## *Csatolt rezgések*

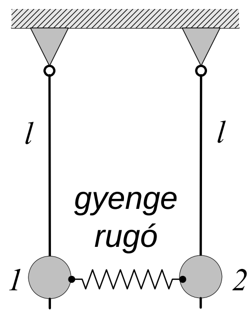
Eddig olyan rezgő rendszerekkel foglalkoztunk, amelyekben a rezgést egyetlen mennyiséggel lehet jellemezni. A mechanikai rezgések esetén ez azt jelenti, hogy egydimenziós rezgéseket vizsgáltunk, ahol a rezgő tömeg egyetlen koordinátája változott a rezgés során, vagyis a rezgő tömegnek egyetlen szabadsági foka volt.

Bonyolultabb a rezgés leírása, ha a rezgő tömegnek több szabadsági foka van. Ilyen esettel is találkoztunk, amikor két egymásra merőleges rezgés összetevését vizsgáltuk. Ebben az esetben a tömeg egyidejűleg két egymásra merőleges egyenes mentén rezeghet, más szóval a rendszernek két szabadsági foka van. Ugyanilyen két szabadsági fokú rendszert kapunk, ha egy inga lengésénél megengedjük, hogy az inga ne csak egy síkban, hanem két egymásra merőleges síkban lengjen. Fontos körülmény, hogy a két egymásra merőleges rezgés mindkét említett esetben egymástól független, az egyik szabadsági foknak megfelelő rezgés a másik szabadsági foknak megfelelő rezgést nem befolyásolja, így például egymásnak nem tudnak energiát átadni.

Ennél jóval bonyolultabbak azok a több szabadsági fokú rendszerek, amelyeknél az egyes szabadsági fokoknak megfelelő rezgések egymást befolyásolják, egymásnak energiát tudnak átadni. Az ilyen rezgések között tehát valamilyen *csatolás* működik, ezért ezeket *csatolt rezgéseknek* nevezik.

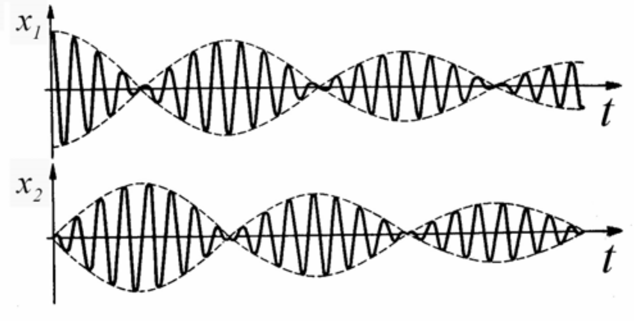
A csatolt rezgések egy szemléletes és viszonylag egyszerű esetét valósítja meg az ún. *kettős inga*, amelynek vázlata az ábrán látható.

**KÍSÉRLET:**
Két azonos lengésidejű (tehát azonos *l* hosszúságú) ingát (*1* és *2*) nem túl erős rugóval összekötünk egymással, majd pl. az *1* ingát a két felfüggesztési ponton átmenő függőleges síkban balra kitérítjük, és elengedjük. Ekkor az *1* inga lengésbe jön, de a rezgés amplitúdója fokozatosan csökken, miközben a *2* inga ugyanebben a síkban egyre nagyobb kitéréssel lengeni kezd. Amikor az *1* inga megáll, a *2* inga maximális amplitúdóval leng. Ezután a két inga szerepet cserél, most a *2* inga amplitúdója csökken, és az *1* inga amplitúdója nő. Ez a folyamat addig folytatódik, amíg a csillapodás miatt a teljes rezgési energia elfogy.



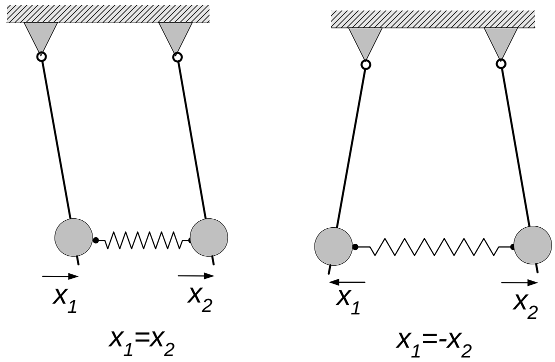

A kísérletben szereplő rendszer két ingából áll, amelyek egy megadott síkban lengenek, ezért mindegyik ingának egy szabadsági foka van, így az egész rendszernek összesen két szabadsági foka van. A kísérletből világosan látszik, hogy a két szabadsági foknak megfelelő lengések, vagyis a két inga lengései egymást befolyásolják, a két inga között periodikus energiacsere zajlik. Az ingák között a csatolást a rugó hozza létre.

Ha az ingák kitérésének időfüggését felrajzoljuk, akkor az ábrán látható görbéket kapjuk.




A két inga amplitúdójának periodikus változását befolyásolja a két ingát összekötő rugó erőssége, amit a *D* rugóállandóval jellemezhetünk.

Erősebb rugó esetén is hasonló rezgést tapasztalunk, de a két inga között gyorsabban zajlik az energiaátadás, vagyis az amplitúdóváltozás frekvenciája nagyobb lesz. Gyenge rugó, vagyis kis rugóállandó esetén azt mondjuk, hogy a két inga közötti *csatolás laza*, nagy rugóállandónál pedig *szoros csatolásról* beszélünk.
Az ingák kitérését megadó görbék szemmel láthatóan ugyanolyanok, mint a lebegés korábban megismert kitérés-idő görbéje, vagyis a csatolt ingák mindegyike lebegést végez. Laza csatolás esetén a lebegés frekvenciája kicsi, ami azt jelenti, hogy itt két egymáshoz közeli frekvenciájú rezgés összegződéséről van szó. A kísérleti görbékből meghatározható, hogy milyen két frekvenciáról van szó, sőt a vizsgálatok azt is megmutatják, hogy ez a két frekvencia a rendszer meghatározott speciális rezgéseihez tartozik, amelyeket a rendszer *normálrezgéseinek* neveznek.
A kettős inga két normálrezgését a mellékelt ábra mutatja. Az első rezgés úgy jön létre, hogy mindkét ingát ugyanabban az irányban, ugyanolyan mértékben kitérítjük (az ábrán jobbra), és elengedjük. Ekkor a két inga közötti rugó nem feszül meg, a két inga között tehát nincs csatolás, és mindkettő az ingák közös $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ saját körfrekvenciájával rezeg.




A második normálrezgés úgy valósítható meg, hogy a két ingát egymással ellentétes irányban, ugyanolyan mértékben térítjük ki, és elengedjük. Ekkor az ingák közötti csatolás működik, és a rugó jelenléte miatt az ingák $\omega_1$-nél nagyobb frekvenciával rezegnek. Mivel a rugó középső pontja a rezgés során helyben marad, ez a frekvencia egy rögzített végű rugóhoz kapcsolt inga frekvenciájával egyenlő. Ennek alapján a rezgés körfrekvenciája $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2D}{m}}$, ahol *m* a rezgő tömegek nagysága.
A lebegés frekvenciája a két normálrezgés körfrekvenciájának különbségével egyenlő: $\Delta\omega_L = \omega_2 - \omega_1$.

********************  ********************  *******************

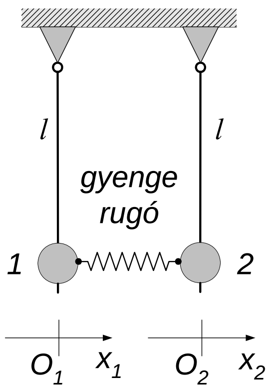
A kettős inga mozgását leíró egyenleteket kis kitérések esetén viszonylag egyszerűen megkaphatjuk az ingák tömegeire felírt mozgásegyenletek segítségével. Ekkor feltehetjük, hogy a tömegek csak az *x*-tengely mentén mozognak, és az ingák rúdjának $\vartheta$ szögelfordulása arányos az *x*-irányú kitéréssel, hiszen ekkor $\vartheta = \dfrac{i}{l} \approx \dfrac{x}{l}$ (itt *i* a $\vartheta$ szöghöz tartozó körív hossza.)
A fenti egyszerűsítés miatt a szabadon lenő inga eredeti

$$m\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = -m\frac{g}{l}\vartheta(t)$$

mozgásegyenlete helyett a

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x(t)$$

egyenletet használhatjuk.




Ezt az egyenletet ki kell egészíteni a csatoló rugó által az egyes tömegekre kifejtett erővel. Ez a két inga esetén a következőképpen határozható meg. Ha az *1* test kitérése $x_1$, a *2* test kitérése pedig $x_2$, akkor az ábrán használt koordinátatengely-irányítás mellett a rugó megnyúlása $\Delta x = x_2 - x_1$. Ennek megfelelően az *1* tömegre ható rugóerő

$$F_1 = D(x_2 - x_1)$$

a *2* tömegre ható rugóerő pedig

$$F_2 = -D(x_2 - x_1).$$

Ezeknek az erőknek a beírása, és *m*-mel való osztás után a két tömegre érvényes mozgásegyenlet:

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}x_1(t) + \frac{D}{m}\left(x_2(t) - x_1(t)\right)$$

$$\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}x_2(t) - \frac{D}{m}\left(x_2(t) - x_1(t)\right).$$

Ez két egyenlet szolgál a meghatározandó két kitérés-függvény meghatározására. A megoldást jelentősen megnehezíti, hogy mindkét egyenletben szerepel mindkét függvény. Vagyis nem egyszerű differenciálegyenletekről, hanem differenciálegyenlet rendszerről van szó. Szerencsére az egyenletrendszer egy átalakítással mégis viszonylag egyszerűen megoldható.
Először írjuk fel a két egyenlet összegét és különbségét:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l}(x_1 + x_2)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l}(x_1 - x_2) - \frac{2D}{m}(x_1 - x_2)$$

(itt az egyszerűség kedvéért az időfüggést nem jelöltük).
Ha bevezetjük az $y_1 = x_1 + x_2$ és az $y_1 = x_1 - x_2$ jelölést, és az egyenleteket átrendezzük, akkor azonnal látszik, hogy erre a két függvényre két harmonikus rezgést leíró differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{g}{l}y_1 = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right)y_2 = 0.$$

Tudjuk, hogy ezeknek az egyenleteknek a megoldása

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{illetve} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$$

körfrekvenciájú harmonikus rezgés, amit pl. koszinusz függvénnyel írhatunk le:

$$y_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2(t) = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Az $y_1$ és $y_2$ függvények definícióját felhasználva, az alábbi összefüggéseket kapjuk

$$x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_1 - x_2 = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

A két egyenlet összeadásával illetve kivonásával az egyes ingák lengését leíró függvényeket is megkaphatjuk

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{B}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Látható, hogy – a várakozásnak megfelelően – mindkét inga lengése lebegés, ami a fenti $\omega_1$ és $\omega_2$ körfrekvenciájú normálrezgések összeadódásának eredménye.

******************* ******************* ******************

Ha a rendszer szabadsági fokainak számát növeljük, akkor a tapasztalat szerint nő a normál rezgések száma is. Kimutatható, hogy a normálrezgések száma megegyezik a szabadsági fokok számával. Ha például a kettős ingához még egy ingát csatolunk, akkor a szabadsági

fokok száma, és a normálrezgések száma is *3* lesz. A szabadsági fokok további növelésével az igen nagy szabadsági fokú, kiterjedt testek rezgései is modellezhetők.
A csatolt mechanikai rezgésekkel kapcsolatban még két megjegyzést teszünk.

– Egy ilyen rendszerben az egyik rezgő tömeg rezgése a csatolás révén tulajdonképpen átterjed a többire, ami a később tárgyalandó hullámterjedés alapfolyamata.
– Rezgő rendszerek kölcsönhatásával korábban, a kényszerrezgés tárgyalásánál már foglalkoztunk. A kényszerrezgés abban különbözik a csatolt rezgéstől, hogy ott a rezgő rendszernek a kényszerrezgést okozó rezgésre való visszahatása elhanyagolható.