Kényszerfeltételek

2015. március 20.

A feladatok megoldásához – a kényszerfeltételeken kívül – csak a dinamika két alapvető egyenletét fogjuk használni:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
$$\sum M = \Theta\beta\,.$$

Az első egyenletben (Newton II. törvénye) $\sum \mathbf{F}$ a testre ható eredő erő, m a test tömege, $\mathbf{a}$ pedig a gyorsulása.

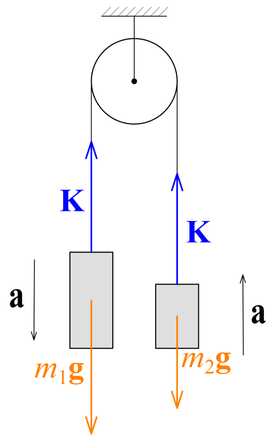
A második egyenletben (a tengely körüli forgás mozgásegyenlete) $\sum M$ a testre ható forgatónyomaték (a forgástengelyre vonatkoztatva), Θ a tehetetlenségi nyomatéka (ugyanerre a tengelyre vonatkoztatva), β pedig a szöggyorsulás.

A vastag álló betűk *vektoriális* mennyiségeket, a vékony dőlt betűk *skalár* mennyiségeket jelölnek. Erre nagyon figyelnünk kell, egyáltalán nem mindegy, hogy egy egyenletben vektorok, vagy skalár mennyiségek szerepelnek.

Egy vektor nagysága (vagy abszolút értéke) már skalár mennyiség. Például $|\mathbf{a}| = a$.

1. Két test csigán átvetett kötélen

Két testet rögzített, *könnyű*, *súrlódásmentes* csigán átvetett *elhanyagolható tömegű*, *nyújthatatlan* kötéllel kötjük össze, és a rendszert nyugalmi helyzetben magára hagyjuk.



Mit jelentenek a szövegben szereplő kiemelt szavak? A csiga könnyű és súrlódásmentes: így forgatásához elhanyagolhatóan kicsi erő szükséges, tehát a csiga két oldalán ugyanakkora a kötélerő. A kötél elhanyagolható tömegű: a rá ható nehézségi erőt elhanyagolhatjuk, és gyorsításához se szükséges erő. A kötél nyújthatatlan: így a két test elmozdulása egyforma nagyságú (bár ellentétes irányú), és emiatt sebességük és gyorsulásuk nagysága is megegyezik.

Ezek alapján berajzoltuk az ábrára a testekre ható erőket és a testek gyorsulásának irányát ($m_1 > m_2$ feltételezéssel), majd ennek megfelelően felírhatjuk a testekre vonatkozó mozgásegyenleteket:

$$m_1 a = m_1 g - K$$
$$m_2 a = K - m_2 g\,.$$

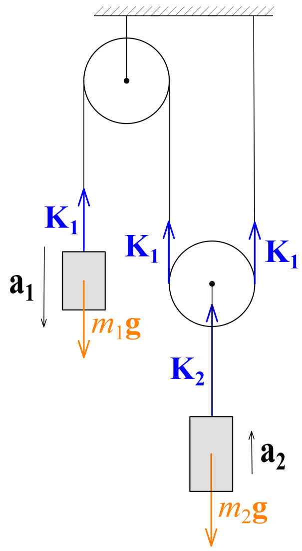
Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$
$$K = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \,.$$

A gyorsulásra, ha $m_1 > m_2$, valóban pozitív értéket kapunk. Ha $m_1 < m_2$, akkor a negatív, tehát az ábrán jelölttel ellentétes irányú.

2. Mozgócsiga

Ebben a feladatban az egyik test a szintén *könnyű* mozgócsigán lóg. Kérdés ismét a testek gyorsulása.



A testek gyorsulásának irányát nem látjuk előre, de bejelölünk mindkét testnél egy pozitívnak tekintett irányt. Ezután a mozgásegyenletek:

$$m_1 a_1 = m_1 g - K_1$$
$$m_2 a_2 = K_2 - m_2 g \,.$$

A csigák elhanyagolható súlya és súrlódásmentessége miatt a végigfutó kötélen végig ugyanaz a $\mathbf{K_1}$ erő hat, a mozgócsiga elhanyagolható súlya miatt pedig

$$K_2 = 2K_1 \,.$$

A gyorsulások viszonyát az alapján állapíthatjuk meg, hogy gondolatban Δx távolsággal lejjebb húzzuk az m_1 testet, ekkor a mozgócsiga két kötélszára összesen Δx-szel rövidül meg, és így az m_2 test $\frac{\Delta x}{2}$ távolsággal mozdul el felfelé. Így a két test elmozdulásának aránya mindig $2:1$, és így a sebességeik és gyorsulásaik aránya is ugyanekkora:

$$a_2 = \frac{a_1}{2} \,.$$

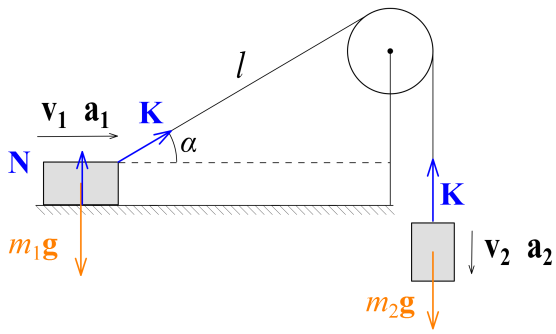
K_2 és a_2 kifejezését beírva az egyenletrendszer megoldható:

$$a_1 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} g$$
$$a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g\,.$$

A gyorsulásokra akkor kapunk pozitív értéket, ha $2m_1 > m_2$, tehát ebben az esetben a testek a bejelölt irányban fognak elindulni. Ha $2m_1 < m_2$ akkor pedig az ellenkező irányban.

3. Bonyolultabb kényszerfeltétel kötéllel összekötött testeknél

A következő feladatot nem oldjuk meg, csak azért mutatom meg, hogy lássuk, a kényszerfeltétel két, kötéllel összekötött test esetében nem mindig ilyen egyszerű.



Itt geometriai megfontolásokkal könnyen megmutatható, hogy kis elmozdulások esetén

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \cos\alpha\,,$$

amiből az elmozduláshoz tartozó kicsiny Δt idővel való osztással

$$v_2 = v_1 \cos\alpha\,.$$

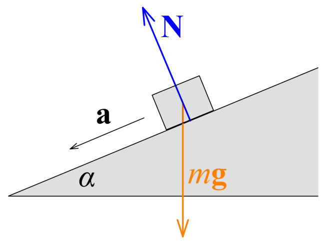
Ebből azonban nem következik, hogy a gyorsulások között is ilyen kapcsolat van, mert az α szög nem állandó, az is változik. A gyorsulásokat legegyszerűbben a sebességek közötti kifejezés idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg. Ekkor figyelnünk kell arra, hogy v_1 és α is az idő függvénye, használnunk kell a szorzat deriválási szabályát és a láncszabályt is. α idő szerinti deriváltját ismét egyszerű geometriai megfontolások segítségével tudjuk v_1 és l segítségével kifejezni:

$$a_2 = a_1 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = a_1 \cos\alpha - \frac{v_1^2}{l}\sin^2\alpha\,.$$

(Annak, aki nem tud még deriválni, nem kell tudnia levezetnie ezt az összefüggést. Csak azért mutattam meg, hogy lássuk, a testek gyorsulása közötti kapcsolat bonyolult lehet. Ebben a feladatban ráadásul azt is vizsgálni kell, hogy az m_1 tömegű test nem emelkedik-e fel a talajról.)

4. Lejtőn lecsúszó test

Rögzített, α hajlásszögű lejtőre kis m tömegű testet helyezünk, amely a lejtőn lecsúszhat. A súrlódást elhanyagoljuk. Mekkora a test gyorsulása?



A testre két erő hat. Az egyik, amellyel az összes feladatunkban számolnunk kell, az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő, amely definíció szerint mindig függőlegesen lefelé hat (a nehézségi erő irányát nevezzük függőleges iránynak). A másik a lejtő által kifejtett $\mathbf{N}$ nyomóerő, ami egy *kényszererő*: iránya a felületre merőleges, de nagysága más erőktől függ – éppen akkora, hogy megakadályozza a test felületbe hatolását.

A test gyorsulása – éppen a kényszerfeltétel miatt – csak a felülettel párhuzamos lehet. A mozgásegyenletet vektoriális alakban felírva:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}\,.$$

Ahhoz hogy ezt megoldjuk, a vektorokat komponensekre bontjuk, és a vektoregyenlet helyett két (térbeli feladatoknál három) skalár egyenletet írunk fel. Ennél a feladatnál célszerű az erőket lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponensekre felbontani. Az $\mathbf{N}$ erőnek csak lejtőre merőleges komponense van, az $m\mathbf{g}$ erőt viszont fel kell bontani:

$$\begin{aligned} mg_{\|} &= mg\sin\alpha \\ mg_{\perp} &= mg\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a skalár mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha \\ 0 &= mg\cos\alpha - N\,. \end{aligned}$$

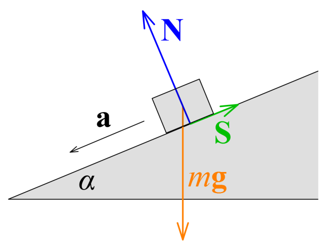
Az első egyenletből közvetlenül adódik a keresett gyorsulás:

$$a = g\sin\alpha\,.$$

$\alpha = 90°$ estén (függőleges lejtő esetén) visszakapjuk a szabadesés g gyorsulását.

5. Lejtő súrlódással

A következő oldalon lévő ábrán látható α hajlásszögű lejtő és a rá helyezett m tömegű test között most súrlódási erő is hat, a súrlódási együttható μ. A testet nyugalmi helyzetben a lejtőre helyezzük és elengedjük.



A testre a nehézségi erőn és a nyomóerőn kívül most a *súrlódási erő* is hat. A lejtő hajlásszögétől és a súrlódási együttható nagyságától függően két eset lehet:

Ha a lejtő elég meredek, illetve a súrlódási erő nem túl nagy, akkor a test megcsúszik, ekkor a súrlódási erő a testek relatív elmozdulásával ellentétes irányú, és nagysága

$$S = \mu N\,.$$

Ha a lejtő lapos, vagy μ nagy, akkor a test nem csúszik meg. Ilyenkor a súrlódási erő iránya és nagysága olyan, hogy lehetőleg fenntartsa a testek relatív nyugalmát, de teljesülnie kell az

$$S \leq \mu N$$

egyenlőtlenségnek.

Célszerű az erőket most is lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre bontani. A test nem mozoghat a lejtőre merőleges irányban, így a lejtőre merőleges erők eredője nulla (kényszerfeltétel), ebből:

$$N = mg\cos\alpha\,.$$

A testet a lejtőirányú erők gyorsítják. Tegyük fel, hogy a test megcsúszik! Ekkor biztosan lefelé indul el, ezért a gyorsulás irányát vegyük fel a lejtővel párhuzamosan lefelé pozitívnak. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$ma = mg\sin\alpha - S\,.$$

A súrlódási erő nagysága attól függ, hogy a test megcsúszik-e. Feltettük, hogy igen. (Ezt a végén majd ellenőriznünk kell!) Ekkor:

$$S = \mu N\,.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,g\,.$$

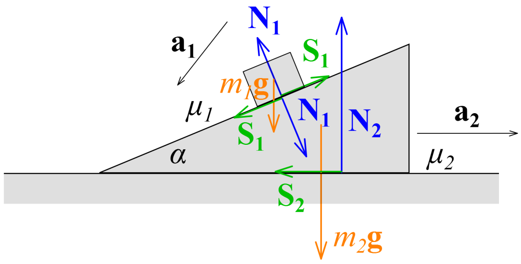
Az eredmény nem lehet negatív, hiszen a test nem indulhat el magától felfelé. Ebből a paraméterekre a

$$\mu \leq \operatorname{tg}\alpha$$

feltétel adódik. Ha a súrlódási együttható nagyobb, akkor a test nem csúszik meg, gyorsulása nulla lesz, nyugalomban marad. Akkor viszont a csúszási súrlódásra vonatkozó egyenlőség helyett a tapadási súrlódásra vonatkozó egyenlőtlenséget kell felírnunk, és a feladatot így megoldanunk. Ezt az olvasóra bízzuk.

6. Nem rögzített lejtő – bonyolultabb kényszerfeltételek

Az ábrán látható elrendezésben az m_1 tömegű testet egy m_2 tömegű, α hajlásszögű lejtőre helyezzük, amely a vízszintes talajon mozoghat. Mindkét felületen súrlódás van.



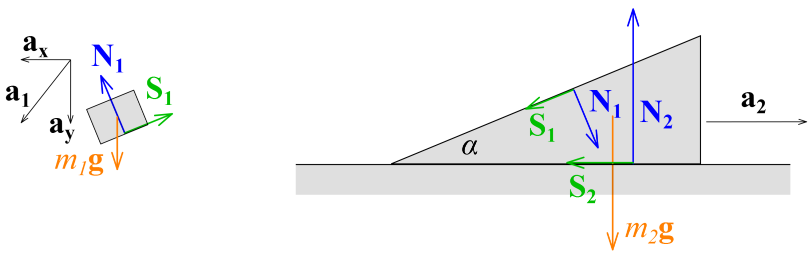
Ha a rendszert nyugalmi helyzetben magára hagyjuk a súrlódási erők nagyságától a tömegek arányától és a lejtő hajlásszögétől függően háromféleképp mozoghat a rendszer:

- Mindkét test nyugalomban marad.
- A lejtő nyugalomban marad, de a test lecsúszik rajta.
- A lejtő megcsúszik az ábrán jobbra, és a test lecsúszik rajta.

Vizsgáljuk az utolsó esetet! Az ábrába berajzoltam mindkét testre ható erőket: Mindkét testre hat az $m_1\mathbf{g}$ illetve $m_2\mathbf{g}$ nehézségi erő. A testre ezen kívül hat a lejtő által kifejtett nyomóerő (a felületre merőlegesen) és a súrlódási erő (a felülettel párhuzamosan felfelé). A lejtőre pedig ennek a két erőnek az ellenereje, valamint a talaj által kifejtett nyomóerő és súrlódási erő.

A testek gyorsulását is berajzoltam: a lejtő csak vízszintesen jobbra mozoghat ($\mathbf{a_2}$ gyorsulás), a test $\mathbf{a_1}$ gyorsulásának balra és lefele mutató irányát egyelőre nem ismerjük pontosan.

Érdemes lerajzolni a két testet külön-külön is, hogy jól elkülönüljön, melyik erő melyik testre hat.



Az m_1 tömegű test gyorsulását most vízszintes és függőleges komponensekre érdemes bontani (hiszen egyelőre nem ismerjük az irányát). A mozgásegyenletek:

$$m_1 a_x = N_1 \sin\alpha - S_1 \cos\alpha$$
$$m_1 a_y = m_1 g - N_1 \cos\alpha - S_1 \sin\alpha\,.$$

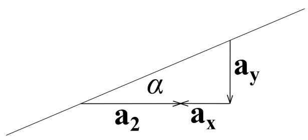
A lejtő csak vízszintesen mozoghat, így a mozgásegyenletek:

$$m_2 a_2 = N_1 \sin\alpha - S_1 \cos\alpha - S_2$$
$$N_2 = m_2 g + N_1 \cos\alpha + S_1 \sin\alpha\,.$$

Ehhez jönnek a csúszási súrlódás összefüggései:

$$S_1 = \mu_1 N_1$$
$$S_2 = \mu_2 N_2\,.$$

Végül fel kell írnunk a gyorsulások közti kapcsolatot: a testnek a mozgó lejtő felületén kell mozognia.



Az ábra alapján:

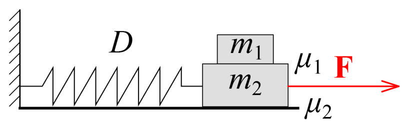
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_y}{a_2 + a_x}\,.$$

Ezzel összeállt a hét egyenletből álló egyenletrendszer, hét ismeretlennel (a_x, a_y, a_2, N_1, S_1, N_2 és S_2), amely így megoldható. Ezután ellenőrizni kell, hogy valóban a feltételezett mozgás jön-e létre, azaz mindhárom gyorsulás pozitív-e. Ha igen, akkor a feladat megoldása kész, ha nem, akkor meg kell vizsgálni a második esetet (álló lejtő), és ha ez se teljesül, akkor az első eset valósul meg.

Az egyenletrendszer megoldását és a diszkussziót az olvasóra bízzuk.

7. Kísérlet: megfeszített rugó

Az ábrán látható elrendezésben a nagyobb testet **F** erővel a rugó nyújtatlan állapotához képest x távolságra kihúzzuk, majd elengedjük. Mi történik? Ábrázoljuk a testek kezdeti gyorsulását x függvényében!



A kérdésre – ahogy ezt a kísérletben is láthattuk – az x távolságtól (és a paraméterektől) függően háromféle választ adhatunk:

- Kis x esetében a tapadási súrlódás miatt a testek nyugalomban maradnak.
- Közepes x esetén a két test együtt fog mozogni.
- Nagy x esetén a rugó kirántja a nagy testet a kicsi alól: az csak kisebb gyorsulással mozog, mint a nagy, és leesik róla.

Az első eset akkor valósul meg, ha az elengedés után a rugó által kifejtett erő kisebb, mint a nagy test és a talaj közti súrlódási erő:

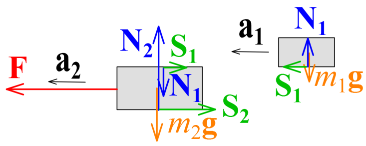
$$Dx \leq \mu_2 (m_1 + m_2) g \,.$$

Ebből

$$x \leq x_1 = \frac{\mu_2 (m_1 + m_2) g}{D}$$

feltétel adódik.

A másik két eset vizsgálatához rajzoljuk be az egyes testekre ható erőket! (A jobb láthatóság miatt a kis testet jobbra tolva rajzoltam le.)



A mozgásegyenletek, a függőleges erőegyensúlyok és a talajnál fellépő súrlódás:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= S_1 \\ m_2 a_2 &= Dx - S_1 - S_2 \\ N_1 &= m_1 g \\ N_2 &= m_2 g + N_1 \\ S_2 &= \mu_2 N_2 \,. \end{aligned}$$

A két gyorsulás viszonyára és a másik súrlódási erőre annak függvényében írhatunk fel összefüggéseket, hogy melyik eset valósul meg. Ha a két test együtt mozog, akkor a két test gyorsulása egyenlő, és köztük tapadó súrlódás fog hatni:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a \\ S_1 &\leq \mu_1 N_1 \,. \end{aligned}$$

Ebből az egyenletrendszer megoldása után a közös gyorsulás:

$$a = \frac{Dx}{m_1 + m_2} - \mu_2 g \,,$$

míg a kezdeti kitérítésre a feltétel:

$$x_1 < x \leq x_2 = \frac{(\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2) g}{D} \,.$$

Ha $x > x_2$, akkor a kis test is megcsúszik, ilyenkor

$$\begin{aligned} S_1 &= \mu_1 N_1 \\ a_2 &> a_1 \,. \end{aligned}$$

Ilyenkor az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu_1 g \\ a_2 &= \frac{Dx - [\mu_1 m_1 + \mu_2 (m_1 + m_2)] g}{m_2} \,. \end{aligned}$$

Az $a_1(x)$ és $a_2(x)$ grafikonok megrajzolását az olvasóra bízzuk.

8. Forgómozgás

A következő feladatokban forgómozgással fogunk foglalkozni. Itt most csak a

$$\sum M = \Theta\beta$$

(skalár) egyenletet fogjuk használni, mert csak úgynevezett *síkmozgásokat* vizsgálunk (ahol a merev test pontjai egy síkban mozognak). Általános esetben a forgó mozgás leírása sokkal bonyolultabb.

A test mozgását célszerű a tömegközéppont haladó mozgásának és a test tömegközéppont körüli forgásának szuperpozíciójaként felírni. Ekkor a $\sum M$ forgatónyomatékot is a tömegközéppontra vonatkoztatva kell meghatározni (egyelőre az egyes erők és az erők *erőkarjának* szorzataként – de erre majd később megismerünk más matematikai módszereket is). A képletben szereplő Θ tehetetlenségi nyomatékot szintén a test tömegközéppontjára vonatkoztatva kell meghatározni. (Egyszerűbb testek tehetetlenségi nyomatéka megtalálható a függvénytáblázatban vagy az interneten.)

Az egyenletesen gyorsuló forgómozgás kinematikája az egyenletesen gyorsuló haladó mozgás analógiájára könnyen leírható:

$$v(t) = at + v_0 \qquad \omega(t) = \beta t + \omega_0$$

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \qquad \alpha(t) = \frac{\beta}{2}t^2 + \omega_0 t + \alpha_0\,.$$

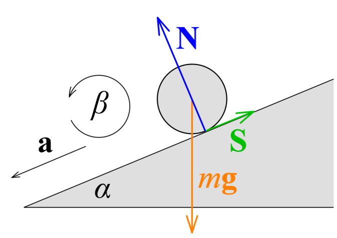
9. Lejtőn legördülő test

Ha egy hengert, csövet, golyót egy rögzített lejtőre helyezünk, akkor a súrlódási tényező nagyságától és a többi paramétertől függően ismét különböző mozgások jöhetnek létre:

- Ha egyáltalán nincs súrlódás, akkor a test nem fog forogni, ugyanúgy lecsúszik, mint a **4.** feladatban.
- Ha a súrlódás elég nagy, akkor a test *tiszta gördüléssel* gurul le a lejtőn, azaz a lejtővel érintkező pontja mindig nyugalomban van, a lejtő és a test között tapadási súrlódási erő hat.
- Ha van súrlódás, de nem elég nagy a tiszta gördüléshez, akkor a test *forogva csúszik*, a lejtővel érintkező pont „kapar”, a lejtő és a test közt csúszási súrlódási erő hat.

A tisztán gördülő merev test mindenkori érintkezési pontja nyugalomban van ahhoz a testhez viszonyítva, amin gördül. Így a felületek között tapadási súrlódás lép fel, a test haladó és forgó mozgása pedig nem független egymástól.

Vizsgáljuk meg az ábrán látható lejtőn legördülő test mozgását!



Válasszuk meg az ábrán látható módon a gyorsulás és a szöggyorsulás pozitív irányát! Írjuk fel a lejtőre merőleges erők egyensúlyát, a lejtőirányú mozgásra Newton II. törvényét, valamint a forgómozgás alapegyenletét:

$$
\begin{aligned}
F_\perp &= mg\cos\alpha - N = 0 \\
F_\parallel &= mg\sin\alpha - S = ma \\
M &= Sr = \Theta\beta\,.
\end{aligned}
$$

Ha feltételezzük, hogy a test tisztán gördül, akkor a gyorsulás és a szöggyorsulás nem független egymástól:

$$a = r\beta\,.$$

(Ezt könnyen beláthatjuk, ha felhasználjuk a középponti – radiánban mért – szög és a hozzá tartozó ív közötti kapcsolatot.)

A tiszta gördülés feltétele, hogy teljesüljön a tapadási súrlódás egyenlőtlensége:

$$S \le \mu N\,.$$

A forgástest tehetetlenségi nyomatéka legyen:

$$\Theta = kmr^2\,,$$

ahol k a test alakjától függő állandó (vékony falú csőre 1, vékony falú gömbhéjra $2/3$, tömör hengerre $1/2$, tömör gömbre $2/5$).

Az egyenletrendszer megoldása:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\Theta\beta}{r} = kma \\
mg\sin\alpha &= ma + S = ma\,(k+1) \\
a &= \frac{mg\sin\alpha}{m\,(k+1)} = \frac{g\sin\alpha}{k+1} \\
\beta &= \frac{a}{r} = \frac{g\sin\alpha}{r\,(k+1)}\,.
\end{aligned}
$$

A gyorsulás értéke nem függ a sugártól, de függ k-tól, azaz a test alakjától, ahogy ezt az előadáson bemutatott kísérletben látható volt, vagy a videón megnézhető.

A tiszta gördülés feltétele, hogy teljesüljön a tapadási súrlódás egyenlőtlensége:

$$S = kma = \frac{kmg\sin\alpha}{1+k} \le \mu N = \mu mg\cos\alpha\,,$$

amiből:

$$\mu \ge \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+1/k}\,.$$

Ha a tiszta gördülés feltétele nem teljesül, akkor a test csúszni és forogni fog. Ilyenkor a és β függetlenek egymástól, és a csúszási súrlódás összefüggését kell használni:

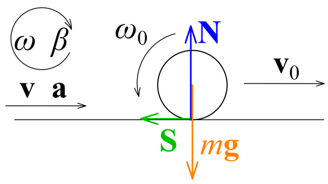
$$
\begin{aligned}
a &\ne r\beta \\
S &= \mu N\,.
\end{aligned}
$$

Az egyenletrendszert ekkor ezek figyelembevételével kell megoldani:

$$
\begin{aligned}
S &= \mu N = \mu mg \cos\alpha \\
ma &= mg \sin\alpha - S = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \\
a &= g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \\
\Theta\beta &= Sr = \mu mgr \cos\alpha \\
\beta &= \frac{\mu mgr\cos\alpha}{\Theta} = \frac{\mu g\cos\alpha}{kr}\,.
\end{aligned}
$$

10. Visszatérő pingpong labda

Vizsgáljunk meg egy másik érdekes kísérletet is, ahol a kezdetben csúszva forgó („kaparó" vagy „köszörülő") test végül megtapad, és tisztán gördül tovább!



Egy pingponglabdát ügyesen ki lehet úgy pöckölni, hogy kezdetben éppen haladási irányával szemben, negatív irányban pörögjön ($\omega_0 < 0$, lásd az ábrán ω, β, **v** és **a** pozitív irányát). Ekkor a pingponglabda és a talaj között fellépő csúszási súrlódási erő negatív gyorsulást, viszont pozitív szöggyorsulást hoz létre:

$$
\begin{aligned}
ma &= -S = -\mu mg \\
a &= -\mu g \\
\Theta\beta &= Sr = \mu mgr \\
\beta &= \frac{3\mu g}{2r}\,.
\end{aligned}
$$

(A vékony gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{2}{3}mr^2$.)

Ez az állapot addig áll fent, amíg meg nem tapad, azaz amíg nem teljesül, hogy

$$
\begin{aligned}
v(t) &= r\omega(t) \\
v_0 + at &= r\left(\omega_0 + \beta t\right) \\
v_0 - \mu gt &= r\omega_0 + \frac{3}{2}\mu gt \\
t &= \frac{2}{5}\frac{v_0 - r\omega_0}{\mu g}\,.
\end{aligned}
$$

Ekkor a test megtapad, a mozgás tiszta gördüléssé válik, sebessége ekkor:

$$
v(t) = v_0 + at = \frac{3}{5}v_0 + \frac{2}{5}r\omega_0\,.
$$

Ezután a sebesség már állandó, hiszen a tiszta gördüléskor megszűnik a súrlódási erő. (A valóságban a test lassan megáll, de ennek oka nem a súrlódási erő, hanem a *gördülési ellenállás* – ezt azonban most elhanyagoljuk.)

Mivel $\omega_0 < 0$, a megtapadáskor a sebesség megfelelő (elég gyorsan pörgő) indítás esetén nulla vagy negatív is lehet. Tehát ha

$$|\omega_0| > \frac{3}{2r} v_0 \,,$$

akkor az elpöckölt pingponglabda megtapadás után visszagurul hozzánk, ahogy azt az előadáson néhány próbálkozás után sikerült is megmutatni.

11. Házi feladatok

- Oldjuk meg az **1.** feladatot úgy, hogy a tömör henger alakú csigának véges tömege van (és a kötél nem csúszik meg rajta)!
- Oldjuk meg az **5.** feladatot úgy, hogy a test kezdetben nem nyugalomban van, hanem

  a) lefelé,

  b) felfelé

  mozog! Diszkutáljuk az összes lehetséges esetet!

Vankó Péter