A négydimenziós téridő

A Galilei transzformáció az időt nem transzformálja, az időadatok a térkoordinátáktól függetlenek. Ezzel szemben a Lorentz-transzformáció az időt is transzformálja, az idő- és térkoordináták egymással igen szoros, kölcsönös kapcsolatban vannak. Ez az oka annak, hogy a relativitáselméletben egy adott pontban, adott időben lezajló esemény jellemzésére a három térkoordinátához negyedikként az időt is hozzávették, és a jellemzésre az (x, y, z, t) mennyiségeket használják.
Ennek alapján formálisan bevezethető egy *négydimenziós téridő*, aminek – mint később látni fogjuk – a jelenségek tárgyalásánál számos előnye van. Az (x, y, z, t) adatokat tekinthetjük egy *esemény koordinátáinak* a téridőben, vagyis egy esemény a négydimenziós téridőben egy pontnak felel meg. Ha az időadatot megfelelően választjuk meg, akkor az így kapott négy komponensű mennyiség egy négydimenziós vektor lesz, amit *négyesvektornak* neveznek.

Invariáns intervallumnégyzet, négyesvektorok

A fizikában a 3 dimenziós térben a vektor mintájául a helyzetvektor szolgált, és vektornak neveztünk minden olyan három komponenssel megadott mennyiséget, amelynek komponensei a koordinátarendszer elforgatásakor úgy transzformálódnak, mint a helyzetvektor koordinátái. A skaláris mennyiségek értéke nem függ a koordinátarendszer választásától. Ennek a következménye az, hogy két vektor skaláris szorzata és két pont Δs távolságának négyzete invariáns a koordináta-transzformációval szemben:

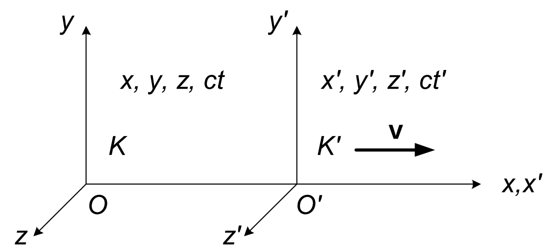
$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta s'^2 .$$

Ennek mintájára a négyes „állapotvektort” úgy definiálhatjuk, hogy a vektor komponensei a Lorentz-transzformációval transzformálódjanak, és két esemény közötti „négydimenziós távolság” (intervallum) négyzete invariáns legyen a Lorentz-transzformációval szemben.
Alább bebizonyítjuk, hogy az (x_1, y_1, z_1, t_1) és (x_2, y_2, z_2, t_2) négydimenziós eseményekre felírt

$$\Delta s^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

ún. *intervallumnégyzet* vagy *négyes távolságnégyzet* invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. Ennek alapján negyedik koordinátának az időt tartalmazó, de távolság jellegű *ct* mennyiséget választhatjuk.

Vizsgáljuk meg az intervallumnégyzet invarianciáját a speciálisan választott *K* és *K’* koordinátarendszerekben, amelyeknek közös az *x*-tengelye, párhuzamos az *y*- és *z*-tengelye, és a *K’* rendszer *v* sebességgel mozog a *K*-hoz képest a pozitív *x*-tengelyek irányában (ábra).



Tegyük fel, hogy a *K*-ban rögzített helyen bekövetkezik két esemény, amelyeknek négyes-koordinátái x_1, y_1, z_1, ct_1 és x_2, y_2, z_2, ct_2. Ugyanezen két eseményt a *K’* rendszerben az x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1 és x'_2, y'_2, z'_2, ct'_2 adatok jellemzik. A megváltozások a két rendszerben:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta x' = x'_2 - x'_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \Delta y' = y'_2 - y'_1$$
$$\Delta z = z_2 - z_1 \qquad \Delta z' = z'_2 - z'_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad \Delta t' = t'_2 - t'_1 .$$

A koordinátarendszerek speciális választása miatt

$$\Delta y = \Delta y'$$
$$\Delta z = \Delta z'.$$

Írjuk fel az intervallumnégyzet fenti kifejezését a *K'* rendszerben és transzformáljuk át a *K*-ba a

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x - \frac{v}{c}(c\Delta t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad c\Delta t' = \frac{c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lorentz-transzformációval.
Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(c\Delta t')^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \frac{\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\left(\Delta x - \frac{v}{c}(c\Delta t)\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= \frac{(c\Delta t)^2 - 2\Delta t v \Delta x + \frac{v^2}{c^2}\Delta x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\Delta x^2 - 2\Delta x v \Delta t + \frac{v^2}{c^2}(c\Delta t)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$= \frac{(c\Delta t)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \Delta x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 .$$

Ez azt jelenti, hogy valóban igaz, hogy a Δs^2 intervallumnégyzetre (vagy távolságnégyzetre) fennáll, hogy

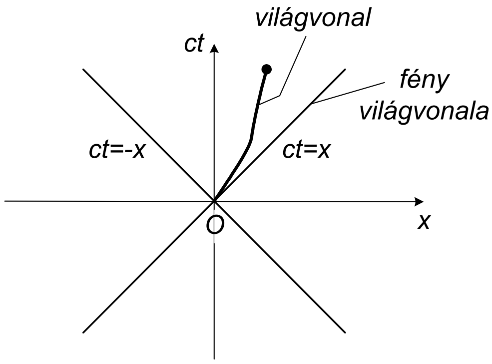
$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = invariáns .$$

Azt, hogy a négydimenziós tér vagy gyakori elnevezéssel *négydimenziós világ* nem egészen olyan, mint a közönséges három dimenziós tér, többek között az mutatja, hogy az *intervallumnégyzet lehet negatív* is.

A *K* rendszerben érvényes x, y, z, ct számnégyes négyesvektort alkot, és az ennek megfelelő *K'* rendszerbeli négyesvektort a Lorentz-transzformációval kapjuk meg. Ennek mintájára *négyesvektor* minden olyan mennyiség, ami a koordinátarendszer megváltoztatásakor a *Lorentz-transzformációval transzformálódik.* Ebből a meghatározásból következik, hogy két négyesvektor skalárszozata is invariáns.

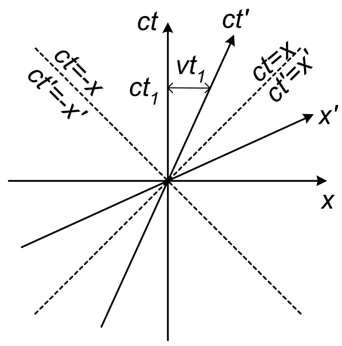
Állapotváltozás a négyes térben, sajátidő

Ha az eseményeket az eddig használt speciális koordinátarendszerekben vizsgáljuk, akkor lényegében a négyes térnek – vagy ahogy gyakran nevezik, a *négyes világnak* – egy síkjában vagyunk. Ezen a síkon egy esemény egy pontnak felel meg, az események egymásutánja egy vonalat rajzol ki, amit az adott változás (mozgás) *világvonalának* neveznek. A világvonalat ábrázolhatjuk a *ct–x* koordinátarendszerben. A mellékelt ábrán egy ilyen koordinátarendszer látható, amelyben feltüntettük egy önkényesen választott változás világvonalát, és a *fény világvonalát*, amely az $x = \pm ct$ összefüggésnek megfelelően egyenes (négy dimenzióban ez egy kúpfelület, amit *fénykúpnak* neveznek). A fény világvonala a különböző inerciarendszerekben ülő megfigyelők számára ugyanaz.



Ehhez hasonlóan, egy állandó sebességgel mozgó tömegpont világvonala egyenes.
Azok az események, amelyeknek világvonala párhuzamos a *ct*-tengellyel, azonos helyen (de különböző időpontokban) játszódnak le, azok pedig, amelyeknek világvonala párhuzamos az *x*-tengellyel, azonos időben (de különböző helyeken) zajlanak.

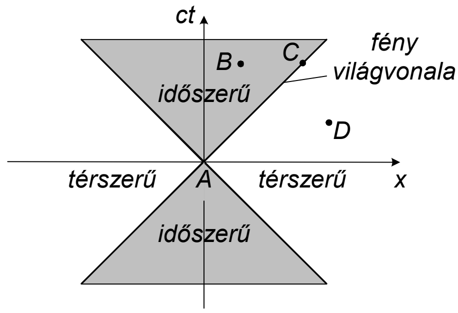
Ebben az ábrázolási módban a fenti *K* rendszerhez képest a szokásos speciális, *v* sebességgel mozgó *K'* rendszer az ábrán látható módon helyezkedik el. A *t'* tengely helyzetét az ábrán feltüntetett eljárással kapjuk, az *x'* tengely helyzetét pedig úgy kell megválasztani, hogy a fény világvonala ugyanaz maradjon, és érvényes legyen rá az $x' = ct'$ összefüggés.



A négyes világnak különböző jellegű tartományai vannak. Ezeket úgy lehet osztályozni, hogy meghatározzuk, hogy milyen az előjele egy vonatkoztatási eseményt (az ábrán *A*) és a vizsgált tartományba eső eseményt összekötő

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

intervallumnégyzetnek.
Az ábrán feltüntetett *B*, *C* és *D* események az *A* eseményhez és a fény világvonalához képest különböző helyzetben vannak, és az említett intervallumnégyzetek eltérő jellegűek.



A *B* eseményre, és minden olyan eseményre, amely a szürke fénykúp-tartományokban van, fennáll, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 > 0 .$$

Ezekhez az eseményekhez lehet találni olyan – az eredetihez képest állandó sebességgel mozgó – koordinátarendszert, amelyben az *A* és a kérdéses (pl. *B*) esemény azonos helyen van, csak az időpontjuk más. (Ez azt jelenti, hogy a *ct'* tengely átmegy az *A* és *B* ponton). Ekkor az eseményeket az időpontjuk szerint lehet szétválasztani, ezért ezt a tartományt *időszerűnek* nevezik.
A *C* eseményre, és minden olyan eseményre, amely a fény világvonalán (a fénykúpon) van, érvényes, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 = 0 .$$

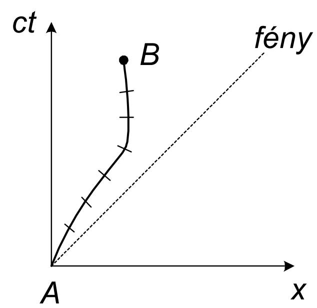
Az ilyen eseményeket, amelyek a fény (elektromágneses hullám) terjedésével kapcsolatosak, *fényszerűnek* nevezik.

Végül a D eseményre, és minden olyan eseményre, amely a szürke fénykúp-tartományokon kívül van, fennáll, hogy

$$\Delta s_{AB}^2 < 0 \, .$$

Ezekhez az eseményekhez lehet találni olyan – az eredetihez képest állandó sebességgel mozgó – koordinátarendszert, amelyben az A és a kérdéses (pl. D) esemény azonos időben zajlik, csak a helyük más. (Ez azt jelenti, hogy az x' tengely átmegy az A és D ponton). Ekkor az eseményeket a helyük szerint lehet szétválasztani, ezért ezt a tartományt *térszerűnek* nevezik.

Ha az esemény egy tömegpont mozgása, akkor a négyes térben ábrázolva a mozgás olyan pontok összessége, amelyek mindegyike azt adja meg, hogy adott időben a pont hol van. Ezek a pontok kirajzolják a tömegpont világvonalát (az ábrán AB).



Mivel a tömegpont sebessége változhat, a tömegponthoz nem rendelhető hozzá egyetlen inerciarendszer, hanem a pillanatnyi sebességének megfelelően mindig más és más inerciarendszerben van nyugalomban. Ilyenkor a tömegponthoz rendelhető sajátidő a mozgás során állandóan változik, ezért a világvonalat elemi szakaszokra kell bontani (ábra), és a sajátidőt ezekre kiszámítani. Ezt az *elemi sajátidőt* a ds^2 invariáns intervallumnégyzet segítségével a

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c}$$

összefüggéssel kapjuk meg. A kifejezésből látható, hogy az *elemi sajátidő is invariáns*, hiszen az invariáns intervallumnégyzet gyökéből egy invariáns skalárral (c) való osztással kaptuk.

A kifejezést átrendezve azt kapjuk, hogy

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = dt\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}} \, .$$

Ebből a teljes AB változásra vonatkozó *invariáns makroszkopikus sajátidőt* az elemi sajátidők összegzésével kapjuk:

$$\tau = \int_A^B dt\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2(t)}{c^2}} \, .$$

A relativisztikus dinamika alapjai

A klasszikus fizikában van néhány alapvető fontosságú mennyiség, amelyre megmaradási tétel érvényes. Ilyen például az energia és az impulzus (lendület). Felmerül a kérdés, hogy a relativisztikus mechanikában vannak-e ezeknek a mennyiségeknek megfelelő megmaradó mennyiségek, és ezek hogyan definiálhatók.

Az energia és impulzus relativisztikus alakját a korábban bevezetett négyesvektorok segítségével formálisan nagyon egyszerűen megkaphatjuk.

Vizsgáljunk egy mozgó tömegpontot, amelynek a tömegponthoz rögzített rendszerben mért ún. *nyugalmi tömege* m_0. A tömegpont mozgásának jellemzésére vezessünk be egy új négyesvektort úgy, hogy a cdt, dx, dy, dz mennyiségeket a $\frac{m_0}{d\tau}$ invariáns skalárral megszorozzuk (itt c a vákuumbeli fénysebesség, $d\tau$ az elemi sajátidő). Ekkor az

$$\frac{m_0 cdt}{d\tau};\quad \frac{m_0 dx}{d\tau};\quad \frac{m_0 dy}{d\tau};\quad \frac{m_0 dz}{d\tau}$$

mennyiségeket kapjuk. Felhasználva a $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v_{pill}^2}{c^2}}$ összefüggést, és azt, hogy $\frac{dx}{dt} = v_x;\ \frac{dy}{dt} = v_y;\ \frac{dz}{dt} = v_z$, végül az

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v_{pill}^2}{c^2}}};\quad \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v_{pill}^2}{c^2}}};\quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v_{pill}^2}{c^2}}};\quad \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v_{pill}^2}{c^2}}}$$

négyesvektort kapjuk.

Az impulzus (lendület), a tömeg és a mozgásegyenlet

Ha megvizsgáljuk a fent bevezetett új négyesvektornak az utolsó három komponensét, akkor azonnal látszik, hogy ezek a $v_{pill} << c$ nem relativisztikus esetre való áttérésnél a közönséges impulzusvektor

$$p_x = m_0 v_x^2;\quad p_y = m_0 v_y^2;\quad p_z = m_0 v_z^2$$

három komponensét adják. Ennek alapján a relativitáselméletben az impulzust (lendületet) a

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggéssel definiálhatjuk. Eszerint a tömegnek az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

kifejezés felel meg.

Ez azt jelenti, hogy a tömeg függ attól, hogy a tömegpont milyen sebességgel mozog a megfigyelőhöz képest: a tömegpont tömegét mindig nagyobbnak találjuk, ha hozzánk képest mozog, mint ha hozzánk képest nyugalomban van. Erre a *relativisztikus tömegnövekedésre* is érvényes azonban, hogy csak a fénysebességet megközelítő sebességeknél számottevő, a $v<<c$ esetben visszakapjuk a klasszikus mechanika $m=m_0$ összefüggését. A tömegnövekedést több direkt kísérlet igazolja, de közvetve az a tény is, hogy a nagy sebességű részecskéket előállító gyorsítók csak akkor működnek, ha tervezésüknél figyelembe vették ezt az összefüggést.

A tömeg sebességfüggése alapján várható, hogy a dinamika alapegyenlete sem alkalmazható a szokásos **F**=*m***a** alakban. Valóban kimutatható, hogy a *mozgásegyenlet* a Lorentz-transzformációval szemben akkor invariáns, ha az

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

formában használjuk. A $v << c$ esetben ebből az alakból visszakapjuk a mozgásegyenlet szokásos alakját, hiszen ekkor a tömeg gyakorlatilag állandó: $m \approx m_0$, és így érvényes az $\mathbf{F} \approx m_0 \mathbf{a}$ egyenlet.

*************** ************** ***************

A relativisztikus mozgásegyenlet következményeit jól illusztrálja az állandó F erő hatására bekövetkező mozgás esete. Ha a kezdősebesség nulla, akkor a klasszikus mechanika szerint

$$v(t) = \frac{F}{m_0} t ,$$

tehát a sebesség az idővel arányosan növekedve tetszőlegesen nagy értéket vehet fel.
Az

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

relativisztikus mozgásegyenlet idő szerinti integrálásából viszont az

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggést kapjuk, amiből

$$v(t) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{(m_0 c)^2}{(Ft)^2}}}$$

adódik. A sebesség az idő előrehaladtával egyre lassúbb ütemben növekszik, és a $t \to \infty$ esetben a c határértékhez tart (nem pedig határtalanul nő).
Természetesen ha $v << c$, akkor

$$F \cdot t = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0 v ,$$

tehát visszakapjuk a klasszikus összefüggést.
A relativisztikus mozgásegyenlet fenti alakjának helyességét ugyancsak a nagysebességű részecskék előállítására szolgáló részecskegyorsítók működése igazolja, amelyeknek tervezésénél ezt a törvényt használják.

*************** ************** ***************

Az energia, a tömeg-energia összefüggés a relativitáselméletben

Annak érdekében, hogy a fent bevezetett négyesvektor első,

$$\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v_{pill}^2}{c^2}}}$$

komponensének fizikai értelmét kiderítsük, írjuk fel a klasszikus mechanika *munkatétel* néven ismert összefüggését, amely szerint egy tömegpontra ható erők eredőjének munkája a tömegpont mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_e \mathbf{dr} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{m2} - E_{m1} = \Delta E_m .$$

Ha a tömegpontnak *nincs helyzeti energiája*, akkor ez a

$$W_{12} = E_2 - E_1 = \Delta E$$

alakba írható, ahol E a teljes energia.
Számítsuk ki most ezt a munkavégzést a relativisztikus mechanikában, abban az egyszerűsített esetben, amikor a tömegpontra egyetlen **F** erő hat és ez párhuzamos a **v** sebességgel (egyenes vonalú mozgás). A tömegpontra ható **F** erő az *1* pontból a *2* pontba való átmenet során

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{d\mathbf{p}}{dt}d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{v}d\mathbf{p} = \int_1^2 v(p)dp$$

munkát végez.
A számítás elvégzéséhez meg kell határoznunk a $v(p)$ függvényt. Ezt a

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

összefüggés segítségével tehetjük meg:

$$p^2 - p^2\frac{v^2}{c^2} = m_0^2 v^2 \qquad p^2 = \left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)v^2 \qquad v^2 = \frac{c^2 p^2}{m_0^2 c^2 + p^2},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$v(p) = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}.$$

Behelyettesítve ezt a munka kifejezésébe, az integrálás könnyen elvégezhető, és az alábbi eredményt kapjuk

$$W_{12} = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_2^2} - c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy, ha nincs helyzeti energia, akkor a munkatétel alapján az energiának az

$$E(v) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

kifejezés felel meg.
Alkalmazva az impulzus relativisztikus kifejezését, ebből azt kapjuk, hogy

$$E(v) = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{\frac{m_0^2 c^2 - m_0^2 v^2 + m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

amiből következik, hogy

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nézzük meg most, hogy mit kapunk ebből a $v << c$ esetben. Vezessük be az $x = \frac{v^2}{c^2}$ változót, amelyre teljesül az $x << 1$ feltétel, így ha az $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ kifejezést az x változó szerint sorbafejtjük, akkor megállhatunk a második tagnál, tehát azt kapjuk, hogy $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1+\frac{1}{2}x$. Ennek megfelelően $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Ezzel az energiára a $v << c$ közelítésben az

$$E(v) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

összefüggést kapjuk, aminek megváltozása valóban a klasszikus mozgási energia megváltozásával egyenlő:

$$E(v_2) - E(v_1) = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_1^2 .$$

Eszerint az

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

illetve a tömegre vonatkozó $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ összefüggés felhasználásával kapható

$$E = mc^2$$

mennyiséget tekinthetjük *a tömegpont energiájának*. Ezzel a tömegponton végzett munka a

$$W_{12} = m_2c^2 - m_1c^2 = \Delta\left(mc^2\right) = c^2\Delta m$$

alakban írható fel.
Figyelemre méltó, hogy az energia megváltozása a tömeg megváltozásából adódik, hiszen az $E = mc^2$ összefüggés szerint az energia a test tömegével van egyértelmű kapcsolatban. Ebből következik, hogy m tömeg egyben mc^2 energiatartalmat jelent, és fordítva, minden E energiatartalom E/c^2 tömeggel (tehetetlenséggel) jár együtt.
Az összefüggésből az is következik, hogy egy rendszerben az energia és a tömeg változása mindig együtt, egymással arányosan történik a $\Delta E = c^2\Delta m$ összefüggésnek megfelelően.

A nyugalmi energia és a tömeghiány
A klasszikus közelítésben kapott

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$$

összefüggésből látszik, hogy a relativitáselméletben a klasszikus mozgási energiának megfelelő kifejezés:

$$E_m = mc^2 - m_0c^2 .$$

Ez az energia a $v=0$ esetben – a klasszikus mozgási energiához hasonlóan – nulla lesz.
Ezt a kifejezést és az energiára bevezetett $E = mc^2$ összefüggést felhasználva az energia az

$$E = E_m + m_0c^2$$

alakba írható. Ebből látható, hogy a relativitáselméletben egy nyugalomban lévő test ($E_m=0$) is rendelkezik

$$E_0 = m_0c^2$$

energiával, amit a test *nyugalmi energiájának* neveznek.
A tapasztalat azt mutatja, hogy ez a nyugalmi tömeghez rendelt sajátenergia nem pusztán matematikai konstans, hanem valóban fizikai realitással bír: a nyugalmi energia részben vagy egészben át tud alakulni másfajta energiává (pl. elektromágneses sugárzássá), s ilyenkor a nyugalmi tömeg is a $\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2$ összefüggésnek megfelelő módon változik meg. Ennek kísérletileg is ellenőrizhető esete az atommagok *tömeghiányával* kapcsolatos.
Az atommagok tömegének méréséből az derül ki, hogy egy atommag tömege kisebb, mint a magot alkotó szabad nukleonok (protonok és neutronok) tömegének összege. Ezt a tömegkülönbséget *tömeghiánynak* vagy idegen szóval *tömegdefektusnak* nevezik. Ha az atommag nyugalmi tömegét M_0-lal, a proton nyugalmi tömegét m_{p0}-lal, a neutronét m_{n0}-lal jelöljük, akkor az atommag tömeghiánya

$$\Delta m_0 = Nm_{n0} + Zm_{p0} - M_0$$

(Z protonok-, N a neutronok száma a magban).
A jelenséget a relativisztikus tömegformula segítségével lehet megmagyarázni, az atommag energiája ugyanis más kötött nukleonok esetén, mint nukleonokra szétszedett állapotában. Ennek oka a következő. Az atommagot alkotó nukleonok azért maradnak az atommagban, mert vonzzák egymást. Ez azt jelenti, hogy a magnak különálló nukleonokra való szétszedéséhez munkát kell végezni, tehát a nukleonokra szétszedett rendszer energiája nagyobb, mint az atommagé (a többlet a befektetett munkából származik). A kötött állapotban lévő rendszer (az atommagban kötött nukleonok) E_{mag} energiája-, és a szétszedett rendszer (szabad nukleonok) E_{nukl} energiája közti

$$\Delta E_k = E_{nukl} - E_{mag}$$

különbséget az illető atommag *kötési energiájának* nevezik.
Ennek alapján a nukleonok szabad és kötött állapota közti Δm_0 tömegkülönbség – a tömeghiány – a két állapot közti ΔE_k energiakülönbségnek felel meg, amit a

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2$$

összefüggéssel tudunk számszerűen is értelmezni.
Mivel az atommag és a nukleonok tömege is mérhető, ez az összefüggés módot ad az atommagok kötési energiájának egyszerű meghatározására:

$$\Delta E_k = \Delta m_0 c^2 = (Nm_{n0} + Zm_{p0} - M_0)c^2 .$$

A négyesimpulzus, az energia és az impulzus összefüggései
A fenti meggondolások szerint az energia és az impulzus három komponense, vagyis az

$$E = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mennyiségek négyesvektort alkotnak, amelyet gyakran *négyesimpulzusnak* neveznek. Ebből következik, hogy az

$$E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

mennyiség invariáns a Lorentz-transzformációval szemben.
Kimutatható, hogy egy *kölcsönhatások nélkül* mozgó tömegpontra a négyesimpulzus állandó, ami az jelenti, hogy

$$E = \textit{állandó} \quad \textit{és} \quad \mathbf{p} = \textit{állandó},$$

vagyis az energia- és impulzusmegmaradás törvénye egyetlen megmaradási törvénnyé olvad össze.
Emellett a tömegmegmaradás törvénye maga után vonja az energiamegmaradás törvényét is, ami az $E = mc^2$ összefüggésből következik.

Az energia bevezetésénél az energia és az impulzus nagyságának összefüggésére az

$$E = mc^2 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$$

kifejezést kaptuk. Vizsgáljuk meg ezt az összefüggést abban a speciális esetben, ha a vizsgált objektumnak *nincs nyugalmi tömege* (pl. elektromágneses sugárzás). Ekkor az energia és az impulzus között az

$$E = pc$$

összefüggés érvényes. Ezt az összefüggést az elektromágnességtan törvényeiből is le lehet vezetni, ami nem meglepő, hiszen a relativitáselmélet az elektromágnességtan törvényeit nem módosítja.

Az $E=mc^2$ és az $E = pc$ összefüggésekből következik, hogy egy nyugalmi tömeg nélküli objektum (pl. foton, lásd később) impulzusa csak

$$p = mc$$

lehet, vagyis csak fénysebességgel mozoghat.
A fordított állítás is igaz: egy fénysebességgel mozgó objektumnak nem lehet nyugalmi tömege. Ezt az $mc^2 = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$ és a $p = mc$ összefüggések felhasználásával láthatjuk be. A két összefüggésből kapott

$$mc^2 = c\sqrt{m_0^2c^2 + m^2c^2}$$

egyenlet négyzetre emelése után azt kapjuk, hogy

$$m^2c^4 = m_0^2c^4 + m^2c^4 ,$$

vagyis

$$m_0 = 0 .$$

A körfrekvencia-hullámszám négyesvektor
A négyesimpulzusból elemi kvantumelméleti összefüggések felhasználásával könnyen kaphatunk egy új négyesvektort, amit a hullámtanban használhatunk fel.
A kvantumelmélet szerint az elektromágneses hullámban terjedő fotonok energiájára és impulzusára az

$$E = h\omega; \qquad \mathbf{p} = h\mathbf{k}$$

összefüggések érvényesek, ahol ω a hullám körfrekvenciája, $\mathbf{k}$ pedig a hullámszámvektor. Így az

$$(E,\ \mathbf{p})$$

négyesvektorból az invariáns skalár h-val való osztással kapjuk az

$$(\omega,\ \mathbf{k})$$

négyesvektort.
Mivel a négyesvektorok skalárszorzata invariáns, az $(\omega,\ \mathbf{k})$ és a $(t,\ \mathbf{r})$ négyesvektorok skaláris szorzatára fennáll, hogy

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = invariáns .$$

Az így kapott mennyiség nem más, mint a hullámfüggvény argumentuma, ami ezek szerint különböző inerciarendszerekben azonos.