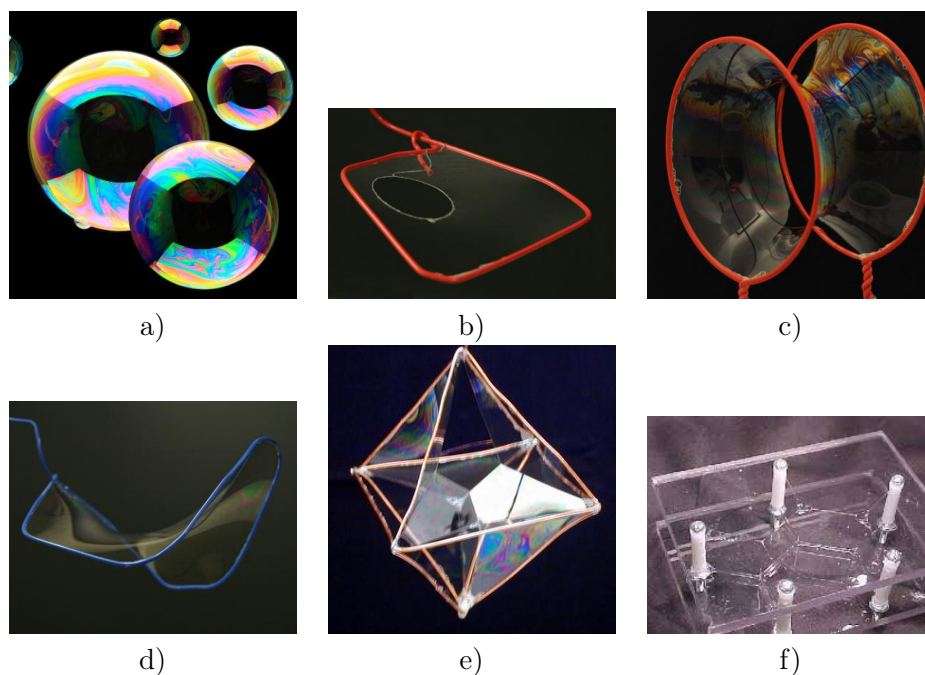
ami valóban megegyezik az egységnyi hosszra eső erővel. (A szappanhártyának két felszíne van, ezért $2a$ hosszban hat az F erő.)

Először néhány kísérletben vizsgáljuk meg a szappanhártyák furcsa viselkedését.

2.2. Kísérletek

Kísérlet: Fújjunk szappanbuborékot! Figyeljük meg, hogy a buborék gömb alakot vesz fel, mert ennek a testnek a legkisebb a felszíne adott térfogat mellett (10.a ábra). Hasonló okokból súlytalanság állapotában a víz gömb alakot vesz fel [8].

Kísérlet: Merev keretbe tegyünk laza cérnaszálat, és figyeljük meg, hogy ha csak a cérnaszál egyik oldalán van hártya, akkor a cérnaszál szabályos körívvé (vagy akár teljes körré) feszül ki (10.b ábra). Adott kerület mellett a kör területe maximális, és így válik minimálissá a szappanhártya felszíne.

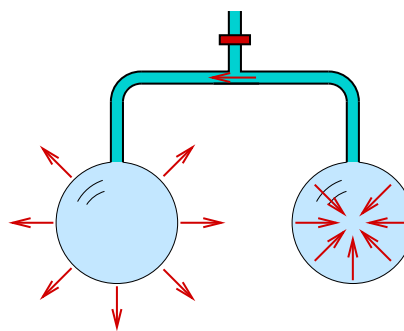


10. ábra. Szappanbuborékok, szappanhártyák.

Kísérlet: Figyeljük meg különböző nem sík alakú keretekre illeszkedő szappanhártyák felszínét (10.c,d ábra)! A hárták minden pontban „nyereg” alakúak, két fő görbületi sugaruk ellentétes előjelű.

Kísérlet: Figyeljük meg, hogy ha több hártya él mentén találkozik, akkor minden esetben három hártya alkotja az élet, és az élnél a lapszögek 120° -osak (10.e,f ábra). A jelenség hasonló az 1.6 fejezetben tárgyalt izogonális ponthoz; egyenlő erők csak így tarthatnak egyensúlyt egymással.

Kísérlet: Elágazó cső segítségével fújjunk egyszerre két szappanbuborékot, majd a befúvó nyílást fogjuk be (11. ábra). Ekkor a két buborék között szabadon áramolhat a levegő, és a rendszerben levő összes levegő mennyisége állandó. Figyeljük meg, hogy az egyik buborék mérete (kezdetben lassan, majd egyre gyorsabban) nő, a másiké csökken, míg végül az összes levegő átáramlik az egyik buborékba, és a másik eltűnik.



11. ábra. Az egyik buborék felfújja a másikat.

A jelenség most is azzal magyarázható, hogy adott ösztérfogat mellett az összfelület *egyetlen* gömb esetén minimális.

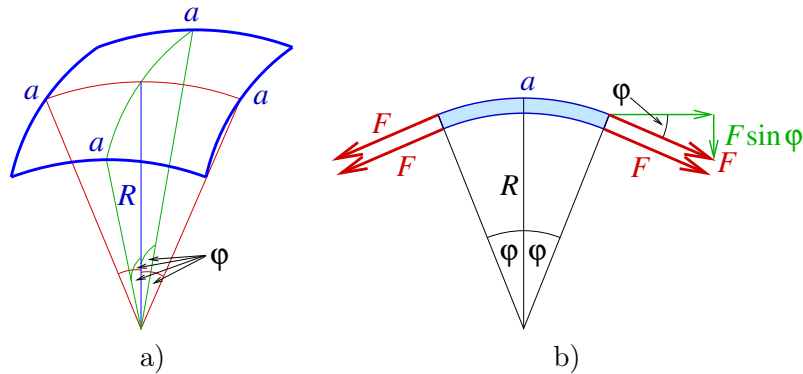
Felmerül a kérdés, hogy az utolsó kísérletben mi mozgatja a levegőt az optimális végállapot felé. Honnan „tudja” az egyik buborék, hogy éppen mekkora a másik felülete? Hogyan „kommunikál” egymással a cső két végén levő két buborék? Erre a következő fejezetben adunk választ.

Szappanhártyákkal végzett kísérletekről sok érdekes film található az interneten, egy ilyen például a [10].

2.3. A görbületi nyomás

Az előző fejezet végén feltett kérdésekre a rövid válasz: *görbületi nyomás*. Egy szappanbuborékon belül a nyomás kicsivel nagyobb, mint a külső nyomás, hiszen a szappanhártya igyekszik összehúzódni. Ez a nyomáskülönbség a *görbületi nyomás*, ami csak a felületi feszültségtől és a buborék sugarától függ. Kisebb sugár, nagyobb görbület esetén nagyobb a görbületi nyomás.

Feladat: Határozzuk meg egy gömb alakú, R sugarú, γ felületi feszültségű szappanbuborékban a p_g görbületi nyomást!



12. ábra. A gömbi négyzet távlati nézetben (a) és oldalnézetben (b).

Megoldás (erőkkel): Válasszuk ki a gömbfelszín egy kis $a = 2R\varphi$ oldalú négyzet alakú területét, a 12.a ábrán látható módon! A szappanhártya mindkét felületén a négyzet mind a négy oldala mentén $F = \gamma a$ erő hat a kiválasztott felületre (12.b ábra). Az erők sugár irányú komponensei összeadódnak, ebből származik a görbületi nyomás, ami

$$p_g = \frac{8F \sin \varphi}{a^2} = \frac{16\gamma R\varphi \sin \varphi}{4R^2\varphi^2} = \frac{4\gamma}{R}.$$

(Felhasználtuk, hogy kis φ szögek esetén $\sin \varphi \approx \varphi$.) ■

Megoldás (energiával): Gondolatban fújjunk be egy kis ΔV térfogatú levegőt a buborékba. Ehhez $W = p_g \Delta V$ munkát kell végeznünk. Ekkor azonban a buborék sugara és így felszíne, illetve felületi energiája is megnő, éppen annyival, amennyi munkát végeztünk. Mind a ΔV térfogat-növekedés, mind a ΔA felszín-növekedés kifejezhető a sugár ΔR megváltozásával:

$$\Delta V = \frac{4\pi}{3} ((R + \Delta R)^3 - R^3) \approx 4\pi R^2 \Delta R,$$

$$\Delta A = 2 \cdot 4\pi ((R + \Delta R)^2 - R^2) \approx 16\pi R \Delta R.$$

(A felszínnél a kettes szorzóval a buborék külső és belső felszínét vesszük figyelembe.) Ezeket a kifejezéseket beírva a $p_g \Delta V = \gamma \Delta A$ egyenlőségbe, most is egyszerűen adódik, hogy $p_g = \frac{4\gamma}{R}$. ■

Hangsúlyozzuk, hogy a most kiszámolt görbületi nyomás a buborékban levő belső és külső nyomás *különbsége*, és általában jóval kisebb e két nyomásnál. Azonban ha a görbületi sugár nagyon kicsi, akkor p_g nagyon nagy is lehet; ennek kapilláris-jelenségeknél van jelentősége.

Megjegyezzük, hogy általános (nem gömb) alakú görbült felületnek a görbületi nyomása:

$$p_g = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

ahol R_1 és R_2 a felület két úgynevezett *fő görbületi sugara*. Ezek szemléletesen a felület különböző merőleges síkmetszeteihez simuló körök sugarának maximuma illetve minimuma. Gömb esetén $R_1 = R_2 = R$, és szappanbuborék esetén a külső és belső felszínt is figyelembe kell venni, innen adódik a 4-es szorzó a szappanbuborékre kiszámolt képletben. Keretre feszített felületek esetén $p_g = 0$, tehát $R_1 = -R_2$, innen adódik a nyereg-forma.

Hivatkozások

- [1] Simonovits András: Hogyan született az analízis? *KöMaL*, 2006. április., 194–204. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201049>.
- [2] Simonovits András: A végtelen sorok felfedezése I. *KöMaL*, 2007. október., 392–399. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200974>.
- [3] Simonovits András: A végtelen sorok felfedezése II. *KöMaL*, 2007. november., 450–456. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200961>.
- [4] Szmerka Gergely: Ízelítő a Fermat–Torricelli problémakörből. *KöMaL*, 2004. április., 194–201. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201045>.

- [5] Kiss György: Amit jó tudni a kúpszeletekről I. *KöMaL*, 2004. november., 450–459. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200523>.
- [6] Kiss György: Amit jó tudni a kúpszeletekről II. *KöMaL*, 2004. december., 514–518. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200574>.
- [7] B.J. Kogan: A mechanika alkalmazása a geometriában (részlet). *KöMaL*, 1988. január., 33–38. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198871>.
- [8] Nasa water balloons in zero g. Youtube video.
URL <https://www.youtube.com/watch?v=gTqLQ03L4Ko>.
- [9] Gnädig Péter: Erők egyensúlya – energia minimuma (megjegyzések B.J. Kogan cikkéhez). *KöMaL*, 1988. január., 38–39. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198872>.
- [10] Soap films and minimal surfaces. Youtube video.
URL <https://www.youtube.com/watch?v=YdneSMK0bls>.
- [11] Kovács Veronika – Petz Dénes: Számítási közép, mértani közép meg ilyenek. *KöMaL*, 2006. március., 130–136. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200923>.
- [12] Besenyei Ádám: A számítási-mértani közép és egyéb érdekességek I. *KöMaL*, 2009. február., 72–80. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201205>.
- [13] Besenyei Ádám: A számítási-mértani közép és egyéb érdekességek II. *KöMaL*, 2009. március., 130–139. p. URL <http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201211>.