Kinematika

2016. február 12.

Kinematika feladatokat oldunk meg, „szamárháromszög” helyett függvényvizsgálattal.

A szamárháromszöggel az a baj, hogy a feladat megértése helyett valami „szabály” formális használatára épül. Ha például valaki s, t és v között egy formális kapcsolatot magol be, akkor a következő feladattal nehézségei lehetnek:

Mekkora v utat tesz meg s idő alatt egy t sebességgel mozgó test?

A kinematikában csak leírjuk a mozgást (az okaival egyelőre nem foglalkozunk). Lényegében csak arra a kérdésre keressük a választ, hogy mikor hol van a test.

Egy kicsiny test (pontszerű test, tömegpont) helyzetét általános esetben egy kiválasztott kezdőponthoz (origó) viszonyítva egy vektorral (helyvektor) adhatunk meg. A vektort pedig alkalmasan választott koordináta-rendszerben koordinátáival írhatjuk le. Ha a mozgás egy dimenzióban (egy egyenes mentén) történik, akkor a helyzetét egy előjeles távolság, az origóhoz viszonyított *elmozdulás* adja meg.

Az időt általában szintén egy kiválasztott kezdőpillanathoz viszonyítva adjuk meg. Az egyenesvonalú mozgást végző test mozgását az $x(t)$ elmozdulás–idő függvény egyértelműen leírja.

1. Egyenesvonalú egyenletes mozgások, találkozások

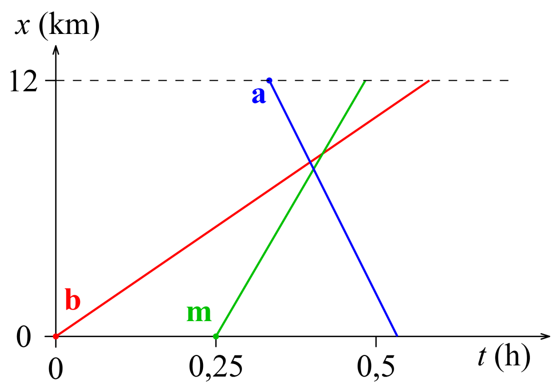
A feladatok megoldása előtt fontos rögzítenünk a koordináta-rendszerünket: megadni az origót, a pozitív irányt, és a kezdő pillanatot.

Ezután már megvizsgálhatjuk a *kezdeti feltételeket*, azaz megállapíthatjuk, hogy a $t = 0$ pillanatban (vagy a mozgás kezdetekor) hol van a vizsgált test. A test kezdeti $x(0)$ helyét az egyszerűség kedvéért gyakran x_0-lal fogjuk jelölni.

Nézzünk egy egyszerű feladatot: A és B város egymástól 12 km távolságra van az országúton. A-ból reggel 8:00-kor indul egy biciklis B-be, sebessége 20 km/h. Egy motoros 8:15-kor indul utána 50 km/h sebességgel. Egy autó pedig 8:20-kor B-ből indul A felé 60 km/h sebességgel.

Kivel találkozik előbb az autós? Mikor és hol lesznek a találkozások?

Az események áttekintését segíti, ha a testek mozgását egy elmozdulás–idő grafikonon ábrázoljuk. Legyen az origó A-ban, mutasson B felé a pozitív irány, és válasszuk $t = 0$ pillanatnak a reggel 8 órát!



Az egyes járművek kezdeti helyzetét a szöveg alapján könnyen berajzolhatjuk a grafikonba. A mozgásokat pedig egyenesek (lineáris függvények) fogják ábrázolni, hiszen a járművek állandó sebességgel mozognak. Az egyenesek meredekségét a sebesség határozza meg: a sebességek alapján könnyen kiszámolhatjuk, hogy fél óra vagy negyed óra alatt mennyit tesz meg a jármű, és ennek alapján berajzolhatjuk az egyeneseket.

Találkozás az, amikor két test *ugyanakkor ugyanott* van, azaz ahol a grafikonok metszik egymást. Látható, hogy a három találkozás majdnem egybeesik. Nagyon pontosan kell rajzolni ahhoz, hogy eldöntsük, melyik történik előbb. A pontosabb számoláshoz írjuk fel az egyes járművek elmozdulás–idő függvényét! A függvényekben a mértékegységeket az áttekinthetőség kedvéért nem írjuk ki: a távolságokat km-ben, az időt órában, a sebességeket km/h egységekben mérjük.

biciklis:

$$x_1(t) = v_1 t = 20t$$

motoros:

$$x_2(t) = v_2(t - t_2) = 50(t - 0{,}25) = 50t - 12{,}5$$

autós:

$$x_3(t) = d - v_3(t - t_3) = 12 - 60(t - 0{,}333) = -60t + 32$$

A találkozások időpontját úgy kapjuk meg, ha két időfüggvényt egymással egyenlővé teszünk. A találkozás helye pedig adódik, ha ezt az időt behelyettesítjük valamelyik függvénybe.

biciklis és motoros:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) \\ 20t_{12} &= 50t_{12} - 12{,}5 \\ t_{12} &= 0{,}417\,\mathrm{h} = 25' \\ x_{12} &= x_1(t_{12}) = 20t_{12} = 8{,}33\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

biciklis és autós:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_3(t) \\ 20t_{13} &= -60t_{13} + 32 \\ t_{13} &= 0{,}4\,\mathrm{h} = 24' \\ x_{13} &= x_1(t_{13}) = 20t_{13} = 8\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

motoros és autós:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_3(t) \\ 50t_{23} - 12{,}5 &= -60t_{23} + 32 \\ t_{23} &= 0{,}404\,\mathrm{h} = 24{,}3' \\ x_{23} &= x_2(t_{23}) = 50t_{23} - 12{,}5 = 7{,}7\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

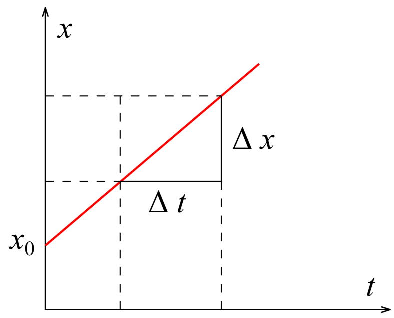
Ezek szerint az autós és a kerékpáros találkozik először.

2. Egyenletes mozgás: következtetések a grafikonokból

Egy egyenletes mozgás időfüggvénye általános alakban:

$$x(t) = x_0 + vt\,,$$

ahol x_0 a test elmozdulása a $t = 0$ időpillanatban. Ez egy lineáris függvény



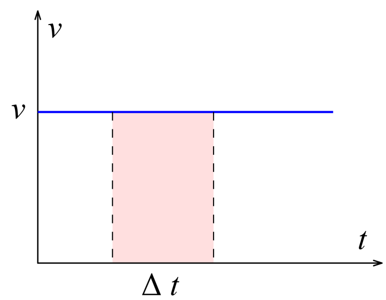
A függvény grafikonáról leolvasható az egyenes meredeksége, amely épp a test sebessége:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v\,.$$

Ha az egyenes vízszintes, a meredekség 0, a test áll. Ha az egyenes emelkedik, a test a pozitív irányba mozog, $v > 0$, ha az egyenes lejt, $v < 0$, a test a kiválasztott pozitív iránnyal ellentétes irányba mozog. Minél meredekebb az egyenes, annál nagyobb a sebesség abszolút értéke, annál gyorsabb a test.

Ez a kapcsolat általában is igaz: tetszőleges mozgás esetében az elmozdulás–idő függvény meredeksége megadja a test (időben általában nem állandó, pillanatnyi) sebességét.

Ábrázoljuk a sebességet is az idő függvényében! Ez az egyenletes mozgás esetében egy konstansfüggvény.



A grafikonon beszínezett terület nagysága éppen a test Δt idő alatti elmozdulását adja meg:

$$v\Delta t = \Delta x\,.$$

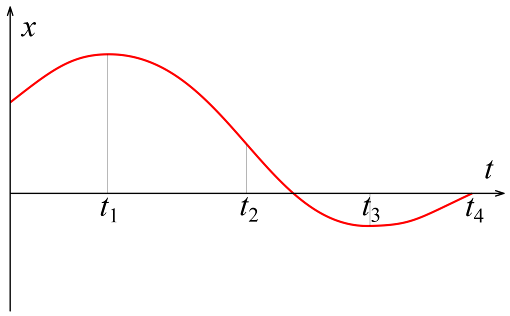
A test elmozdulásának teljes megváltozását a teljes „görbe” alatti terület adja meg. A test tényleges elmozdulásának meghatározásához azonban tudni kell a test x_0 elmozdulását a mozgás elején (*kezdeti feltétel*).

Ha a sebesség negatív, akkor a terület az egyenes felett van, ilyenkor az elmozdulás megváltozása negatív.

Ez a kapcsolat általában is igaz: tetszőleges mozgás esetében a sebesség–idő függvény görbe alatti (előjeles) területe megadja a test elmozdulásának megváltozását.

3. Általános mozgás elemzése

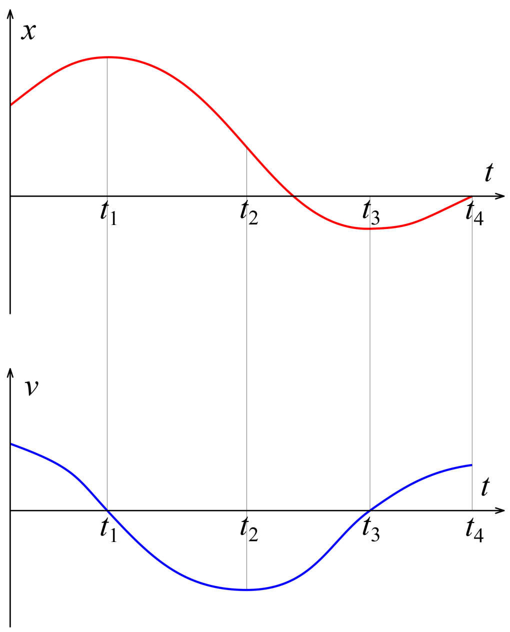
Az ábrán egy általános mozgás elmozdulás–idő függvénye látható. Ez alapján szeretnénk felvázolni a test sebesség–idő grafikonját.



Amikor az elmozdulás növekszik, a test sebessége pozitív. Ilyen a $(0, t_1)$ és a (t_3, t_4) időintervallum. Amikor a függvény csökken, esetünkben a (t_1, t_3) időintervallum, a test sebessége negatív.

Ebből következik, hogy amikor az elmozdulás–idő függvény növekedésből csökkenésbe vált, azaz amikor a függvénynek (lokális) maximuma van, vagy amikor csökkenésből növekedésbe vált, azaz amikor a függvénynek (lokális) minimuma van, akkor a sebesség–idő függvény előjelet vált. Mivel a test sebessége folytonosan változik, *az elmozdulásfüggvény szélsőértékénél a sebesség nulla.*

A sebesség–idő grafikonnak tehát megvannak már a zérushelyei (t_1 és t_3).

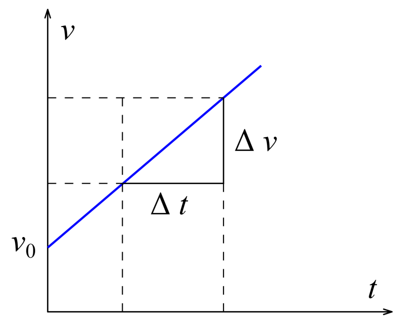


A sebesség nagyságát az elmozdulás–idő grafikon meredeksége adja meg. Kezdetben a meredekség folyamatosan csökken, így a sebesség egy kezdeti pozitív értékről folyamatosan csökken. Az elmozdulás–idő grafikon a maximuma után (ahol a sebesség nulla) egyre meredekebben lejt, így a sebesség egyre nagyobb abszolút értékű negatív érték lesz. A sebesség–idő függvény minimuma ott lesz, ahol az elmozdulás–idő grafikon legmeredekebben lejt (t_2 pillanat). A sebesség ezután is negatív (hiszen az elmozdulás csökken), de egyre kisebb abszolút értékű (hiszen az elmozdulás–idő grafikon egyre laposabb). Az elmozdulás–idő grafikon minimumhelyénél a sebesség nulla, majd egyre nagyobb pozitív érték lesz, hiszen az elmozdulás–idő grafikon egyre meredekebben emelkedik.

Ezek alapján már felvázolhattuk a sebesség–idő grafikont.

4. Egyenletesen gyorsuló mozgás

Ha a test sebessége időben lineárisan változik, akkor egyenletesen gyorsuló (lassuló) mozgásról beszélünk. Az ábrán egy ilyen mozgás sebesség–idő grafikonja látható.



A grafikon meredeksége megadja a sebesség változási sebességét, azaz a test *gyorsulás*át. A sebességfüggvény általános alakja:

$$v(t) = v_0 + at\,,$$

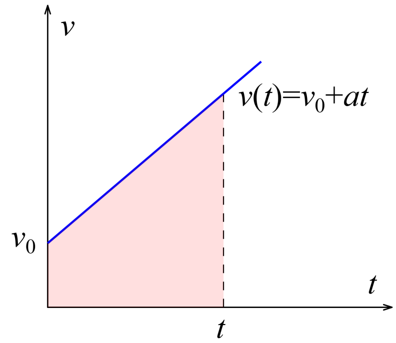
ahol v_0 a test sebessége a $t = 0$ pillanatban.

Ha $a = 0$, a sebesség állandó, ha $a > 0$, a test sebessége nő, ha $a < 0$, csökken. Minél meredekebb a görbe, annál nagyobb a gyorsulás abszolút értéke.

Ez a kapcsolat általában is igaz: egy általános mozgásnál a sebesség–idő grafikon meredeksége megadja az általában időben változó (pillanatnyi) gyorsulást.

Figyeljünk arra, hogy a gyorsulásnál csak a m/s^2 mértékegység használatos, és így ilyenkor a sebességet m/s-ban, az időt s-ban kell mérnünk.

Vizsgáljuk meg most is a sebesség–idő grafikon alatti területet!



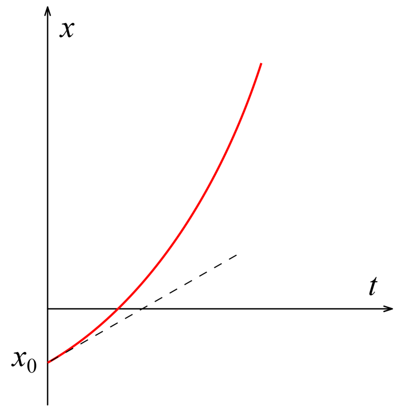
A test elmozdulásának megváltozása a görbe alatti terület. A trapéz területképlete alapján

$$\Delta x = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} t = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \,,$$

amiből a test elmozdulása a kezdeti x_0 elmozdulás ismeretében:

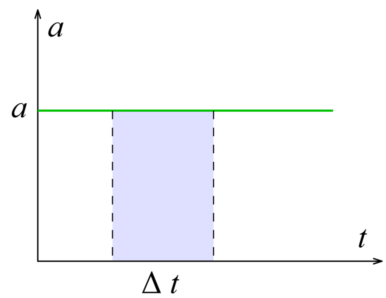
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \,.$$

Az egyenletesen gyorsuló mozgás elmozdulás–idő függvénye egy másodfokú függvény, grafikonja egy parabolaív.



A grafikon az x_0 pontból indul. Kezdeti meredeksége olyan, mintha egy v_0 (pozitív) sebességű egyenletes mozgás grafikonját rajzolnánk (szaggatott vonal). A sebesség ezután folyamatosan nő (ha a pozitív), így a görbe egyre meredekebb lesz.

A gyorsulás–idő grafikon egyenletesen gyorsuló mozgásnál egy konstansfüggvény.



A görbe alatt beszínezett terület megadja a test sebességének megváltozását Δt idő alatt:

$$a\Delta t = \Delta v \,.$$

A test sebességének teljes megváltozását a teljes görbe alatti terület adja meg. A test sebességének meghatározásához azonban tudni kell a test v_0 kezdősebességét.

Ha a gyorsulás negatív, akkor a terület az egyenes felett van, ilyenkor a sebesség csökken.

Ez a kapcsolat általában is igaz: tetszőleges mozgás esetében a gyorsulás–idő függvény görbe alatti (előjeles) területe megadja a test sebességének megváltozását.

5. Ferde hajítás

A szabadesés, függőleges hajítás, vízszintes hajítás és a ferde hajítás olyan mozgások, ahol a testre csak a nehézségi erő hat. (A valóságban az elejtett, eldobott testekre hat a közegellenállás is, de például a súlylökésnél a golyó mérete, sűrűsége és sebessége miatt a légellenállás jó közelítéssel elhanyagolható.) A nehézségi erő hatására a testnek függőlegesen lefelé mutató, g nagyságú gyorsulása lesz. A következőkben a ferde hajítást vizsgáljuk, hiszen a többi mozgás ennek speciális esete (a kezdeti feltételek speciális megválasztásával).

A ferde hajítás az eddig tárgyalt mozgásokkal ellentétben nem egyenesvonalú mozgás, a test egy síkban mozog. A közegellenállás hiánya miatt azonban a test vízszintes és függőleges mozgása egymástól függetlenül tanulmányozható: a test vízszintes irányban egyenletesen (állandó sebességgel) mozog, függőlegesen pedig egyenletes (állandó) gyorsulással.

A mozgás leírásához válasszunk olyan koordináta-rendszert, ahol az x-tengely vízszintes, az y-tengely pedig függőlegesen felfelé mutat (és a mozgás az x-y síkban történik). A testnek így nincsen x-irányú gyorsulása, az y-irányú gyorsulása pedig $a_y = -g$.

Az origót vegyük fel a vízszintes talaj azon pontjában, amely fölött a testet eldobjuk. A test koordinátái eszerint a $t = 0$ pillanatban:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= h\,. \end{aligned}$$

A testet ebből a pontból v_0 sebességgel, a vízszinteshez képest α szögben (pozitív α esetén ferdén felfelé) dobjuk el. A test kezdősebesség-koordinátái így:

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} &= v_0 \sin\alpha\,. \end{aligned}$$

x_0, y_0, v_{x0} és v_{y0} együtt határozzák meg a kezdeti feltételeket.

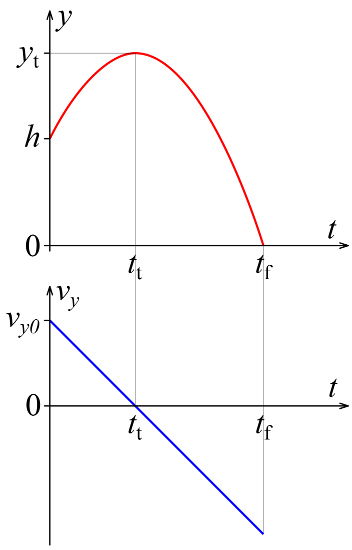
Ezek segítségével felírhatjuk a mozgást leíró időfüggvényeket:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{x0}t = v_0 \cos\alpha t \\ v_x(t) &= v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ a_x(t) &= 0 \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y}{2}t^2 = h + v_0 \sin\alpha t - \frac{g}{2}t^2 \\ v_y(t) &= v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\alpha - gt \\ a_y(t) &= -g\,. \end{aligned}$$

Ezek után egy sor kérdésre már könnyen válaszolhatunk!

1. Milyen magasra jut a test a mozgása során?

Ehhez először azt válaszoljuk meg, hogy *mikor* ér a test a pálya tetőpontjára! Addig, amíg a test emelkedik, y-irányú sebességkomponense pozitív, a test esése közben viszont negatív lesz. A test akkor éri el a pálya tetőpontját, amikor a függőleges irányú sebessége nulla lesz. Ezt a kapcsolatot láthatjuk a következő két grafikonon.



Ez alapján már könnyen meghatározhatunk minden kérdéses mennyiséget. Azt a t_t időpontot, amikor a test eléri a tetőpontját az $v_y(t) = 0$ egyenlet gyöke adja meg:

$$v_0 \sin\alpha - g t_\mathrm{t} = 0$$
$$t_\mathrm{t} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \, .$$

Milyen magasan lesz ekkor a test? Ehhez a megkapott t_t időpontot be kell helyettesíteni az $y(t)$ függvénybe:

$$y_\mathrm{t} = y(t_\mathrm{t}) = h + v_0 \sin\alpha t_\mathrm{t} - \frac{g}{2} t_\mathrm{t}^2 = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \, .$$

Mekkora lesz itt a test sebessége? A test függőleges sebessége nulla, de vízszintesen állandó sebességgel mozog:

$$v = v_x = v_0 \cos\alpha \, .$$

2. Milyen pályán mozog a test?

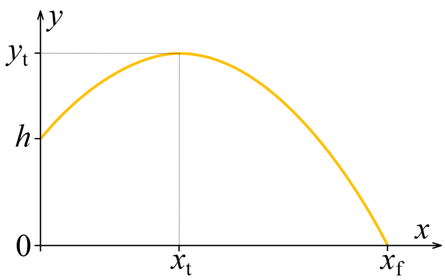
A test pályáját megadó $y(x)$ függvényt az $x(t)$ és $y(t)$ függvényekből t kiküszöbölésével kapjuk meg. $x(t)$-ből t-t kifejezve:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \, ,$$

majd ezt $y(t)$-be behelyettesítve:

$$y(x) = h + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = h + \operatorname{tg}\alpha x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 \, .$$

Ez egy másodfokú függvény, a test parabolapályán mozog.



3. Hol ér földet a test?

Ehhez ismét először arra a kérdésre válaszolunk, hogy *mikor* ér földet. A földet érés t_f időpontját az $y(t) = 0$ egyenlet gyöke adja meg:

$$h + v_0 \sin\alpha t_\mathrm{f} - \frac{g}{2} t_\mathrm{f}^2 = 0\,.$$

Az egyenlet két gyöke közül a pozitív adja meg a keresett időpillanatot (a mozgás a $t = 0$ pillanatban kezdődik, a negatív értéknek nincs értelme):

$$t_\mathrm{f} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}\,.$$

Milyen messze ér földet? Helyettesítsük be a t_f értéket az $x(t)$ függvénybe:

$$x_\mathrm{f} = x(t_\mathrm{f}) = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} v_0 \cos\alpha\,.$$

Mekkora lesz a földet éréskor a sebessége? A vízszintes sebességkomponens végig állandó. A függőleges sebességkomponenst a $v_y(t)$ függvényből kaphatjuk meg t_f behelyettesítéssel:

$$v_y(t_\mathrm{f}) = v_0 \sin\alpha - \left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right) = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\,.$$

A földet érés sebességét a két sebességkomponensből a Pitagorasz-tétel alapján határozhatjuk meg:

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

4. Milyen szögben kell (adott magasságból, adott kezdősebességgel) eldobni a testet, hogy a lehető legmesszebb repüljön?

Az előbb meghatároztuk x_f kifejezését, tekintsük ezt most α függvényeként:

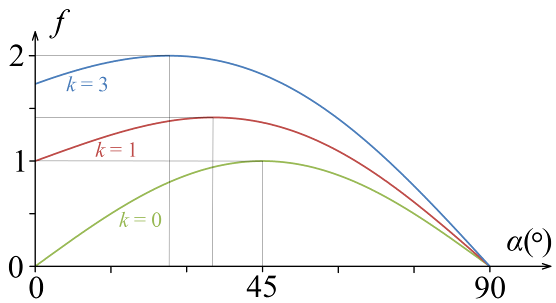
$$x_\mathrm{f}(\alpha) = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} v_0 \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\left[\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v_0^2}}\right)\cos\alpha\right]\,.$$

Azt az α szöget keressük, ahol ez a kifejezés (rögzített v_0 és h esetén) maximális.

A $\frac{v_0^2}{g}$ szorzó egy pozitív konstans. A távolság akkor lesz maximális, ahol a szögletes zárójelben lévő kifejezés maximális. Ez α-n kívül csak a $k = \frac{2gh}{v_0^2}$ konstanstól függ, ezt behelyettesítve a vizsgálandó függvény:

$$f(\alpha) = \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + k}\right)\cos\alpha$$

A függvény maximumhelyét – különböző k értékek esetén – grafikusan kereshetjük meg, a függvény ábrázolásával. Ezt például Excel táblázatkezelővel is megtehetjük (lásd a honlapra feltöltött fájlt). A grafikonon három különböző k érték esetében látható az $f(\alpha)$ függvény.



Ha a testet a földről indítjuk ($h = 0$ és így $k = 0$), akkor a maximális távolság $\alpha = 45°$-nál lesz, amit grafikon nélkül is megkaphatunk:

$$f(\alpha)|_{k=0} = \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 0}\right)\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha\,,$$

a $\sin 2\alpha$ függvénynek pedig $2\alpha = 90°$, azaz $\alpha = 45°$-nál van maximuma.

Ha k értéke nagyobb (magasabbról dobjuk el), akkor a maximum egyre kisebb szögeknél lesz.

6. Harmonikus rezgőmozgás

A természetben nagyon gyakori a harmonikus rezgőmozgás. Ennek elmozdulás–idő függvénye egy szinuszos (vagy koszinuszos) függvény:

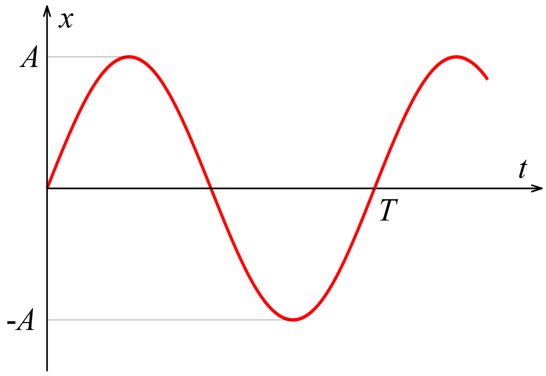
$$x(t) = A\sin\omega t\,.$$

Ebben A a rezgés *amplitúdója* (maximális kitérése), ω pedig a rezgés *körfrekvenciája*, amely a rezgés T periódusidejével és f frekvenciájával a következő kapcsolatban van:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,.$$

(Az ω jelölés onnan származik, hogy egy *omega* szögsebességű körmozgás vetülete egy *omega* körfrekvenciájú rezgés.)

Rajzoljuk fel az elmozdulás–idő függvényt, majd próbáljuk meg ennek elemzése alapján a sebesség–idő és gyorsulás–idő függvényt is felvázolni!



A függvénynek az első peridusban a $T/4$ pillanatban maximuma, a $3T/4$ pillanatban minimuma van. Ahogy korábban láttuk, ezekben a pillanatokban a sebesség nulla. Ezzel már megkaptuk a sebesség–idő függvény zérushelyeit.

Ahol az elmozdulás–idő függvény nő, a sebesség–idő függvény pozitív. Annál nagyobb, minél meredekebb $x(t)$. A függvény a $t = 0$ (és a $t = nT$, ahol n egész) pillanatban nő a legmeredekebben, így a sebességfüggvénynek ezekben a pillanatokban lesz maximuma. Hasonlóan, a $T/2$ pillanatban, ahol $x(t)$ a legmeredekebben csökken, $v(t)$-nek minimuma lesz.

Meg kell határozni a $v(t)$ függvény maximumának és a minimumának nagyságát is. Ezt az $x(t)$ függvény meredeksége adja meg. Ennek kiszámításához gondoljunk bele, hogy az $x = \sin t$ függvénynek a $t = 0$ helyen 1 a meredeksége (a szinuszfüggvény definíciója alapján belátható, vagy számológépen könnyen kipróbálható, hogy a nagyon kis szögek szinusza közel egyenlő a szög radiánban mért értékével). Ha a függvényt megszorozzuk A-val, akkor a függvény képe függőlegesen megnyúlik, és meredeksége is A-szorosára nő. Ha a függvény argumentumát szorozzuk ω-val, akkor a függvény képe vízszintesen összenyomódik, amitől a meredekség szintén megnő, ω-szorosára változik. Az $x(t) = A \sin \omega t$ függvény meredeksége a $t = 0$ (és a $t = T$) pillanatban tehát $A\omega$, a $t = T/2$ pillanatban pedig $-A\omega$. A *sebességamplitúdó* (a sebesség maximális értéke) tehát

$$v_{\max} = A\omega\,.$$

Ezek alapján már elég sok pontja megrajzolható a sebesség–idő függvénynek. A $v(t)$ görbe megrajzolásához még ki kéne számolni néhány másik pontban is $x(t)$ meredekségét, de most ehelyett bizonyítás nélkül elfogadjuk, hogy a kiszámított pontokat összekötő görbe egy koszinuszfüggvény lesz.

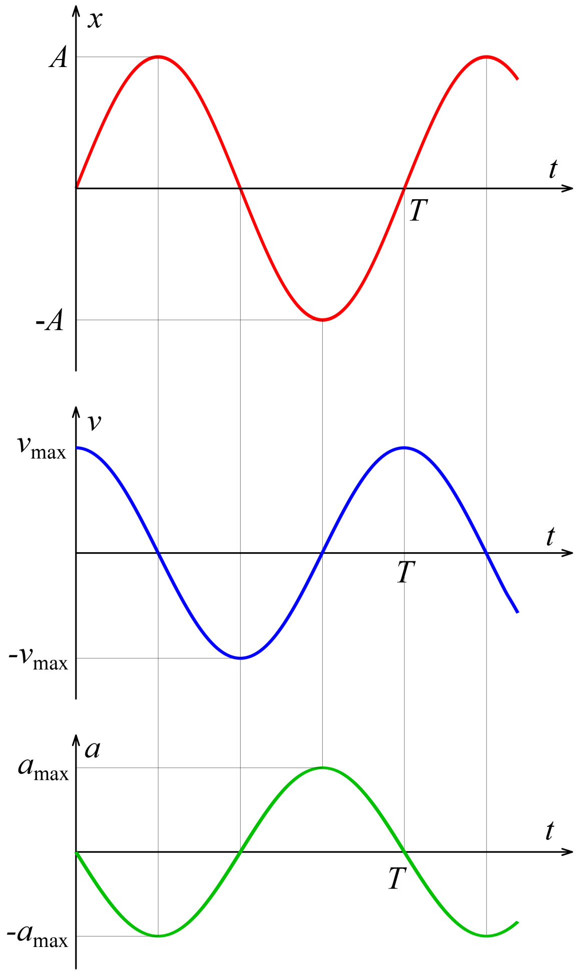
$$v(t) = A\omega \cos \omega t\,.$$

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg a gyorsulás–idő függvényt is a sebesség–idő függvényből. A gyorsulás maximális értékét (a gyorsulásamplitúdót) a sebesség–idő grafikon legnagyobb meredeksége adja meg, ami az előző gondolatmenettel

$$a_{\max} = A\omega^2\,.$$

A gyorsulás–idő függvény egy szinuszfüggvény mínusz egyszerese:

$$a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t\,.$$



Vegyük észre, hogy test gyorsulása minden pillanatban arányos a kitérésével, és az arányossági tényező negatív ($-\omega^2$). Dinamikai megfontolások alapján ebből az következik, hogy a harmonikus rezgőmozgáshoz a kitéréssel arányos visszatérítő erő szükséges.

7. Szabadesés légellenállással

A honlapra feltöltött másik Excel fájl egy példát mutat arra, hogy sokszor bonyolult feladatokra is könnyen lehet közelítő numerikus eredményt kapni.

Egy légellenállással eső test gyorsulásának nagysága

$$|a| = g - kv^2\,,$$

ahol g a nehézségi gyorsulás, v a test sebessége, k pedig a test alakjától, méretétől, tömegétől, valamint a levegő sűrűségétől függő állandó.

A testet h magasságban nyugalmi helyzetből elengedjük, így kezdetben $t = 0$, $v(0) = 0$, $x(0) = h$, ebből az állapotból indulunk.

A test gyorsulása $v(t)$ ismeretében minden pillanatban meghatározható:

$$a(t) = -g + kv^2(t)$$

A gyorsulás elegendően kicsi Δt idő alatt nagyon keveset változik, ezért a test sebessége és helyzete Δt idővel később jó közelítéssel:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$
$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{v(t)+v(t+\Delta t)}{2}\Delta t\,.$$

Ezek ismeretében már meghatározhatjuk $a(t+\Delta t)$ értékét, és így tovább.

Figyelnünk kell a leállási feltételre is, azaz hogy mikor lesz $x(t) \leq 0$.

Vankó Péter