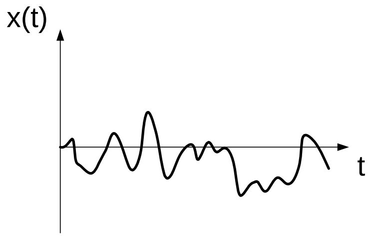
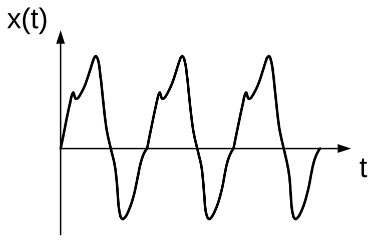
Rezgések

A *rezgés* általános értelemben valamilyen mennyiség értékének bizonyos határok közötti – periodikus vagy nem periodikus – ingadozását jelenti. Mivel az ilyen típusú jelenségek rendkívül gyakoriak, a rezgésekkel külön is érdemes foglalkozni.
Fontos, hogy a fizikában rezgés alatt nem csak a hétköznapi értelemben rezgésnek nevezett – általában mechanikai mozgással összekapcsolt – jelenségeket értjük, hanem bármilyen mennyiség "rezgés-típusú" változását. Rezgés lehet például egy tömegpont mozgása, az áram ingadozása egy elektromos áramkörben, az elektromos- vagy mágneses erőtér változása.
A rezgés során ingadozó mennyiség időbeli változása nagyon bonyolult lehet. Egy ilyen bonyolult esetet mutatunk be a mellékelt ábrán, ahol egy – az *x*-tengely mentén rezgő – tömegpont kitérésének időfüggése (*x(t)*) látható.



A gyakorlatban szűkebb értelemben rezgésnek egy mennyiség többé-kevésbé periodikus ingadozását nevezik. A mennyiség időbeli változása még ebben a leegyszerűsített esetben is nagyon bonyolult és sokféle lehet. A következő ábrán egy ilyen periodikus, de eléggé bonyolult rezgés kitérés-idő függvénye látható.



A bonyolult rezgések leírását jelentősen megkönnyíti az a matematikából ismert tény, hogy bármilyen periodikus függvény felírható megfelelően választott szinusz és/vagy[1] koszinusz, más néven *harmonikus függvények* összegeként. (Ez az eljárás emlékeztet egy függvénynek hatványsor alakjában történő felírására, csak itt a sor tagjai nem a változó hatványai, hanem annak harmonikus függvényei.) Matematikai módszerekkel az is kimutatható, hogy ha a rezgés nem periodikus, akkor harmonikus függvények integráljaként állítható elő.[2] Ez azt jelenti, hogy bármilyen bonyolult rezgés előállítható olyan, ún. *harmonikus rezgések* összegeként, amelyeknek időfüggését harmonikus függvény adja meg. Ez az egyik oka annak, hogy a rezgések tanulmányozásánál kitüntetett szerepet kap a harmonikus rezgés sajátságainak megismerése. A harmonikus rezgés azonban azért is fontos, mert nagyon sok valóságos rezgés közelítőleg harmonikus rezgésnek tekinthető (más szavakkal ez azt jelenti, hogy a fent említett összegzésben a rezgést leíró függvény egyetlen taggal jól közelíthető).
Annak ellenére, hogy a rezgés során változó mennyiség természete és a rezgés mechanizmusa az egyes esetekben más és más, a különböző rezgések formális leírása hasonló. A különböző rezgési jelenségek azonban a fizika más és más területéhez kapcsolódnak, ezért azokat részletesebben a megfelelő helyen tárgyaljuk. Elsőként a hétköznapi tapasztalatainkhoz legközelebb álló mechanikai rezgésekkel foglalkozunk, amelyeknek tárgyalása egyben mintául szolgál más típusú rezgések leírásához is.

[1] Az összeg általában mindkét függvényt tartalmazza, ha azonban az előállítandó függvény páros, akkor csak koszinusz-, ha pedig páratlan, akkor csak szinusz függvények szerepelnek az összegben.
[2] A rezgéseknek harmonikus rezgésekre történő felbontásáról később még lesz szó.

Szabad mechanikai rezgések

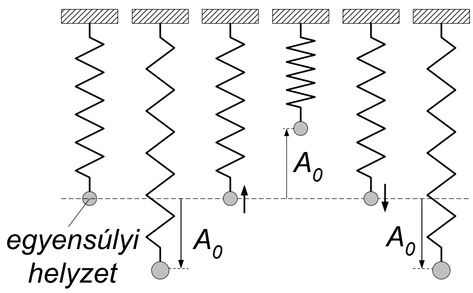
Szabad rezgésről akkor beszélünk, ha a rezgésre képes rendszert a rezgés elindulása után magára hagyjuk. Ilyen rezgés jön létre például, ha egy rugóra felfüggesztett tömeget az egyensúlyi helyzetéből kimozdítunk, és magára hagyjuk, vagy egy kondenzátort és tekercset tartalmazó elektromos rezgőkörben a kondenzátort feltöltjük és a rendszert magára hagyjuk.
Az alábbiakban szabad mechanikai rezgéseket vizsgálunk. Először az energiaveszteség nélkülinek feltételezett ideális, harmonikus rezgésekkel-, majd az energiaveszteség miatt csillapodó rezgésekkel foglalkozunk.

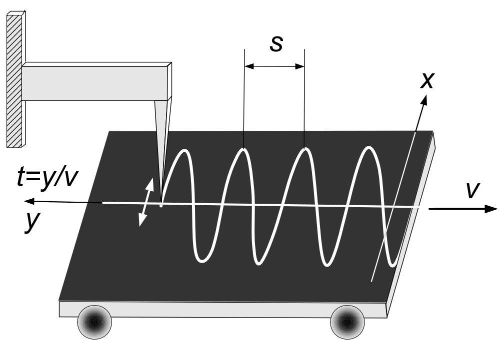
Szabad harmonikus rezgések

Definíció szerint a *harmonikus rezgés* egy mennyiség olyan változása, amelynek időfüggése harmonikus (szinusz- vagy koszinusz) függvénnyel írható le. Kísérletileg szabad harmonikus rezgést nem könnyű bemutatni, mivel a valóságban a szabad rezgések kisebb-nagyobb mértékben mindig csillapodnak. Közelítőleg harmonikus rezgést azonban többféleképpen is megvalósíthatunk.

KÍSÉRLETEK:

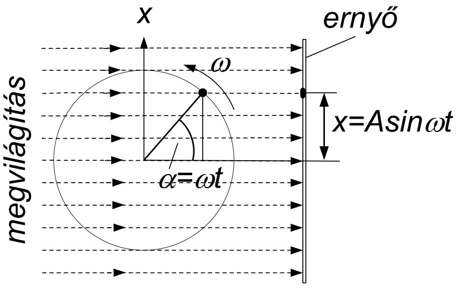
- Jó közelítéssel harmonikus rezgést végez egy rugóra felfüggesztett tömeg, ha az egyensúlyi helyzetéből kitérítjük, és elengedjük (ábra).
  Az egyensúlyi helyzettől lefelé A_0 maximális távolságra kitérített tömeg a megnyújtott rugó hatására felfelé indul, majd felfelé elérve az A_0 kitérést, megfordul, és lefelé halad, amíg újra eléri az induló helyzetet.
- A rezgés időfüggése is könnyen bemutatható, ha a rezgő testre egy írószerkezetet teszünk, és egy sík lapot egyenletes sebességgel elhúzunk a rezgő test alatt. Ekkor az írószerkezet által különböző időpontokban felírt nyomok a síklap különböző helyeire kerülnek, és kirajzolják a kitérés időfüggését. Az ábrán egy rezgő acéllap végére szerelt tű karcol nyomot egy kormozott üveglapon, amit a rezgésre merőlegesen v sebességgel mozgatunk. A görbén egy adott y helyhez tartozó időt a $t=\dfrac{y}{v}$ összefüggés adja meg, egy teljes periódus ideje, a rezgésidő az ábra jelöléseivel: $T=\dfrac{s}{v}$.

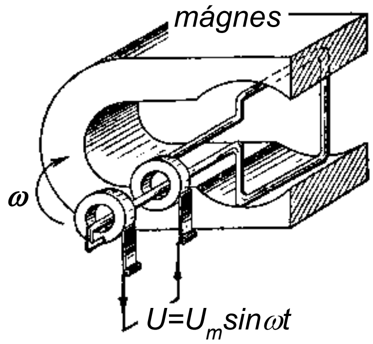




KÍSÉRLETEK:

- Ha egy körmozgást végző tömeget a körpálya síkjával párhuzamosan megvilágítunk, akkor az árnyéka a vetítés irányára merőleges ernyőn harmonikus rezgőmozgást végez (ábra).
- Harmonikus rezgést kapunk akkor is, ha mágneses erőtérben egy drótkeretet egyenletesen forgatunk az erőtérre merőleges tengely körül (ábra). Ekkor a keletkezett indukált feszültség időben harmonikus függvény szerint változik, amit katódsugár oszcilloszkóp segítségével könnyen bemutathatunk.





A harmonikus rezgések tanulmányozását azzal kezdjük, hogy felírjuk az ilyen rezgést leíró függvények különböző alakjait, ezután mechanikai példán bemutatjuk a harmonikus rezgés alapegyenletét, majd konkrét mechanikai- és elektromos rezgéseket tárgyalunk, végül foglalkozunk a rezgések során bekövetkező energiaátalakulásokkal.

A harmonikus rezgést leíró függvény alakjai

Az *x*-tengelyen mozgó tömegpont akkor végez harmonikus rezgőmozgást, ha koordinátájának időfüggését az

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad \text{vagy} \qquad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

típusú függvény írja le[1], ahol A a legnagyobb kitérés értéke, amit a rezgés *amplitúdójának* neveznek, ω_0 a rezgés T_0 *rezgésidejét* (egy periódus hosszát) meghatározó körfrekvencia ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$), φ pedig az időmérés kezdetétől függő *fázisállandó*.

A rezgések jellemzésére gyakran használt f_0 *frekvencia* számértéke az egységnyi idő alatt lezajló rezgési periódusok száma, amely a fenti jellemzőkkel az $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ összefüggésben van. A továbbiakban általában a körfrekvenciát használjuk, de ebből a vele arányos frekvencia a fenti összefüggés segítségével mindig megkapható.

Korábban már szó volt arról, hogy a harmonikus rezgés nem csak rezgőmozgást jelent. Harmonikus rezgésről beszélünk akkor is, ha egy áramkörben mért I áramerősség- vagy U feszültség időbeli változása például az

$$I(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1),$$
$$U(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

összefüggésekkel adható meg (itt I_m és U_m az áramerősség- illetve feszültség maximális értékét megadó *áramerősség-* illetve *feszültség-amplitúdó*).

[1] A két függvény a harmonikus rezgés leírása szempontjából egyenértékű, csak egy állandó fázisszöggel különböznek egymástól: $\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Ha a szögek összegének szinuszára (koszinuszára) vonatkozó ismert trigonometriai összefüggést alkalmazzuk, akkor a fenti kifejezéseket fázisszög bevezetése nélkül is felírhatjuk. Ez például az $x(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi)$ rezgés esetében az alábbi módon történhet:

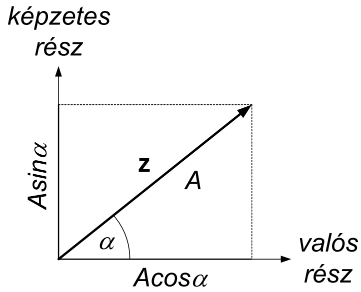
$$x(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi) = A sin\,\omega_0 t\, cos\,\varphi + A cos\,\omega_0 t\, sin\,\varphi\,.$$

Bevezetve a $B = A cos\,\varphi,\ \ C = A sin\,\varphi$ jelöléseket, a harmonikus rezgést leíró függvény az alábbi (az eredetivel egyenértékű) alakba írható:

$$x(t) = B sin\,\omega_0 t + C cos\,\omega_0 t\,.$$

******************** ******************** *******************

Gyakran előfordul, hogy a számolások egyszerűsítése érdekében a harmonikus rezgés leírására komplex függvényt használnak. Ez első pillanatban különösnek tűnik, hiszen a fizikai mennyiségeket valós számokkal adjuk meg. A komplex függvények használata a rezgések esetében azt jelenti, hogy a számolásoknál komplex mennyiségekkel dolgozunk, de a számolás végén kapott komplex végeredményből leválasztjuk a valódi fizikai eredményt megadó valós függvényt. Erre a számolástechnikai trükkre az ad lehetőséget, hogy egyrészt egy komplex szám a komplex számsíkon egy vektorként fogható fel, és harmonikus függvények lineáris kombinációjaként állítható elő (ábra)



$$z = A cos\,\alpha + iA sin\,\alpha\,,$$

másrészt az ún. Euler-összefüggés segítségével exponenciális alakban is felírható:

$$z = A cos\,\alpha + iA sin\,\alpha = Ae^{i\alpha}$$

($i = \sqrt{-1}$ a komplex egység). Az exponenciális alak többek között azért egyszerűsíti a számolásokat, mert ennek a függvénynek a differenciálhányadosa és integrálja önmaga konstans-szorosával egyenlő.

Egy harmonikus rezgést a fentiek alapján az

$$\tilde{x}(t) = A cos(\omega_0 t + \varphi) + iA sin(\omega_0 t + \varphi) = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

komplex függvénnyel jellemezhetünk, hozzátéve, hogy a rezgést fizikai értelemben leíró függvény a komplex függvény

$$x(t) = Re\,\tilde{x}(t) = A cos(\omega_0 t + \varphi)$$

valódi része vagy

$$x(t) = Im\,\tilde{x}(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi)$$

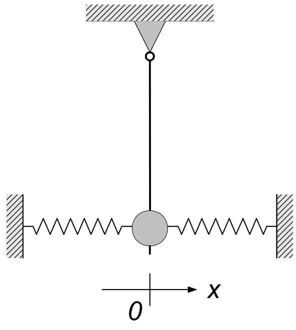
képzetes része.

Az exponenciális alakkal számolva, végeredményül komplex függvényt kapunk, de kimutatható, hogy ennek valós vagy képzetes része megegyezik azzal az eredménnyel, amit (sok esetben jóval bonyolultabb módon) valós, harmonikus függvénnyel számolva kaptunk volna.

******************** ******************** *******************

Tömegpont egydimenziós, harmonikus rezgése, a harmonikus rezgés alapegyenlete

Egydimenziós a rezgés, ha a rezgő tömegpont egy egyenes mentén mozog. Kísérletileg jól megvalósítható ez a mozgás – a már említett – rugóra felfüggesztett tömeg függőleges mozgásával, vagy az ábrán látható elrendezéssel, amely kiküszöböli a nehézségi erő hatását, és kis kitéréseknél jó közelítéssel vízszintes irányú mozgást hoz létre.



Egy egyenes, pl. az x-tengely mentén mozgó tömegpont kitérését az

$$x(t) = A sin(\omega_0 t + \varphi)$$

vagy az

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

összefüggéssel adhatjuk meg.

Ha kiszámítjuk a rezgő pont gyorsulását, akkor kiderül, hogy milyen erő hozhat létre ilyen mozgást. A szinusz függvényt használva, a gyorsulás

$$a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x\ ,$$

a koszinusz függvényt használva pedig

$$a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x\ .$$

Vagyis akár a szinusz-, akár a koszinusz függvényt használjuk a harmonikus rezgés leírására, a gyorsulásra ugyanazt a kifejezést kapjuk: a gyorsulás arányos a kitéréssel, és mindig azzal ellentétes irányú. Ebből – a mozgásegyenlet alapján – következik, hogy a harmonikus rezgőmozgást létrehozó erő is ugyanilyen jellegű: $F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x$. Mint várható, a mozgást létrehozó erőre kapott kifejezés nem függ attól, hogy melyik függvényt használjuk. Ha bevezetjük a $D = m\omega_0^2$ jelölést, akkor az erő az egyszerűbb $F_x = -Dx$ alakba írható. Ennek az erőnek két fontos jellegzetessége van. Egyrészt ez az erő a mindenkori kitéréssel ellentétes irányú, tehát mindig a rezgés centrumaként felfogható egyensúlyi helyzet felé mutat (vagyis ún. *centrális erő*), emiatt jöhet létre rezgőmozgás. Másrészt ez az erő arányos a kitéréssel (vagyis ún. *lineár*is *erő*), ez ahhoz szükséges, hogy a rezgés harmonikus legyen. A megfeszített vagy összenyomott ideális rugó éppen ilyen erőt fejt ki, ezért végez a rugóhoz rögzített tömeg harmonikus rezgőmozgást.

A mozgásra felírható

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

mozgásegyenlet a lineáris erő behelyettesítésével az alábbi alakot ölti

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -m\omega_0^2 x \qquad \text{illetve} \qquad m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx\ .$$

Az egyenleteket *m*-mel végigosztva, végül az időfüggő helykoordinátára a

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad \text{illetve} \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{D}{m}x(t) = 0$$

egyenletet kapjuk.

Az egyenlet matematikailag egy *differenciálegyenlet*, amely a meghatározandó függvény mellett annak differenciálhányadosát is tartalmazza. Az egyenletnek eleget tevő *x(t)* függvény(ek) megkeresése, vagyis a differenciálegyenlet megoldása matematikai módszerekkel lehetséges. Ezekkel itt nem foglalkozunk, számunkra most csak az egyenlet alakja fontos.

Matematikai elemzés nélkül is belátható, hogy ennek az egyenletnek megoldása a harmonikus rezgést leíró $x(t) = A\sin s(\omega_0 t + \varphi)$ vagy $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ függvény, hiszen a differenciálegyenletet ebből vezettük le. (Egyébként ugyanerre a következtetésre jutunk akkor is, ha az egyenlet eredetéről semmit nem tudva, matematikai módszerekkel keressük meg a megoldást.)

A differenciálegyenletet formailag vizsgálva megállapíthatjuk, hogy ha összeadjuk a keresett függvény második deriváltját és a függvénynek egy állandóval megszorzott értékét, akkor eredményül nullát kapunk. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy ennek az egyenletnek megoldása pl. a harmonikus rezgést leíró

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{illetve} \qquad x(t) = A\sin(\sqrt{\frac{D}{m}}t + \varphi)$$

függvény, ahol $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$, a rezgés körfrekvenciája.

Vegyük észre, hogy a megoldás-függvényben az idő szorzója, vagyis a rezgés körfrekvenciája ($\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$) azonos a differenciálegyenletben a függvény szorzójaként szereplő állandó ($\omega_0^2 = \frac{D}{m}$) négyzetgyökével.

Ebből az az általános következtetés adódik, hogy ha egy folyamatban egy *f(t)* mennyiség változására fizikai meggondolások alapján egy

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + Kf(t) = 0,$$

alakú differenciálegyenletet kapunk, akkor minden további matematikai elemzés nélkül állíthatjuk, hogy a mennyiség változása harmonikus rezgés, amit az

$$f(t) = f_m \sin(\sqrt{K}t + \varphi) = f_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

vagy az

$$f(t) = f_m \cos(\sqrt{K}t + \varphi') = f_m \cos(\omega_0 t + \varphi').$$

függvénnyel írhatunk le. Itt f_m a mennyiség maximális értéke, $\omega_0 = \sqrt{K}$ pedig a rezgés körfrekvenciája. (A komplex leírásnál a függvény alakja: $\hat{f}(t) = f_m e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$)

Használhatjuk még az

$$f(t) = f_1 \sin\sqrt{K}t + f_2 \cos\sqrt{K}t = f_1 \sin\omega_0 t + f_2 \cos\omega_0 t$$

alakot is.

Mivel a fenti differenciálegyenlet megoldása harmonikus függvény, az ilyen típusú egyenletet a *harmonikus rezgés differenciálegyenletének* vagy a *harmonikus rezgés alapegyenletének* nevezik.

******************* ******************* ******************

Megjegyzés: A megoldások bármelyik alakját vizsgáljuk, azt találjuk, hogy azokban két olyan mennyiség szerepel, amelyek matematikai úton nem határozhatók meg egyértelműen, értéküket csak a rezgési folyamat fizikai körülményeinek ismeretében tudjuk megadni (f_m és φ illetve f_1 és f_2).

Az $f(t) = f_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ típusú megoldásnál ilyen mennyiségpár az f_m amplitúdó és a φ fázisszög. Ha ez a megoldás például egy tömegpont harmonikus rezgését írja le, akkor az amplitúdót az határozhatja meg, hogy az időmérés kezdetén mekkora a tömegpont sebessége, a fázisszög pedig attól függ, hogy az időmérés kezdetén milyen a kitérés. A megoldás tehát csak akkor teljes, ha ezeket az ún. *kezdeti feltételeket* ismerjük.

******************* ******************* ******************

Példa

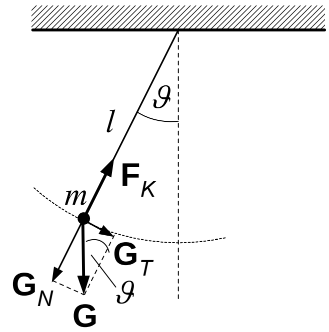
Most az ún. *fonálinga* (vagy *matematikai inga*) példáján bemutatjuk, hogy egy jelenség vizsgálatánál fizikai meggondolások alapján hogyan juthatunk el olyan egyenletre, amelyből ránézésre megállapítható, hogy harmonikus rezgésről van szó vagy nem.

Egyszerűen tárgyalható eset az l hosszúságú fonálon függő m tömegű pontszerű test (matematikai- vagy fonálinga) lengése. A tömegpont ilyenkor l sugarú körpályán mozog, körmozgását a ϑ szög változásával jellemezhetjük (*l.* a mellékelt ábrán), a mozgásegyenlet pedig

$$G_T = -mg\sin\vartheta(t) = ma_T = ml\beta = ml\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

vagyis

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta(t) = 0.$$



Mivel az egyenletben a $\vartheta(t)$ függvény helyett annak szinusza áll, megállapíthatjuk, hogy az inga mozgását leíró differenciálegyenlet nem olyan alakú, mint a harmonikus rezgés alapegyenlete, vagyis az inga mozgása általában nem harmonikus rezgés.

Ha azonban az inga kitérése (vagyis a ϑ szög) kicsi, akkor $\sin\vartheta \approx \vartheta$, és így az egyenlet a

$$\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta(t) = 0,$$

alakot ölti, ami már harmonikus rezgést ír le. A megoldás

$$\vartheta(t) = \vartheta_m \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

ahol a körfrekvencia $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Ebből kapjuk a közismert rezgésidő-összefüggést:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Egy ilyen szabadon rezgő rendszer esetén a rezgés $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ frekvenciáját – de gyakran magát az ω_0 körfrekvenciát is – a rendszer *sajátfrekvenciájának* nevezik.

A harmonikus rezgés energiaviszonyai

Egy fizikai mennyiség változásai – így a rezgések is – általában energia-átalakulásokkal járnak. Most a mechanikai- és elektromágneses harmonikus rezgés energiaviszonyait vizsgáljuk meg.

Energiaátalakulások egydimenziós mechanikai rezgésnél

Egy D állandójú rugalmas erő hatására az x-tengely mentén rezgő m tömegpont energiája

$$E = E_h + E_m = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2.$$

Írjuk be az összefüggésbe a helykoordináta- és a sebesség

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v_x(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) = v_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

időfüggését ($v_m = \omega_0 A$ a sebesség maximális értéke). Ekkor az időfüggő helyzeti- és mozgási energia összegére azt kapjuk, hogy

$$E(t) = \frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mv_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

A sebesség maximális értéke és a rezgés amplitúdója közötti kapcsolat: $v_m^2 = \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{m} D^2 A^2$ (itt felhasználtuk a $D = m\omega_0^2$ összefüggést). Ezzel a teljes energia az alábbi alakba írható:

$$E(t) = \frac{1}{2} DA^2 \left(sin^2(\omega_0 t + \varphi) + cos^2(\omega_0 t + \varphi) \right) = \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 = állandó .$$

Eszerint a rezgés során mind a helyzeti-, mind pedig a mozgási energia változik, de ez csupán helyzeti energia ⇔ mozgási energia átalakulásokat jelent, miközben a két energia összege mindig ugyanannyi.

Fontos eredmény, hogy a rezgő tömegpont energiája a rezgés amplitúdójával szoros összefüggésben áll, az egyik mennyiség egyértelműen meghatározza a másikat. Az összefüggés jellegzetessége az, hogy az energia arányos az amplitúdó- vagy a sebességamplitúdó négyzetével.

A csillapodó rezgés

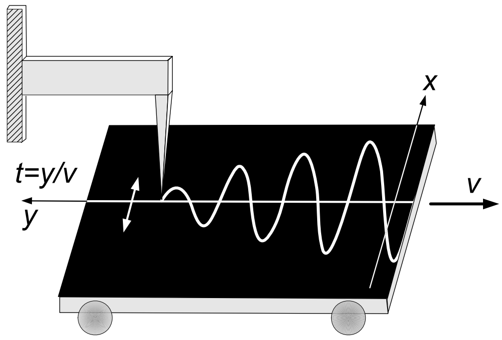
Az előbb tárgyalt rezgések mindegyike ideális rezgés, mert a rezgés során nincs energiaveszteség. A valóságos rezgéseknél a mechanikai energia a rendszerből fokozatosan eltávozik, amiből – az energiára vonatkozó előbbi megállapításaink alapján – következik, hogy a rezgés amplitúdója is csökken. Az ilyen csökkenő amplitúdójú rezgéseket *csillapodó* (vagy *csillapított*) *rezgéseknek* nevezik.

Csillapodó, egydimenziós mechanikai rezgés

A mechanikai rezgéseknél a csillapodás azt jelenti, hogy a rezgő tömegpont maximális kitérései egyre csökkennek, és a rezgés előbb-utóbb megszűnik. Ezt a jelenséget könnyű kísérlettel is bemutatni, hiszen a szabad rezgések kisebb-nagyobb mértékben mindig csillapodnak.

KÍSÉRLETEK:

- Ha a kormozott üveglappal korábban elvégzett kísérletben a kormot karcoló tűt úgy állítjuk be, hogy erősebben súrlódjon, akkor a rezgés jól láthatóan csillapodóvá válik (ábra).
- Ha egy rugón függő testet folyadékba merítve rezgetünk, akkor rezgése a nagy közegellenállás miatt erősen csillapodik.



A csillapodó rezgés sajátságait kísérletekkel fel lehet deríteni, de a kitérés időfüggését – legalábbis egyszerűbb esetekben – fizikai meggondolásokkal elméletileg is meg lehet határozni. Ehhez azt kell figyelembe venni, hogy a csillapodás oka mindig az, hogy a rezgést létrehozó rugalmas erő mellett egy a rezgést fékező, csillapító erő (F_{cs}) is működik. Ennek megfelelően az x-tengelyen rezgő tömeg mozgásegyenlete ilyenkor

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) + F_{cs} .$$

Az egyik leggyakoribb ilyen erő egy közegben mozgó testre ható közegellenállás, ami *gyakran arányos a mozgás sebességével*, és azzal ellentétes irányú:

$$F_{cs} = -kv_x(t) = -k\frac{dx(t)}{dt}.$$

Most egy ilyen erő által csillapodó rezgést vizsgálunk meg.
Ennek a csillapító erőnek a figyelembe vételével a rezgő test mozgásegyenlete az alábbi alakba írható

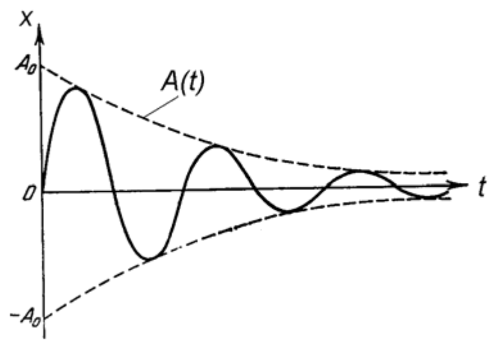
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) - k\frac{dx(t)}{dt}.$$

Végigosztva m-mel, felhasználva az $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ összefüggést, és bevezetve a $2\beta = \frac{k}{m}$ jelölést, végül a

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\beta\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2x(t) = 0$$

differenciálegyenletet kapjuk, ami szemmel láthatóan nem harmonikus rezgés egyenlete (az egyenletben megjelent a függvény első deriváltja is). Ez az eredmény várható volt, hiszen a csillapító erő miatt a rezgés amplitúdója csökken, a csökkenő amplitúdójú rezgés pedig nem írható le egyetlen harmonikus függvénnyel.
A fenti egyenlet matematikai megoldása nem egyszerű feladat, ezért itt az ún. *próbafüggvény* eljárást alkalmazzuk. Ennek lényege az, hogy a kísérleti tapasztalatok alapján megpróbáljuk kitalálni a megoldást, majd ezt a feltételezett megoldást az egyenletbe behelyettesítjük, és megnézzük, hogy milyen feltételek mellett lesz ez valóban megoldás.

A csillapodó rezgésre vonatkozó kísérletek alapján felrajzolhatjuk egy ilyen rezgés jellegzetes kitérés-idő függését, amit sematikusan az alábbi ábra mutat. Az ábrán szaggatott vonallal az amplitúdó időbeli változását ($A(t)$) is feltüntettük.



A kísérleti görbék (sebességgel arányos csillapító erő esetén) azt sugallják, hogy a kitérés időfüggése tulajdonképpen egy torzított harmonikus függvény, amely egy időfüggő (időben csökkenő) amplitúdó és egy harmonikus függvény szorzata:

$$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi).$$

A kísérletek alapján ennél konkrétabb feltevéssel is élhetünk, ugyanis a tapasztalat szerint a sebességgel arányos csillapító erő esetén az amplitúdó csökkenése jól leírható egy exponenciális függvénnyel: $A(t) = A_0e^{-at}$. Itt a egyelőre ismeretlen állandó. Ezzel a feltételezett megoldás az

$$x(t) = A_0e^{-at}\sin(\omega t + \varphi)$$

alakot ölti. A probléma csak az, hogy nem tudjuk az a állandó értékét, és azt sem, hogy mennyi a harmonikus rész ω körfrekvenciája. Ahhoz, hogy kiderüljön, hogy egy ilyen függvény valóban lehet megoldása a rezgést leíró differenciálegyenletnek, be kell helyettesíteni az egyenletbe. Ebből az is kiderül, hogy milyen a és ω érték mellet lehet megoldás a fenti függvény.

******************* ******************* ******************

A behelyettesítéshez ki kell számítani a függvény deriváltjait:

$$\frac{dx}{dt} = -A_0 a e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) + A_0 e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A_0 a^2 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) -$$
$$- A_0 e^{-at} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Ezeket és az eredeti $x(t)$ függvényt behelyettesítve a differenciálegyenletbe, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$A_0 a^2 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) - A_0 a e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) -$$
$$- A_0 e^{-at} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) - 2\beta A_0 a e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) + 2\beta A_0 e^{-at} \omega \cos(\omega t + \varphi) +$$
$$+ \omega_0^2 A_0 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi) = 0.$$

Rendezzük az egyenletet az alábbi módon:

$$(A_0 a^2 e^{-at} - A_0 e^{-at} \omega^2 - 2\beta A_0 a e^{-at} + \omega_0^2 A_0 e^{-at}) \sin(\omega t + \varphi) +$$
$$+ (-A_0 a e^{-at} \omega - A_0 a e^{-at} \omega + 2\beta A_0 e^{-at} \omega) \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Az egyenlet baloldalán szereplő kifejezésnek *mindig* nullával kell egyenlőnek lenni, ami – tekintve, hogy az időfüggő *cos* és *sin* függvények *0* és *1* között bármilyen értéket felvehetnek – csak úgy teljesülhet, ha ezeknek a függvényeknek a szorzója nulla, vagyis

$$A_0 a^2 e^{-at} - A_0 \omega^2 e^{-at} - 2\beta A_0 a e^{-at} + \omega_0^2 A_0 e^{-at} = 0$$
$$- A_0 a e^{-at} \omega - A_0 a \omega e^{-at} + 2\beta A_0 e^{-at} \omega = 0.$$

Egyszerűsítés után ebből az a és ω állandókra az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$a^2 - \omega^2 - 2\beta a + \omega_0^2 = 0$$
$$-2a\omega + 2\beta\omega = 0.$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a = \beta = \frac{k}{2m}.$$

vagyis az exponenciálisan csökkenő amplitúdó kitevőjében szereplő állandó éppen a csillapítást meghatározó állandóval arányos.
Ezt felhasználva, az első egyenletből megkapjuk a harmonikus rész körfrekvenciáját:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

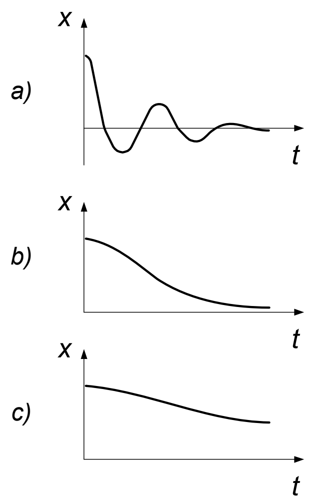
******************* ******************* ******************

A feltételezett megoldásnak a differenciálegyenletbe való behelyettesítésével valóban megkapjuk a keresett két állandót, és ezzel a megoldás

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

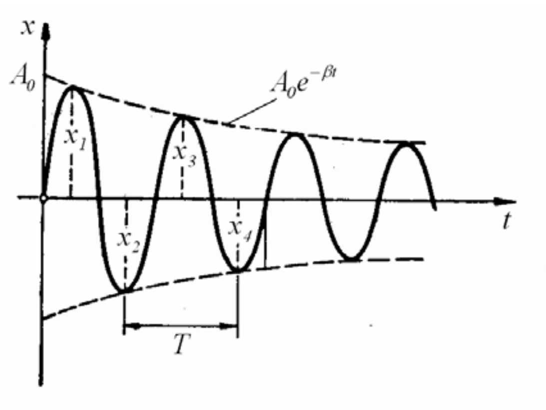
ahol $\beta = \frac{k}{2m}$ és $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Eszerint az idővel exponenciálisan csökkenő amplitúdó kitevőjében szereplő állandó éppen a csillapítást meghatározó k állandóval arányos, a harmonikus rész körfrekvenciája pedig kisebb, mint a tömegpont csillapítatlan, harmonikus rezgésének megfelelő ω_0 körfrekvencia.
Ez a megoldás visszaadja a csillapodó rezgés kísérletekből már ismert sajátságait: minél nagyobb a csillapításra jellemző β állandó (vagyis minél nagyobb a csillapítás), annál gyorsabban csökken a rezgés amplitúdója, és annál nagyobb a rezgés körfrekvenciájának eltérése a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájától. Nagyon kis β érték (kis csillapító hatás) esetén a rezgés közelítőleg harmonikus,

körfrekvenciája közelítőleg megegyezik az ideális, csillapítatlan rezgés körfrekvenciájával.
Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás csak akkor érvényes, ha a csillapítás nem túl nagy. Ez a körfrekvencia kifejezéséből látszik, hiszen fizikailag értelmes körfrekvenciát csak akkor kapunk, ha a csillapítást jellemző $\beta = \frac{k}{2m}$ állandóra fennáll a $\beta^2 < \omega_0^2$ feltétel. Ha ez nem teljesül, akkor nem alakul ki több periódusból álló – szokásos értelemben vett – rezgés.
A csillapítás különböző eseteit kísérletekkel vizsgálva, három jellegzetes esetet találunk, amelyeket a mellékelt ábrán szemléltetünk. Az *a)* ábra a $\beta^2 < \omega_0^2$ esetnek megfelelő csillapodó rezgést mutat, a *b)* ábrán az ún. *aperiodikus határesetet* látjuk, amikor rezgés már éppen nem jön létre, vagyis a szélső helyzetből induló tömegpont az egyensúlyi helyzet másik oldalára már nem tér ki (ez a $\beta = \omega_0 \;\Rightarrow\; \omega = 0$ esetnek felel meg), a *c)* ábra pedig a nagy csillapításnak ($\beta^2 > \omega_0^2$) megfelelő *aperiodikus mozgást* mutatja, amikor a kitérés nagyon lassan közeledik az egyensúlyi helyzet felé.



******************** ******************** *******************
A csillapodó rezgés fenti differenciálegyenlete mindenféle fizikai megfontolás nélkül, pusztán matematikai módszerekkel is megoldható. A számolás eredménye ugyanaz, mint amit a fenti – kevésbé egzakt módszerrel – kaptunk. A matematikai megoldásból kijön az aperiodikus határeset és az aperiodikus mozgás időfüggése is.
******************** ******************** *******************

A rezgések csillapodása gyakorlati szempontból is fontos jelenség (nem kívánatos rezgésnél a gyors csillapodás, szándékosan előidézett rezgésnél a lassú csillapodás elérése a cél), ezért a csillapodás jellemzésére a β állandó mellett egyéb – többnyire szemléletes – mennyiségeket is bevezettek. Az egyik ilyen jellemző a *K csillapodási hányados*, amely két egymás utáni rezgési amplitúdó hányadosa (ábra):



$$K = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} = \frac{x_n}{x_{n+2}} = \frac{e^{-\beta t_n}}{e^{-\beta(t_n+T)}} = e^{\beta T}\,.$$

Gyakran használják a csillapodási hányados természetes logaritmusát, az ún. *logaritmikus dekrementumot* is:

$$\Lambda = \ln K = \beta T\,.$$

A harmonikus rezgés vizsgálatánál láttuk, hogy a rezgés energiája és amplitúdója között szoros összefüggés áll fenn:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 .$$

Ha az amplitúdó időben változik, akkor ennek megfelelően változik a rezgés energiája is. A csillapodó rezgésnél a súrlódás jellegű fékező erő miatt csökkenő rezgési energia időfüggését az amplitúdócsökkenés segítségével kaphatjuk meg:

$$E(t) = \frac{1}{2} D A^2(t) = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t} ,$$

ahol $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$, a rezgés kezdeti energiája. Látható, hogy a sebességgel arányos csillapító erő esetén a rezgési energia is exponenciálisan csökken.

Ha a kis csillapítású rendszert tekintjük „jónak”, akkor a rezgő rendszer annál jobb, minél lassabban fogy az energiája. Ezért a rendszer jóságát jellemezni lehet az energia csökkenési sebességével, amit a

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E$$

mennyiség ad meg. Látható, hogy ez a mennyiség a csillapításra jellemző β-val arányos. A rendszer jóságának jellemzésére azonban ez a mennyiség mégsem használható, mert függ a rendszer aktuális energiájától is. Ezért erre a célra a relatív energiaváltozási sebességet használják, amelynek segítségével definiálják a rezgő rendszer *jósági tényezőjét* ($\tilde{Q}$).

A definíció szerint a jósági tényező a teljes rezgési energia és az *1 radián* fázisszög-változás alatt bekövetkező energiaveszteség hányadosa. Az *1 radián* fázisszög-változás $\Delta t = \frac{1}{2\pi} T$ idő alatt következik be (T a periódusidő), így az erre az időre eső energiaveszteség nagysága kis csillapításnál ($\omega \approx \omega_0$) közelítőleg

$$\left|\Delta E_{1rad}\right| \approx \left|\frac{dE}{dt}\right| \Delta t = \left|\frac{dE}{dt}\right| \frac{T}{2\pi} = \frac{2\beta T E}{2\pi} = \frac{2}{\omega} \beta E \approx \frac{2\beta E}{\omega_0} .$$

Ezzel a $\tilde{Q}$ jósági tényezőre azt kapjuk, hogy

$$\tilde{Q} = \frac{E}{\left|\Delta E_{1rad}\right|} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} .$$

Látható, hogy az így definiált jósági tényező – az eredeti céllal összhangban – annál nagyobb, minél kisebb a csillapítás (β).

A jósági tényező kapcsolatba hozható a logaritmikus dekrementummal is, hiszen

$$\tilde{Q} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T_0} = \frac{\pi}{\Lambda} .$$

Végül, ha a β csillapítást a rendszer adataival fejezzük ki, akkor a

$$\tilde{Q} = \frac{m\omega_0}{k}$$

kifejezést kapjuk.