MateFIZIKA: Pörgés, forgás, csavarodás (Vektorok és axiálvektorok a fizikában)

Tasnádi Tamás[1]

2015. április 17.

[1] BME, Mat. Int., Analízis Tsz.

Tartalom

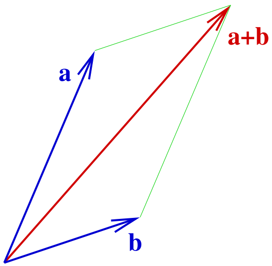
Tartalom

Vektorok – geometriai kép

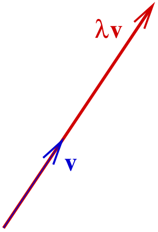
Vektor = irányított szakasz

Műveletek:

Összeadás:



Számmal való szorzás:



Vektorok – matematikus definíció

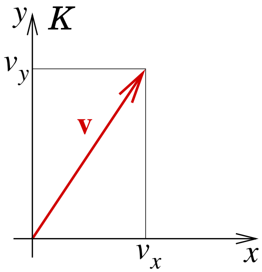
Vektor = vektortér eleme.
A vektortérben végezhető műveletek megadott axiómákat elégítenek ki:

	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	kommutativitás;
	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	asszociativitás;
	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	nullvektor
$\exists(-\mathbf{a}):$	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	ellentett vektor
	$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$	disztributivitás
	$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$	disztributivitás
	$(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$	
	$1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$	egység

Vektorok – fizikus definíció

A vektorokat egy $\mathcal{K}$ koordináta-rendszerben koordinátákkal adjuk meg.

$$[\mathbf{a}]^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{b}]^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}.$$



A műveletek:

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b}]^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}, \quad [\alpha\mathbf{a}]^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{bmatrix}.$$

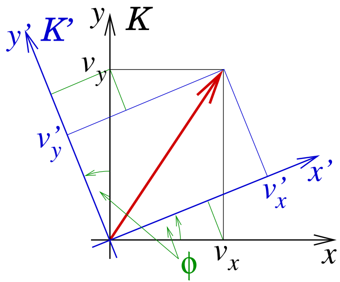
A koordináta-rendszer megváltoztatásakor a vektorok koordinátái meghatározott módon „transzformálódnak”.

Koordináta-rendszer forgatása

A $\mathcal{K}'$ koordináta-rendszer a $\mathcal{K}$ rendszerből z tengelyű, φ szögű forgatással áll elő.

A $\mathbf{v}$ vektor koordinátái:

$$[\mathbf{v}]^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]^{\mathcal{K}'} = \begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix}.$$



A koordináták transzformációja:

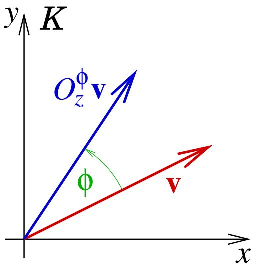
$$\begin{aligned} v'_x &= v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi, \\ v'_y &= -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi, \\ v'_z &= v_z. \end{aligned}$$

Vektor forgatása

A z tengely körüli, φ szögű forgatás: O_z^{φ}.

A koordináta-rendszer helyett a vektort forgatjuk ellenkező irányban:

$$[\mathbf{v}]^{\mathcal{K}'} = \left[O_z^{-\varphi}\mathbf{v}\right]^{\mathcal{K}}$$



Tetszőleges O forgatás esetén:

$$\boxed{[\mathbf{v}]^{O\mathcal{K}} = [O^{-1}\mathbf{v}]^{\mathcal{K}}},$$

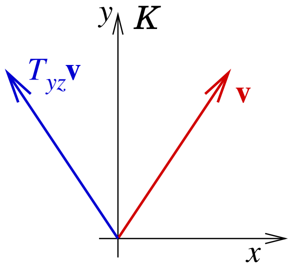
ahol $O\mathcal{K}$ a $\mathcal{K}$ elforgatottja, és O^{-1} a forgatás inverze.

Tetszőleges O forgatás felcserélhető a műveletekkel:

$$\begin{aligned}
O(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda(O\mathbf{a}) && \text{(számmal szorzás);}\\
O(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (O\mathbf{a})+(O\mathbf{b}) && \text{(összeadás);}\\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (O\mathbf{a})\cdot(O\mathbf{b}) && \text{(skaláris szorzás);}\\
O(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (O\mathbf{a})\times(O\mathbf{b}) && \text{(vektoriális szorzás).}
\end{aligned}$$

Tükrözés

Az y-z síkra való tükrözés: T_{yz}.
A $\mathcal{K}' = T_{yz}\mathcal{K}$ koordináta-rendszer a $\mathcal{K}$ rendszerből az y-z síkra való tükrözéssel áll elő. A tükrözés inverze önmaga, $T_{yz}^{-1} = T_{yz}$, így:



$$[\mathbf{v}]^{T_{yz}\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = [T_{yz}\mathbf{v}]^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} -v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

Tetszőleges T tükrözés esetén:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]^{T\mathcal{K}} &= [T\mathbf{v}]^{\mathcal{K}}, && \text{(ha } \mathbf{v} \text{ ún. poláris vektor)} \\ T(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda(T\mathbf{a}), \\ T(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (T\mathbf{a}) + (T\mathbf{b}), \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (T\mathbf{a})\cdot(T\mathbf{b}), \\ T(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= -(T\mathbf{a})\times(T\mathbf{b}) && \text{szokatlan viselkedés!} \end{aligned}$$

Axiálvektorok

Kétféle vektort különböztetünk meg aszerint, hogy hogyan „transzformálódik" a koordináta-rendszer síkra való tükrözésekor:

$$\mathbf{p} \text{ poláris vektor:} \qquad [\mathbf{p}]^{T\mathcal{K}} = [T\mathbf{p}]^{\mathcal{K}},$$
$$\mathbf{a} \text{ axiálvektor:} \qquad [\mathbf{a}]^{T\mathcal{K}} = -[T\mathbf{a}]^{\mathcal{K}}.$$

Két poláris vektor vektoriális szorzata axiálvektor:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]^{T\mathcal{K}} = [\mathbf{a}]^{T\mathcal{K}} \times [\mathbf{b}]^{T\mathcal{K}} = [T\mathbf{a}]^{\mathcal{K}} \times [T\mathbf{b}]^{\mathcal{K}} =$$
$$= [(T\mathbf{a}) \times (T\mathbf{b})]^{\mathcal{K}} = [-T(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]^{\mathcal{K}} = -[T(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]^{\mathcal{K}}.$$

Hasonlóan:

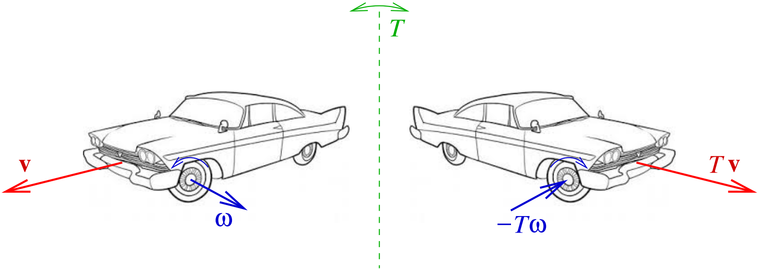
$$\text{poláris} \times \text{axiál} = \text{poláris}, \qquad \text{axiál} \times \text{poláris} = \text{poláris},$$
$$\text{axiál} \times \text{axiál} = \text{axiál}.$$

Poláris vektorok: erő, sebesség, lendület, elektromos tér ...
Axiálvektorok: szögsebesség, perdület, forgatónyomaték, mágneses indukció ...

Szögsebesség, mint axiálvektor

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{v} &: \text{kerületi sebesség (poláris vektor)}, \\ \mathbf{r} &: \text{helyvektor (poláris vektor)}, \\ \boldsymbol{\omega} &: \text{szögsebesség (axiálvektor)}. \end{aligned}$$

A tükrözött rendszerben a szögsebesség a szögsebesség tükörképének ellentettje.

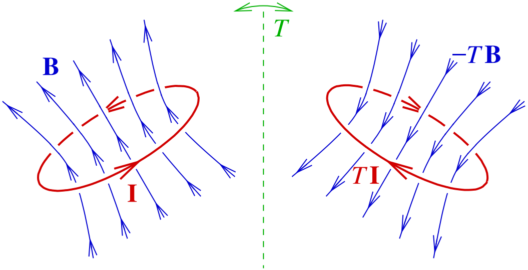


$$[\boldsymbol{\omega}]^{T\mathcal{K}} = -[T\boldsymbol{\omega}]^{\mathcal{K}}$$

Mágneses indukció, mint axiálvektor

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{F} &: \text{erő (poláris vektor)}, \\ \mathbf{v} &: \text{sebesség (poláris vektor)}, \\ \mathbf{B} &: \text{mágneses indukció (axiálvektor)}. \end{aligned}$$

A tükrözött rendszerben a mágneses indukció a mágneses indukció tükörképének ellentettje. Köráram esetén:



$$[\mathbf{B}]^{T\mathcal{K}} = -[T\mathbf{B}]^{\mathcal{K}}$$

Tartalom

Forgómozgás alapegyenlete

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t}}$$

$\mathbf{M}$: forgatónyomaték,
$\mathbf{N} = \Theta\omega$: impulzusmomentum (perdület).
Θ: tehetetlenségi nyomaték
ω: szögsebesség.
Megjegyzések:

- Az egyenletet felírhatjuk a tömegközéppontra vagy rögzített, nyugvó pontra.
- Ha $\mathbf{M} = 0$, akkor a perdület megmarad.
- Ha $|\mathbf{N}| \neq 0$, akkor a perdület úgy is változhat, hogy $\mathbf{N}$ nagysága állandó, de $\mathbf{N}$ iránya változik.
- $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{N}$ általában nem párhuzamosak $\Longrightarrow$ tehetetlenségi főtengelyek.

Kísérletek perdületmegmaradásra

Ha a testre ható forgatónyomaték zérus, akkor perdülete megmarad. A forgózsámolyos kísérletekben a perdület függőleges komponense állandó.
A bemutatott kísérletek videofelvételei a megtalálhatók a

`http://fizipedia.bme.hu`

honlapon. A kísérleteket Härtlein Károly mutatja be.

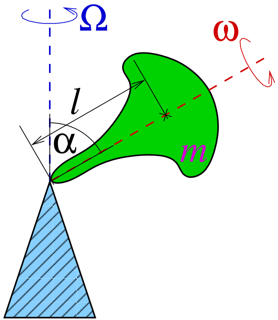
- Perdület megmaradás 1.
- Perdület megmaradás 2.
- Perdület megmaradás 3.
- Perdület megmaradás 4.
- Perdület megmaradás 5.
- Perdület megmaradás 6.

További kísérletek

- Pörgettyű vizsgálatok
- Szabad tengely vizsgálata 1.
- Szabad tengely vizsgálata 2.

Feladat: gyors szimmetrikus pörgettyű precessziója

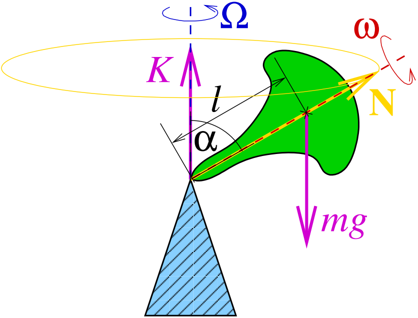
Határozzuk meg az ω szögsebességgel gyorsan forgó szimmetrikus pörgettyű precessziójának Ω szögsebességét! A pörgettyű tömege m, szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka Θ, a tömegközéppont és az alátámasztási pont távolsága l, a szimmetriatengely a függőlegessel α szöget zár be.



Megoldás

A perdület nagysága nem változik, ezért a perdületváltozás sebessége megegyezik az $\mathbf{N} = \Theta\boldsymbol{\omega}$ vektor végpontjának sebességével:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t}\right| = \Omega\Theta\omega \sin\alpha.$$



Másrészt, a pörgettyűre ható forgatónyomaték:

$$M = mgl \sin\alpha.$$

E két kifejezés egyenlőségéből:

$$\boxed{\Omega = \frac{mgl}{\Theta\omega}}.$$

Megjegyzés: Feltettük, hogy $\Omega \ll \omega$ valamint, hogy α állandó.