A 2020. évi Eötvös-verseny eredményhirdetése

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2020. évi Eötvös-versenyének ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2020. november 20-án délután került volna sor, az eredeti meghívó[1] szerint az ELTE TTK Konferenciateremben. A járványhelyzet miatt az ünnepséget a szokásos formában nem lehet megtartani, így mindazt, ami ott elhangzott volna, ebben a formában adjuk közre.

Az idei verseny díjazottain kívül az eseményre meghívást kaptak az 50 és a 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Először az akkori feladatokat mutatjuk be.

Az 1970. évi Eötvös-verseny feladatai:

1. feladat. Egyenes körhenger fele ezüstből, fele alumíniumból készült, ezért súlypontja az $R = 10$ cm-es rádiusz középponttól mért negyedében van. A henger tengelyét vízszintesen csapágyazzuk és abban a helyzetben, amikor súlypontja a legmélyebben van, a kerületére csavart fonál végére egy tömeget akasztunk, azután a szerkezetet elengedjük. Mennyi a henger szögsebessége egy teljes fordulat után, ha a lelógó m_1 tömeg

a) a henger m tömegével egyenlő,

b) a henger tömegének nyolcada?

2. feladat. A repülőgép állandó sebességű vízszintes repüléséhez szükséges tolóerő $F = k_1 A v^2$, A szárnyfelület által létrehozott emelőerő $Q = k_2 A v^2$. (Q a repülőgép súlya, A a szárnyfelület nagysága, v a sebesség.) A szárnyfelület súlya $k_3 A$, ehhez járul a teher Q_0 súlya. Mekkora teljesítmény kell a repülőgép mozgásban tartásához? Mikor minimális a teljesítmény? Képes-e az ember izomerejével repülni? Ekkor $k_1 = 0{,}001\,\mathrm{kp\cdot m^{-2}\cdot (m/s)^{-2}}$, $k_2 = 25 k_1$, $Q_0 = 100\,\mathrm{kp}$, $k_3 = 2\,\mathrm{kp/m^2}$.

3. feladat. 0,5 mm széles rést 20 cm-es gyújtótávolságú lencsével a lencsétől 100 cm-re levő ernyőre képezzük le olyan fénnyel, amely 0,4 μm hullámhosszúságú kék és 0,6 μm hullámhosszúságú piros fény keveréke. A lencsére 0,04 mm rácsállandójú optikai rácsot helyezünk. Mit látunk az ernyőn?

Az 1970-es verseny díjazottjai:

Első díjat nyert **Blahó Gábor**, a budapesti Eötvös Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Zentai Károly* tanítványa és **Harmat Péter**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a mosonmagyaróvári Kossuth Gimnáziumban érettségizett, mint *Krajnik József* tanítványa.

[1]Meghívó: http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos/Eotvos_2020_meghivo.pdf

Második díjat nyert **Bajmóczy Ervin**, a budapesti Fazekas Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Hutai Ferenc* tanítványa és **Tichy-Rács Ádám**, a budapesti Eötvös Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Zentai Károly* tanítványa.

Harmadik díjat nyert **Mosó Tamás**, a budapesti Eötvös Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Zentai Károly* tanítványa.

Az 1995. évi Eötvös-verseny feladatai:

1. feladat. Egy négyzet alakú, $\ell = 3$ m széles kísérletező asztal felszíne sík, $d = 1$ m szélességű középső sávját azonban állandó $v = 3$ m/s sebességgel mozgó (végtelenített) gumiszalag képezi, amely pontosan illeszkedik az asztallap nyugvó felszínéhez. Az asztal egyik szélének közepére egy kicsi, lapos korongot fektetünk, és megütjük úgy, hogy $u = 4$ m/s sebességgel kezdjen csúszni (merőlegesen) a szalag felé. Az asztallap álló része és a korong közötti súrlódás elhanyagolható, a gumiszalag és a korong közötti súrlódási tényező $\mu = 0{,}5$. Hol esik le a korong az asztalról?

(Károlyházy Frigyes)

2. feladat. Két vékony, koncentrikus, szupravezető gyűrű a síkjukra merőleges, homogén mágneses térben helyezkedik el. A mágneses indukció vektorának nagysága B_0, iránya a papír síkjába befelé mutat. A belső gyűrű sugara sokkal kisebb a külsőénél ($R_1 \ll R_2$). Az egyes gyűrűk induktivitása L_1 illetve L_2, és a kölcsönös indukció sem hanyagolható el. Mekkora és milyen irányú áramok indukálódnak az egyes gyűrűkben, ha a külső mágneses teret megszüntetjük?

(Varga István)

3. feladat. Lézerből jövő, keskeny, vízszintes fénynyalábbal világítjuk meg a függőleges, nagyon keskeny rés középső tartományát.

a) Mit látunk a rés mögötti, a lézersugár irányára merőlegesen elhelyezett ernyőn?

b) Hogyan változik meg az ernyőn látható kép, ha a rést vízszintes középvonala körül φ szöggel elforgatjuk? (Legyen például $\varphi = 45°$.)

(A rést tekinthetjük egymáshoz nagyon közeli, egymástól egyenlő távolságra levő piciny lyukak sorozatának. Az ernyő elég távol van a réstől.)

(Radnai Gyula)

Az 1995-ös verseny díjazottjai:

Első díjat nyert **Tóth Gábor Zsolt**, a budapesti Árpád Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Vankó Péter* tanítványa.

Második díjat nyert **Bárász Mihály**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa, **Lengyel Krisztián**, az ELTE fizikus hallgatója, aki Cegléden, a Kossuth Lajos Gimnáziumban érettségizett, mint *Tűri László* tanítványa és **Lovas Rezső**, a

KLTE Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója, *Dudics Pál*, *Kirsch Éva* és *Szegedi Ervin* tanítványa.

Harmadik díjat nyert **Fazekas Péter**, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója, *Flórik György* tanítványa, **Hegyes István**, a nyíregyházi Kossuth Lajos Evangélikus Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Módis Ákos* tanítványa, **Szabó János Zoltán**, az BME műszaki informatika szakos hallgatója, aki Budapesten, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumában érettségizett, mint *Zsigri Ferenc* tanítványa és **Varga Dezső**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a miskolci Földes Ferenc Gimnáziumban érettségizett, mint *id. Szabó Kálmán* tanítványa.

Az 50 évvel ezelőtti verseny díjazottjai közül *Harmat Péter* és *Tichy-Rács Ádám*, a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Lovas Rezső*, *Tóth Gábor Zsolt* és *Varga Dezső* küldött üzenetet.

Harmat Péter:

A gimnáziumban, ahol érettségiztem, nem volt kiváló fizikatanárom, ahhoz sem szoktam hozzá, hogy órán 5 percnél hosszabb ideig halljak újdonságot. A Középiskolai Matematikai Lapok Fizika Rovatán „nevelkedtem", emellett szerencsére a gimnáziumom igazgatója egy-egy megyei fizika szakkörre azért elelküldött. Egy szerencsés OKTV 10. helyezés nyomán mindez elég volt ahhoz, hogy 1970. szeptemberében elkezdjem tanulmányaimat az ELTE TTK fizikus szakán.

Ez kész dráma volt! Itt aztán hallhattam 45 percen át új és új dolgokat! Eleinte figyelni sem bírtam ennyit egyfolytában. Évfolyamtársaim ráadásul szépen bólogattak, mint akik értik a dolgokat, én meg bizony nem mondhattam, hogy mindent …

Ráadásul a kollégiumban is „rossz társaságba keveredtem". Volt ott egy csoporttársam, Sanyi, aki szintén vidéki gimnáziumból jött. Sanyi nem ért el olyan versenyeredményeket, mint én, de amikor a tananyagot értelmeztük, vagyis együtt tanultunk, nekem hamar leesett, hogy Sanyi vagy jobban halad, mint én, vagy legfeljebb egyformák vagyunk. És ráadásul, amikor szó esett a jövőről, Sanyi azt mondta, hogy az ő célja ebben az első félévben csak annyi, hogy bennmaradjon. Na ez már sok volt! Ott voltak a bólogató évfolyamtársak és ez az okos Sanyi, akinek már az is jó, ha nem bukik ki. Mi lesz itt velem?

Eljött az Eötvös-verseny őszi napja, hát becsületből elmentem. A kollégium szomszédjában volt a Puskin utcai épület, ahol írtuk. Jó érzés volt a középiskolás feladatmegoldó rutint feleleveníteni! Ez újra az a világ volt, ahol egyszerűbbek és tisztábbak voltak számomra a fogalmak. De aztán megint jöttek az egyetemi hétköznapok, és a vektorszámítás tantárgyunk anyaga igencsak próbára tett! Pont ZH írás előtt három nappal menjek el egy eredményhirdetésre? Nem igazán éreztem azidőtájt, hogy valami is tutira sikerülhet. Nem, az luxus lenne, megyek inkább a könyvtárba és ott készülök a ZH-ra!

Este, amikor hazaértem a kollégiumi szobámba, ott várt az első díj. Horváthy Péter barátom hozta el nekem. Ő – az előélete alapján jogosan – számított rá, hogy valamilyen díjat csak kap. Neki az maradt, hogy az enyémet, a kishitűét, az önbizalom nélküliét vegye át helyettem.

És mi lett a félévünkkel? Vajon kibukott-e Sanyi? Persze mind a ketten jeles félévet zártunk, hiszen szorgalmasan hajtottunk, és hajtottuk nem csak magunkat, hanem egymást is! Ez a történet már eddig a pontig is mutatja, hogy az akkori csoport-rendszer, együtt-tanulás, gondolatcsere, jó társaság milyen hasznos képzési „eszközök” voltak számunkra. A további féléveink során pedig láthattam, ahogy a professzor úr – hát igen, azóta elteltek az évek, és Sanyi a BME egy igen népszerű egyetemi tanára lett – az évfolyam legjobb eredményét éri el. De ezt akkor még ki gondolta volna?

Tichy-Rács Ádám:

1970 őszén az Eötvös Gimnáziumból hazafelé a 86-os buszon összefutottam Pollák Tamással, aki érdeklődött, hogy szombaton elmegyek-e az Eötvös-versenyre. Korábban már hallottam a versenyről, de nem különösebben tartottam számon. Másnap elmondtam a hírt Zentai Károly tanár úrnak. A beszélgetések hatására az osztályunkból, azaz az Eötvös József Gimnázium második matematika-fizika tagozatos osztályából tizenhárman vettünk részt szombaton az ELTE TTK XX. termében. Mivel mindent használhattunk, az egyik feladat megoldásához a helyszínen tanultam meg a legfontosabb összefüggéseket.

Végül az osztályunkból első díjas lett Blahó Gábor, én kaptam második díjat, Mosó Tamás harmadik díjat nyert. A másik két díjazott Harmat Péter lett Mosonmagyaróvárról, illetve Bajmóczy Ervin volt, akit még általános iskolás koromból ismertem egy szakkörről.

Mi hárman a 700, 500, illetve 400 Ft-os pénzdíj egy részét összeadtuk, vettünk belőle egy üveg márkás italt, és bevittük Karcsi bácsinak az Eötvös Gimnáziumba, hiszen ő szombat délután az eredményhirdetés ideje alatt még tanított az esti tagozaton.

Blahó Gábor vegyészmérnök lett. Jelenleg az Egyesült Államokban él, találmányára alapozva sikeres vállalkozást vezet. Mosó Tamás a Műegyetem műszer- és szabályozástechnika szakán végzett. A Mechanikai Mérőműszer Gyárban, majd a Prolan részvénytársaságban dolgozott vezetőként, illetve ipari szoftverek fejlesztőjeként. Jelenleg súlyos beteg. A másik két díjazott közül Harmat Péter fizikus lett. Ő is az MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézetében dolgozott, ahol akadt közös munkánk is. A MÜFI után az MFA-ban dolgozott, majd megalapította az ANTE Innovatív Technológiák Kft-t. Vele mostanában nem találkoztam. Bajmóczy Ervint a Fazekas Gimnáziumban is kiemelkedő tehetségnek tartották. Annyit tudok, hogy matematikus lett, de ahogy Horváthy Péter visszaemlékezésében olvastam, valami történhetett vele.

Nekem annyit jelentett az Eötvös-verseny, hogy felvételi nélkül felvettek az ELTE TTK fizikus szakára, ahova a verseny nélkül valószínűleg nem vettek volna fel a származásom miatt. (Akkor még ez is számított.) Az egyetem elvégzése után két évig az ELTÉ-n maradtam doktori ösztöndíjasként. Utána tizennégy évig az MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézetében dolgoztam, nagyobbrészt egy egészen kiváló haditechnikai mérőműszer fejlesztésén. A munkámnak ez a része nem jelenhetett meg publikációkban, ami a tudományos előmenetel szempontjából nem volt túl szerencsés. 1992-től hat évig fizikát tanítottam egy középiskolában. 1998-ban az Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtárba (OMIKK-ba) mentem dolgozni, és a könyvtárral együtt 2001-ben a BME-re kerültem. Különféle munkakörök betöltése után onnan mentem nyugdíjba 2016 végén.

A tanulmányi versenyek közül az Eötvös-versenyt becsülöm legjobban, pedig részt vettem a KÖMAL versenyeken, OKTV-ken, diákolimpián. A versenyeket az elmúlt húsz évben különösen nagy figyelemmel kísértem. Előfordult, hogy egy észrevételem nyomán a versenybizottság ismételten átnézte a dolgozatokat, mert a hivatalosan közölt megoldásban hibát találtam. Ahogy mindig, 2020-ban is valódi fizikai gondolkodás kellett a verseny feladatok megoldásához. Idén mindhárom feladat nagyon érdekes volt. A mechanika feladat szerintem az egyik legszebb a verseny történetében, miközben a megoldás három sorban leírható. Érdeklődéssel várom, hány jó megoldást adtatok be.

Lovas Rezső:

Az 1995-ös Eötvös-versenyen kapott díjam a legfontosabb elismerés, amit középiskolai éveim alatt idehaza kaptam. Ez adott erőt és lelkesedést a fizikával való további foglalkozáshoz, aminek eredménye többek között az 1996-os Nemzetközi Fizikai Diákolimpián szerzett bronzérem lett. 1996 és 2001 között Debrecenben jártam egyetemre, 2001-ben fizikusként végeztem. Azóta más irányt vett a pályám, differenciálgeometriai témából doktoráltam, és most is a Matematikai Intézetben dolgozom Debrecenben. Kutatómunkám során ugyan kevés konkrét fizikai indíttatású problémával találkozom, de kapcsolatom a fizikával nagyban hozzájárult a matematika története utóbbi 350 évének és a matematikai problémák gyökerének mély megértéséhez, valamint a szimmetria, az absztrakt szépségek iránti vonzódásom kialakulásához. Mindezek nagyban meghatározzák tanítási stílusomat is.

Tóth Gábor Zsolt:

Diákként elsősorban a matematika és a fizika iránt érdeklődtem, és tanulmányi versenyeken is rendszeresen részt vettem, gyakran jó eredménnyel. Az egyik legnehezebb és legnagyobb hagyományokkal rendelkező verseny az Eötvös-verseny volt, az ezen elnyert első díjat nagy eredménynek tartottam, amely megerősítette azt a törekvésemet, hogy a fizikusi pálya felé haladjak tovább.

Ennek megfelelően a gimnázium befejezése után az ELTE fizikus szakán folytattam tanulmányaimat. A diploma megszerzése után elvégeztem a fizika doktori iskolát is, szintén az ELTE-n. Ezután posztdoktori ösztöndíjasként két évig a trieszti SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati) intézetben dolgoztam, jelenleg pedig a Wigner Fizikai Kutatóközpont tudományos munkatársa vagyok. Elsősorban mindig az elméleti fizika érdekelt, eddigi kutatói tevékenységem során főleg 1+1-dimenziós kvantumtérelmélettel és általános relativitáselméleti problémákkal foglalkoztam.

Varga Dezső:

Az Eötvös-verseny időpontjával is és stílusában is egyedi volt. 25 évvel ezelőtt már egyetemistaként vettem részt rajta – és ahhoz hogy az eredményem az előző évinél jelentősen rosszabb volt, hozzájárult nem kis részben az egyetemen kinyílt távlat okozta sokkhatás. Az Eötvös-verseny számomra mindig a „középiskolás" stílusú jól beazonosítható lépéseket követő feladatok helyett a valódi gondolkodást jelentette, de még az egyeteminél kisebb háttértudással. Egy lépés, hogy valamikor később kutatóvá váljak.

Ezután áttérünk az idei versenyre. A 2020. évi Eötvös-verseny október 9-én délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen[2] került megrendezésre. Külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc állt rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos volt. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 48 versenyző adott be dolgozatot, 11 egyetemista és 37 középiskolás.

Következnek a verseny feladatai és a feladatok megoldásai. Az 1. feladat megoldását *Tichy Géza*, a 2. feladatét *Vigh Máté*, a 3. feladatét *Vankó Péter* ismerteti.

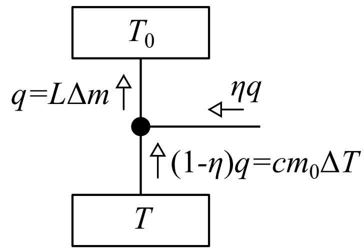
1. feladat. Egy m_0 tömegű, állandó c fajhőjű minta hőmérséklete kicsivel a nitrogén T_0 forráspontja alatt van. Rendelkezésünkre áll m tömegű, forrásban lévő folyékony nitrogén és egy hőszivattyú. Mekkora minimális hőmérsékletre lehet lehűteni a mintát, mire elforr az összes nitrogén? A nitrogén forráshője L.

(Tichy Géza)

[2]Részletek a verseny honlapján: http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm

Megoldás. Egy $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$ hatásfokú, hőerőgépként üzemeltetett Carnot-féle körfolyamat esetén a felső hőtartályból kivett hő η-ad része mint munkavégzés jelenik meg, $(1-\eta)$-ad része pedig az alsó hőtartályba kerül. Hőszivattyúként üzemeltetve munkát kell befektetnünk, az alsó hőtartályból szivattyúzzuk át az energiát a felsőbe, azaz a hő előjele változik ellenkezőre.

A Carnot-körfolyamattal általában úgy találkozunk, hogy a gép két állandó hőmérsékletű hőtartály között működik. Feladatunkban a Carnot-gép felső hőtartálya a forrásban lévő nitrogén, amelynek hőmérséklete végig T_0, az alsó hőtartály pedig a minta, amely viszont lassan hűl, T hőmérséklete nem állandó. Egy ciklus során azonban a minta hőmérséklete állandónak tekinthető.



Ebből a lassan változó hőmérsékletű hőtartályból vonunk el egy kis lépésben $cm_0\Delta T$ hőt. Ez a hő a felső hőtartályba érkező q hőnek

$$1-\eta = 1 - \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{T}{T_0}\text{-szorosa,}$$

ahogy az ábrán is látható.

Ha Δm mennyiségű nitrogén forrt el, akkor a felső hőtartálynak $L\Delta m$ hőt kellett kapnia. Ebből a

$$cm_0\Delta T = \frac{T}{T_0}L\Delta m$$

összefüggéshez jutunk. Ez a

$$\frac{cm_0\mathrm{d}T}{T} = \frac{L\mathrm{d}m}{T_0}$$

differenciális összefüggéséhez vezet. Ezt kell integrálni a kezdeti állapottól a végső állapotig. Az alsó hőtartály hőmérséklete, T hűl T_0-tól $T_{\min}$-ig, és közben a folyékony nitrogén tömege m-ről nullára csökken. Tehát

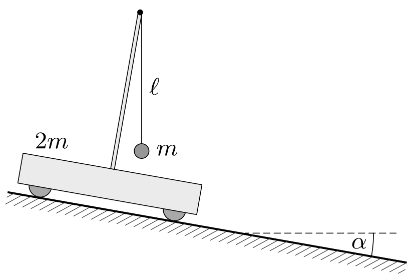
$$cm_0 \ln\frac{T_0}{T_{\min}} = \frac{Lm}{T_0}\,,$$

amiből a keresett minimális hőmérséklet

$$T_{\min} = T_0 e^{-\frac{Lm}{T_0 cm_0}}\,.$$

Megjegyzés: Aki tudja, hogy a Carnot-körfolyamat közben az entrópia állandó, és ismeri az entrópia kifejezéseit, az azonnal megkapja az integrálásból kapott összefüggést.

2. feladat. Könnyen gördülő, $2m$ tömegű kiskocsira egy árboc van rögzítve, aminek felső végére ℓ hosszúságú fonállal egy m tömegű kis golyót függesztettünk. A kiskocsit egy nem túl meredek, α hajlásszögű lejtőre helyezzük, majd megvárjuk az inga lengéseinek lecsillapodását, és végül a kocsit elengedjük.



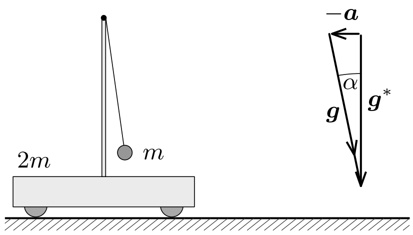
a) A mozgás során mennyire tér ki a fonál a függőlegestől?

b) Mekkora utat tesz meg a kiskocsi, amíg a fonál újra függőlegessé válik?

(Vigh Máté)

Megoldás. Az ingából és kiskocsiból álló rendszerre lényegében csak a nehézségi erő és a lejtőre merőleges irányú kényszererők hatnak, hiszen a kerekek gyorsuló forgásához szükséges tapadási súrlódási erőt a „könnyen gördülő" kifejezés miatt elhanyagolhatjuk. Lejtőirányú komponense csak a nehézségi erőnek van, ezért a rendszer tömegközéppontja a lejtővel *párhuzamos* irányban állandó, $g \sin \alpha$ gyorsulással mozog. A tömegközéppont a mozgás során a lejtőre *merőleges* irányban is gyorsul, ez azonban a további gondolatmenet szempontjából nem lényeges.

Üljünk bele a zérus kezdősebességű, a lejtővel párhuzamosan $|\boldsymbol{a}| = g \sin \alpha$ nagyságú gyorsulással mozgó vonatkoztatási rendszerbe! Egy gyorsuló rendszerben bármely m' tömegű testre a Newton-törvények csak úgy maradnak érvényben, ha a valójában rá ható (kölcsönhatásból származó) erők mellett bevezetjük a rendszer $\boldsymbol{a}$ gyorsulásával ellentétes irányú, $-m'\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erőt is. A $-m'\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erő és az $m'\boldsymbol{g}$ nehézségi erő vektori összege $m'\boldsymbol{g}^*$ alakban is felírható, ahol $\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. A gyorsuló rendszerben tehát minden test úgy mozog, mintha egy $\boldsymbol{g}^*$ effektív nehézségi gyorsulású erőtérben helyezkedne el. Esetünkben a vonatkoztatási rendszer $\boldsymbol{a}$ gyorsulása éppen megegyezik a $\boldsymbol{g}$ nehézségi gyorsulás lejtőirányú összetevőjével, ezért az effektív $\boldsymbol{g}^*$ nehézségi gyorsulás a lejtőre *merőleges* irányú, nagysága pedig $g \cos \alpha$. Mivel a gyorsuló rendszerben $\boldsymbol{g}^*$ határozza meg a függőleges irányt, célszerű a feladat ábráját elforgatni, ahogy az alábbi rajzon is látható.



A mozgást a gyorsuló vonatkoztatási rendszerünkben elemezve azt látjuk, hogy a kiskocsi és az ingatest nyugalomból indul, az inga kezdeti szögkitérése $\boldsymbol{g}^*$ irányától mérve jobbra éppen α. Az inga lengése során a rendszer tömegközéppontja külső lejtőirányú erő hiányában nem mozdul el, így mind a kiskocsi, mind pedig az ingatest mozgásba jön. A mechanikai energia megmaradásából és a tömegközéppont-tételből következik, hogy az inga szögkitérésének legnagyobb értéke $\boldsymbol{g}^*$-hoz viszonyítva a túlsó oldalon szintén α lesz, ami akkor következik be, amikor a kiskocsi és az ingatest először áll meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti vonatkoztatási rendszerben az inga a kezdeti helyzetéhez képest (azaz $\boldsymbol{g}$-hez viszonyítva) maximálisan 2α szöggel tér ki. Ezzel a feladat *a*) kérdésére válaszoltunk.

Térjünk most rá a *b*) részre. A gyorsuló rendszerben az ingatest és a kiskocsi is periodikus mozgást végez az egyensúlyi helyzet körül, amelyben az inga fonala éppen párhuzamos $\boldsymbol{g}^*$-gal. Az inga legkorábban T periódusidő múlva érkezik vissza a kiindulási helyzetbe. Ebben a pillanatban a tömegközéppont elmozdulása

$$s = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot T^2,$$

és ugyanekkora a kocsi elmozdulása is, hiszen a kocsi relatív helyzete a tömegközépponthoz viszonyítva éppen ugyanaz, mint az indítási állapotban volt. Feladatunk tehát a rezgés T periódusidejének meghatározása.

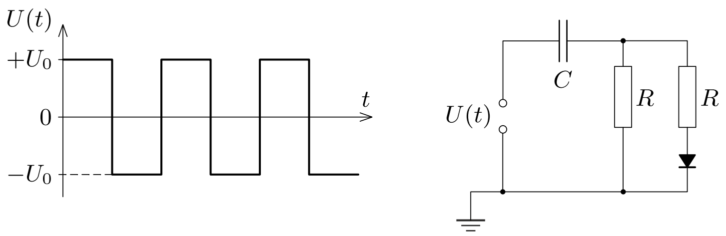
A gyorsuló rendszerben a tömegközéppont megmaradása miatt a kocsi kitérése minden pillanatban feleakkora és ellentétes irányú, mint az ingatest lejtővel párhuzamos irányú kitérése. Ezért a fonál felső harmadolópontja lényegében nem mozdul el (valójában a lejtőre merőleges irányban mégis, de elhanyagolható mértékben). Az ingatest tehát úgy mozog a $|\boldsymbol{g}^*| = g\cos\alpha$ nehézségi gyorsulású erőtérben, mintha egy $2\ell/3$ hosszúságú fonálra lenne felfüggesztve. Egy ilyen inga lengésideje *kis kitérések* esetén:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g\cos\alpha}}\,.$$

Vajon alkalmazható-e most ez az összefüggés? A feladat szövege szerint a lejtő *nem túl meredek*. Egy 45°-os lejtő már elég meredeknek számít, de az ekkora szögben kitérített inga lengésideje is csak kb. 4%-kal nagyobb a fenti képlettel számolt lengésidőnél. Ha a lejtő csak 30°-os, az eltérés 2%-nál is kisebb. Jó közelítéssel tehát azt mondhatjuk, hogy a kocsi elmozdulása addig a pillanatig, amíg az inga újra függőlegessé válik

$$s \approx \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot 4\pi^2 \frac{2\ell}{3g\cos\alpha} = \frac{4\pi^2}{3} \ell \operatorname{tg}\alpha\,.$$

3. feladat. Egy ideális diódából, két $R = 2\ \mathrm{k\Omega}$ nagyságú ellenállásból, egy kezdetben töltetlen, $C = 100\ \mu\mathrm{F}$ kapacitású kondenzátorból és egy feszültséggenerátorból az *ábrán* látható kapcsolást állítottuk össze. A feszültséggenerátoron $f = 5$ kHz frekvenciájú, $+U_0$ és $-U_0$ között változó szimmetrikus négyszögjelet állítunk be, ahol $U_0 = 3{,}6$ V.



a) Mekkora maximális feszültségre töltődik fel a kondenzátor?

b) A kondenzátor töltetlen állapotától számítva körülbelül mennyi idő után éri el a kondenzátor feszültsége a maximális érték felét?

(Vankó Péter és Vigh Máté)

Megoldás. A kapcsolásban félperiódusonként felváltva $+U_0$ és $-U_0$ feszültséget kapcsolunk egy soros RC kapcsolásra, ahol a kondenzátor kapacitása mindvégig C, az ellenállás pedig az áramiránytól függően $R_1 = \frac{R}{2}$, illetve $R_2 = R$. Jól ismert, hogy ha egy töltetlen, C kapacitású kondenzátorból és egy R ellenállásból álló soros RC kapcsolásra U_0 feszültséget kapcsolunk, akkor a kondenzátor feszültsége az

$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

függvény szerint változik, ahol az időállandó $\tau = RC$.

Vegyük észre, hogy a mi esetünkben az (egyik) időállandó $\tau = RC = 0{,}2\,\mathrm{s}$ (a másik ennek fele), a négyszögjel periódusideje pedig $T = \frac{1}{f} = 0{,}2\,\mathrm{ms}$, és így $T \ll \tau$. Emiatt egy fél periódusnyi idő alatt a töltődő kondenzátor feszültsége nagyon jó közelítéssel lineárisan változik.

Legyen a kondenzátor feszültsége egy adott időpillanatban $U_{\mathrm{C}}(t)$, a kondenzátoron átfolyó áram pedig $I(t)$. A négyszögjel első fél periódusában (amikor a dióda nyitva van, és mindkét ellenálláson folyik áram)

$$U_0 - U_{\mathrm{C}} = R_1 I_1(t) = \frac{R}{2} I_1(t)\,,$$

amiből

$$I_1(t) = \frac{2}{R}\left[U_0 - U_{\mathrm{C}}(t)\right]\,.$$

Egy fél periódus alatt ez az áram $I_1(t)\frac{T}{2}$ töltést szállít a kondenzátorra, így a kondenzátor feszültségének megváltozása

$$\Delta U_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{C} I_1(t)\frac{T}{2} = \frac{T}{RC}\left[U_0 - U_{\mathrm{C}}(t)\right] = \frac{T}{\tau}\left[U_0 - U_{\mathrm{C}}(t)\right]\,.$$

A másik fél periódusban (amikor a dióda lezár, és csak az egyik ellenálláson folyhat áram)

$$-U_0 - U_{\mathrm{C}} = R_2 I_2(t) = R I_2(t)\,,$$

amiből

$$I_2(t) = \frac{1}{R}\left[-U_0 - U_{\mathrm{C}}(t)\right]\,,$$

és a fél periódus alatt a kondenzátor feszültségének megváltozása

$$\Delta U_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{C} I_2(t)\frac{T}{2} = \frac{T}{2RC}\left[-U_0 - U_{\mathrm{C}}(t)\right] = \frac{T}{2\tau}\left[-U_0 - U_{\mathrm{C}}(t)\right]\,.$$

Egy teljes periódus alatt a feszültség teljes megváltozása a két fél periódus alatti változás összege

$$\Delta U_{\mathrm{C}}(t) = \frac{T}{2\tau}\left[U_0 - 3U_{\mathrm{C}}(t)\right] = \frac{3T}{2\tau}\left[\frac{U_0}{3} - U_{\mathrm{C}}(t)\right]\,.$$

A kondenzátor feszültsége akkor nem nő tovább, ha $\Delta U_{\mathrm{C}}(t) = 0$, azaz ha $U_{\mathrm{C}}(t) = \frac{U_0}{3}$, tehát a kondenzátor hosszú idő után $U_{\mathrm{C}}(\infty) = \frac{U_0}{3} = 1{,}2\,\mathrm{V}$ feszültségre töltődik fel.

Ezután áttérünk a *b)* kérdés megválaszolására. Mivel a periódusidő sokkal kisebb az időállandónál, az egy periódus alatti feszültségváltozás nagyon kicsi, a kondenzátor sok perióduson át töltődik. Ezen az időskálán a félperiódusok alatti töltődések és kisülések kis ingadozása nem is látszik. Egy olyan folyamatot kapunk ahol a kondenzátor feszültsége lényegében folyamatosan nő a kezdeti $U_{\mathrm{C}}(0) = 0$ értéktől az $U_{\mathrm{C}}(\infty)$ értékig.

Az utolsó egyenletünk alapján

$$\frac{\mathrm{d}\left[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\right]}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\Delta\left[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\right]}{T}=-\frac{3}{2\tau}\left[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\right]\,.$$

Ez pedig egy ugyanolyan differenciálegyenlet, mint amely leírja egy kondenzátor feltöltődését (és amely jól ismert a radioaktív bomlástörvényből is), megoldása:

$$\left[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(t)\right]=\left[U_\mathrm{C}(\infty)-U_\mathrm{C}(0)\right]e^{-\frac{3t}{2\tau}}\,,$$

amiből látható, hogy a kondenzátor akkor töltődik fel a maximális érték felére, ha

$$e^{-\frac{3t}{2\tau}}=\frac{1}{2}\,,$$

azaz

$$t=\frac{2}{3}\ln 2\tau=0{,}0924\,\mathrm{s}\,.$$

A feladatok ismertetése után áttérünk az idei verseny eredményeire.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Az első feladat helyes és a harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért, valamint a második feladatban elért részeredményekért *második díjat* nyert **Bonifert Balázs**, a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa és **Pácsonyi Péter** a BME mechatronikai mérnökhallgatója, aki a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett *Pálovics Róbert* tanítványaként.

A második és a harmadik feladat kicsit hiányos megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Molnár Szabolcs**, a BME fizikus hallgatója, aki a Kecskeméti Katona József Gimnáziumban érettségizett *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványaként.

Az első feladat hibátlan megoldásáért *dicséretet* kapott **Fekete Dezső Domonkos**, a BME fizikus hallgatója, aki a Kecskeméti Katona József Gimnáziumban érettségizett *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványaként, **Selmi Bálint**, a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Simon Péter*, *Kotek László* és *Pálfalvi László* tanítványa, valamit **Sepsi Csombor Márton**, a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Kovács Tibor* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 75 ezer, a harmadik díjjal 55 ezer, a dicsérettel 35 ezer forint pénzjutalom jár. A díjazottak tanárai az *Eötvös Loránd emlékalbumot* kapják. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulatot a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* és az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* támogatja. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatást!

Mind a díjazottaknak, mind tanáraiknak gratulálunk a sikeres versenyzéshez. Köszönetünket fejezzük ki az összes versenyzőnek, hogy részvételükkel, és tanáraiknak, hogy a felkészítéssel, tanításukkal emelték a verseny színvonalát.

Tichy Géza, Vankó Péter és Vigh Máté