A speciális relativitáselmélet alapjai

A századforduló táján, amikor a mechanika és az elektromágnességtan alapvető törvényeit már ismerték, és a fizikát sokan „lényegében befejezett” tudománynak gondolták, olyan új tapasztalatok halmozódtak fel, amelyek fokozatosan megingatták ezt a képet. Ezek a tények a fizika több területén alapvető változásokhoz vezettek. Az egyik ilyen gyökeres, a fizika alapjait érintő szemléleti változás volt a *relativitáselmélet* létrejötte.

A relativitáselmélet lényegében abból a problémából nőtt ki, hogy milyen összefüggés van a fizikai jelenségek leírására használt törvények között egymáshoz képest mozgó rendszerekben. Attól függően, hogy a tárgyalás csak inerciarendszerekre korlátózódik vagy egymáshoz képest gyorsuló rendszerekre is kiterjed *speciális relativitáselméletről* vagy *általános relativitáselméletről* beszélünk. Most csak az inerciarendszerekre vonatkozó speciális elmélettel foglalkozunk.

A relativitás elve a klasszikus mechanikában

Egy test mozgásának leírása úgy történik, hogy annak mindenkori helyzetét egy többé-kevésbé önkényesen választott testhez, egy *vonatkoztatási rendszerhez* viszonyítva adjuk meg. A helyzet meghatározásához általában a vonatkoztatási rendszer egy pontjához rögzített *koordinátarendszert* veszünk fel, és a test mozgását jellemző adatokat megadjuk ebben a koordinátarendszerben.

Könnyen belátható, hogy ha ugyanazt a testet két különböző, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg, akkor a mozgását jellemző *adatok* egy részét (pl. helyzetvektor, sebesség, impulzus, energia) eltérőnek találjuk. Felmerül a kérdés, hogy az adatok közötti összefüggéseket megadó *fizikai törvények* is különbözőek-e a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Leegyszerűsítve: a kérdés az, hogy használhatja-e a robogó vonaton utazó megfigyelő ugyanazokat a fizikai törvényeket, amelyeket a Földhöz képest nyugvó laboratóriumban érvényesnek talált.

Foglalkozzunk egyelőre a vonatkoztatási rendszerek egy *speciális* fajtájával, amelyekben érvényes a „tehetetlenség törvénye” (Newton I. axiómája), vagyis teljesül az az állítás, hogy a magukra hagyott, más testekkel kölcsönhatásban nem álló testek mozgásállapota nem változik meg. Az ilyen rendszereket *inerciarendszereknek* nevezzük. A tapasztalat szerint egy inerciarendszerhez képest állandó sebességgel mozgó bármely másik rendszer is inerciarendszer, vagyis az inerciarendszerek egymáshoz képest állandó sebességgel mozoghatnak.

Számos tapasztalat sugallja azt, hogy a különböző inerciarendszerekből nézve a mechanikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le, és a különböző rendszerekben a mechanika törvényei azonos matematikai alakban érvényesek (természetesen csak akkor, ha adott rendszerben alkalmazva a törvényeket a bennük szereplő összes fizikai mennyiség helyébe ugyanabban a rendszerben mért adatokat helyettesítünk be). Ez a tapasztalatok alapján elfogadott alaptétel a *klasszikus mechanika relativitási elve*. A relativitás elvének fontos következménye, hogy az inerciarendszerek a mechanikai folyamatok leírása szempontjából egyenértékűek, vagyis mechanikai kísérletek segítségével nem lehet köztük különbséget tenni, így valamiféle „abszolút”, kitüntetett inerciarendszert sem lehet találni.

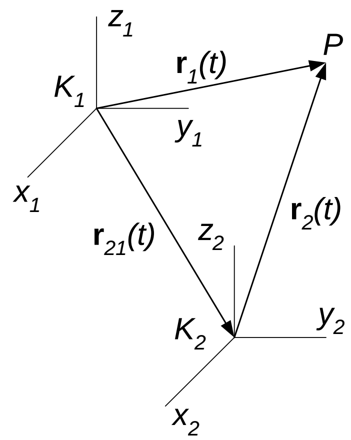
Ha egy test mozgását két egymáshoz képest mozgó K_1 és K_2 inerciarendszerből vizsgáljuk, akkor a test mozgását jellemző adatokra általában eltérő értékeket kapunk, de a két rendszerben mért adatok között összefüggések állnak fenn. Ezek az összefüggések a rendszerek egymáshoz viszonyított mozgása által meghatározott *koordináta-transzformációk*, amelyeknek ismeretében egy fizikai törvényt áttranszformálhatunk egyik rendszerből a másikba. Ez úgy történik, hogy pl. a K_1 rendszerben felírt fizikai törvényben szereplő fizikai mennyiségeket a transzformációs összefüggések segítségével kifejezzük a K_2 rendszer megfelelő mennyiségeivel, és így megkapjuk a kérdéses fizikai mennyiségek közötti összefüggést (a fizikai törvényt) a K_2 rendszerben. Ha ez az összefüggés matematikai alakját tekintve azonos a K_1 rendszerben felírt összefüggéssel, akkor azt mondjuk, hogy *a törvény invariáns az adott transzformációval szemben*. Ha a transzformációval szemben az összes fizikai törvény invariáns, akkor *a transzformáció összhangban van a relativitás elvével*.

Ha a relativitás elvét, mint tapasztalati tényt elfogadjuk, akkor csak vele összhangban álló transzformációt használhatunk. Elvileg elképzelhető, hogy olyan – fizikailag indokolható – transzformációt fogadunk el, amely nincs összhangban a relativitás elvével (a törvények alakja a transzformációnál megváltozik), ekkor azonban nem tarthatjuk fenn a relativitás elvét.

A relativitáselmélet egyik központi kérdése a relativitás elve és a koordinátatranszformáció közötti összefüggés.

A Galilei-transzformáció

A relativitás elve először a mechanikában vetődött fel, ahol a hétköznapi szemléleten alapuló *Galilei-transzformációt használták.* A transzformáció összefüggéseit a mechanikában már tárgyaltuk, itt emlékeztetőül az ábra alapján ismét bemutatjuk azokat.



Az ábrán látható P tömegpont mindenkori helyzetét a K_1 koordinátarendszerből a mindenkori $\mathbf{r}_1(t)$-, a K_2 rendszerből pedig a mindenkori $\mathbf{r}_2(t)$ helyvektorral adhatjuk meg (t az idő). Ha a két rendszer relatív helyzetét megadó vektor $\mathbf{r}_{21}(t)$, akkor a két rendszerben érvényes helyvektorok kapcsolata

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{21},$$

illetve

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{21}.$$

A továbbiakban általában ezt a második alakot használjuk.

Ha a K_2 rendszer a K_1-hez képest állandó $\mathbf{v}$ sebességgel mozog (inerciarendszerekről van szó), akkor

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0,$$

ahol r_0 a két rendszer origójának relatív helyzetét megadó vektor a $t = 0$ időpillanatban. Ezzel a helyzetvektorok kapcsolatát megadó összefüggés így alakul

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0,$$

ami a koordinátákkal kifejezve

$$x_2 = x_1 - v_x t - x_0$$
$$y_2 = y_1 - v_y t - y_0$$
$$z_2 = z_1 - v_z t - z_0$$
$$t_2 = t_1.$$

Ez a klasszikus mechanika Galilei-féle transzformációja.

A fenti gondolatmenet fontos mozzanata, hogy az időt nem transzformáltuk, azaz természetesnek vettük, hogy *a két rendszerben az idő azonos*:

$$t_2 = t_1.$$

A sebességek közötti összefüggés a helyvektorok kapcsolatát megadó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapható

$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{v}_1$ a vizsgált tömegpont K_1 rendszerbeli sebessége, $\mathbf{v}_2$ annak K_2 rendszerbeli sebessége. Vagyis a hétköznapi tapasztalattal egyezésben azt kapjuk, hogy ugyanazon test sebességét egymáshoz képest mozgó megfigyelők különbözőnek találják.

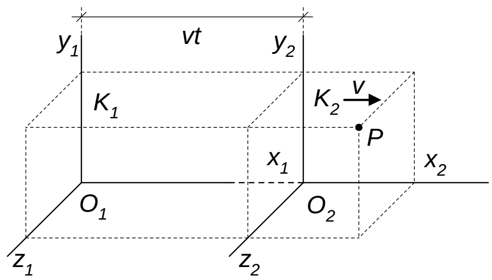
A gyorsulások összefüggését a sebességre vonatkozó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapjuk:

$$\mathbf{a}_2(t) = \mathbf{a}_1(t)\,.$$

A különböző inerciarendszerekből mért gyorsulások tehát azonosnak adódnak. Ez azt jelenti, hogy – a tapasztalattal összhangban – egy inerciarendszerhez képest egyenletesen mozgó rendszer szintén inerciarendszer.

Bebizonyítható, hogy a klasszikus mechanikában ez a transzformáció összhangban van a relativitás elvével, vagyis egy mechanikai törvényt áttranszformálva egyik rendszerből a másikba, az új rendszer adataival ugyanolyan alakú törvényt kapunk. A klasszikus mechanika törvényei tehát *invariánsak* a Galilei-transzformációval szemben.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az egymáshoz képest mozgó inerciarendszereknek egy speciális esetét vizsgáljuk (ábra). Feltételezzük, hogy a két rendszerhez rögzített koordinátarendszerek x_1 és x_2 tengelye közös, a K_2 rendszer a K_1-hez képest v sebességgel mozog a közös x_1-x_2 tengely mentén annak pozitív irányában, és az időt mindkét rendszerben attól a pillanattól mérjük, amikor a két origó (O_1 és O_2) azonos helyen volt (ekkor $t=t'=0$).



Ennél a speciális koordinátarendszer-választásnál a Galilei-transzformáció az

$$x_2 = x_1 - vt$$
$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = z_1$$
$$t_2 = t_1$$

alakot ölti.

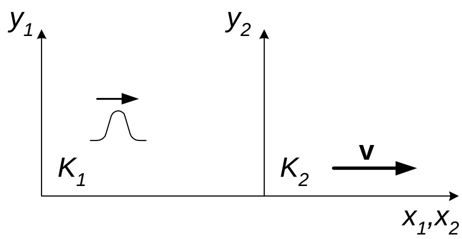
A sebesség-transzformáció összefüggései ekkor:

$$v_{2x} = v_{1x} - v$$
$$v_{2y} = v_{1y}$$
$$v_{2z} = v_{1z}\,.$$

Végül a gyorsulásokra azt kapjuk, hogy

$$a_{2x} = a_{1x}$$
$$a_{2y} = a_{1y}$$
$$a_{2z} = a_{1z}\,.$$

A Galilei-transzformáció egyszerű alkalmazásaként nézzük meg, hogy hogyan változik meg a hang terjedési sebessége, ha azt a közeghez képest állandó sebességgel mozgó koordinátarendszerben mérjük. Ismét a speciális koordinátarendszer-választást használjuk (ábra), feltételezzük, hogy a K_1 rendszer a közeghez képest nyugalomban van, és a hangforrás is nyugszik a közeghez képest, így K_1-hez képest is. A



K_2 rendszer a benne ülő megfigyelővel együtt v sebességgel mozog a K_1-hez képest a pozitív x-tengelyek irányában.

A forrásból egy hangimpulzus indul el, amelynek terjedési sebessége a K_1 rendszerben v_1. Jelöljük a hang terjedési sebességét a K_2 rendszerben v_2-vel, akkor a

$$v_{2x} = v_{1x} - v$$

Galilei-transzformáció szerint a K_2 rendszerben a hang sebessége:

$$v_2 = v_1 - v\,.$$

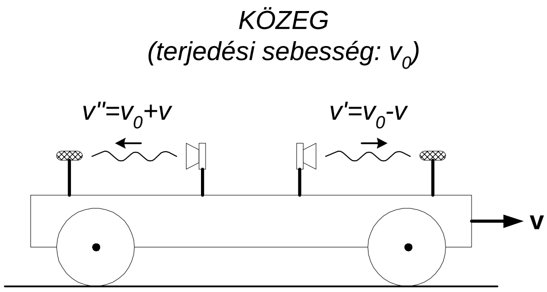
Vagyis – a tapasztalattal egyezően – a forrástól távolodó megfigyelő ($v > 0$) kisebb-, a forrás felé közeledő megfigyelő ($v < 0$) nagyobb hangsebességet észlel, mint a forráshoz (és a közeghez) képest nyugvó megfigyelő.

Mivel a hang terjedési sebessége függ a megfigyelő mozgásállapotától, a megfigyelőnek a hangot hordozó közeghez viszonyított sebessége hangsebesség-mérésekkel meghatározható (ábra). Ha egy mozgó járművön megmérjük a hang terjedési sebességét a közeghez (pl. levegő) képest, a jármű haladásának irányában (v') és vele ellentétes irányban (v''), akkor a járműnek a közeghez viszonyított sebességét (v) a

$$v'' - v' = 2v$$

összefüggésből kapjuk:

$$v = \frac{v'' - v'}{2}\,.$$



A fény terjedési sebessége és a relativitás elve az elektromágnességtanban

Az elektromágnességtan alapegyenletei, a Maxwell-egyenletek, a klasszikus fizikának ugyanolyan alapvető törvényei, mint a Newton-törvények. E törvények kidolgozása idején a fizikában a mechanikai szemlélet uralkodott, így az elektromos és mágneses jelenségeket is a mechanikai törvények mintájára próbálták értelmezni. Úgy gondolták, hogy létezik egy sajátos közeg, az *éter*, amely mindent kitölt, és az elektromágneses jelenségek ennek a közegnek a mechanikai jellegű állapotváltozásaival függnek össze.

Természetesnek tűnt, hogy a Maxwell-egyenletek az éterhez rögzített koordinátarendszerben érvényesek, és hogy a fény, mint elektromágneses hullám nem más, mint egy olyan zavar, amely ebben a közegben a rugalmas hullámokhoz hasonlóan terjed. Ennek megfelelően a vákuumban terjedő fény ismert $c = 299792\,km/s$ terjedési sebességét is az éterhez viszonyított sebességnek tekintették (az éter az akkori felfogás szerint a vákuumban is jelen van).

Ezzel a felfogással kapcsolatban két, egymással összefüggő probléma merült fel: az egyik a fény terjedési sebességével-, a másik az elektromágnességtan egyenleteinek mozgó rendszerben érvényes alakjával függ össze.

A fény terjedési sebessége egymáshoz képest mozgó rendszerekben

A rugalmas hullámok terjedési mechanizmusa viszonylag könnyen értelmezhető: a zavar ebben az esetben a közeg részei közötti rugalmas kapcsolatok miatt terjed. Más a helyzet az elektromágneses hullámok, és így a fény terjedésével kapcsolatban. Mint már említettük, kezdetben a fény terjedését ugyanúgy értelmezték, mint a mechanikai hullámokét. Feltételezték, hogy a fény az éterben a rugalmas hullámokhoz hasonlóan terjed, és a fény sebessége a nyugvó éterhez viszonyított sebességet jelent. A probléma az volt, hogy az éter jelenlétét nem sikerült kimutatni.

Maxwelltől származik az ötlet, hogy az éter létezését úgy lehetne kimutatni, hogy az éterhez képest mozgó Földön különböző irányban megmérik a fény terjedési sebességét. A Galilei-transzformáció szerint ugyanis az éterben mozgó Földön különböző irányban terjedő fény sebességét megmérve, az iránytól függően c-v és c+v közötti értékeket kapunk, ahol c a fénysebesség az éterben nyugvó rendszerben, v a Föld mozgási sebessége az éterhez képest. Ilyen mérésekkel – a hangterjedésre vonatkozó fenti mérés analógiájára – meg lehetne határozni a Föld mozgási sebességét az éterhez képest.

A mérést – amelyet a tudománytörténetben *Michelson–Morley-kísérlet* néven tartanak számon – először *Michelson*[1] majd később Michelson és *Morley*[2] végezték el. A mérés úgy történt, hogy egy kettéválasztott fénynyaláb két részét különböző utakon, különböző irányban vezették, majd interferenciát hoztak létre velük. Ezt az optikában azóta is használt Michelson-féle interferométerrel valósították meg. A mérés azon alapul, hogy a létrejött interferenciakép függ a két interferáló fénynyaláb terjedési sebességétől. A nyalábok sebességkülönbségét az eszköz egyetlen helyzetében nem lehet észlelni, ha azonban az eszközt elfordítják, akkor megváltoznak a terjedési sebességek, és az eredeti helyzetben létrejött interferenciakép megváltozik. Az akkori felfogás szerint ezt a változást megfigyelve, a Föld mozgási sebessége az éterben meghatározható.

---

[1] Albert Abraham MICHELSON (1852-1931)Nobel-díjas (1907) német származású amerikai fizikus.
[2] Edward Williams MORLEY (1838-1923) amerikai kémikus, fizikus.

A mérést több alkalommal, különböző körülmények között és különböző évszakokban (a Föld különböző haladási irányainál) elvégezték, az eszköz elfordításakor azonban *az interferenciaképben semmilyen változást nem észleltek*, annak ellenére, hogy a módszer elég pontos volt a várható csíkeltolódás észleléséhez.
A kísérlet értelmezése körül hosszú ideig viták voltak. Mai felfogásunk szerint a kísérlet eredménye azt jelenti, hogy a fény terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, *a fény terjedési sebessége különböző inerciarendszerekben ugyanaz* az érték, nem függ a rendszer mozgásállapotától.

Az elektromágnességtan és a relativitás elve

A fényterjedésre vonatkozó Michelson-féle eredmény felveti a következő problémát. Ha a fényre – ami elektromágneses jelenség – nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, akkor feltehetőleg az elektromágnességtan alaptörvényei, a Maxwell-egyenletek egymáshoz képest mozgó rendszerek közötti transzformációnál nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. A helyzet valóban ez, így felmerült az a kérdés, hogy mi az a transzformáció, amellyel szemben a Maxwell-egyenletek invariánsak.
A problémát először *Lorentz*[1] oldotta meg, aki megkereste ezt az – azóta róla elnevezett – transzformációt. A *Lorentz-transzformáció* összefüggései a korábban alkalmazott speciális koordinátarendszer-választás esetén (közös x-tengelyek, párhuzamos y- és z-tengelyek, a K_2 rendszer x-irányú, állandó v sebességgel mozog a K_1-hez képest) az alábbiak:

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(c a vákuumbeli fénysebesség). Ezzel a transzformációval később részletesen foglalkozunk, itt csak két dolgot érdemes megjegyezni. Az egyik az, hogy a Lorentz-transzformáció lényegesen különbözik a Galilei-transzformációtól, és könnyen belátható, hogy a Lorentz-transzformációval szemben a mechanika törvényei nem invariánsak. A transzformáció másik, talán legmeglepőbb sajátsága az, hogy *az idő sem azonos* a két rendszerben, azt is transzformálni kell.
A Lorentz-transzformáció felismerésével a fizikában keletkezett egy komoly elvi probléma. A fizika két nagy területén, a mechanikában és az elektromágnességtanban a relativitás elvével nem ugyanaz a transzformáció van összhangban, hanem a mechanika törvényei a Galilei-transzformációval- az elektromágnességtan törvényei pedig a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak.

[1] Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928) Nobel-díjas (1902) holland fizikus.

A relativitáselmélet posztulátumai és a Lorentz-transzformáció

A XX. század első éveire a következő helyzet alakult ki.

- Kísérletek erősítették meg azt a feltételezést, hogy a relativitás elve nem csak a mechanikában, hanem az elektromágnességtanban is érvényes, vagyis elektromos és mágneses kísérletekkel sem lehet két inerciarendszert egymástól megkülönböztetni.
- Szükségessé vált egy a fizika említett két területén egyaránt érvényes transzformáció, amely összhangban van a relativitás elvével, ehelyett a két területre két különböző transzformáció volt, amelyekkel szemben a maguk területén a fizikai törvények invariánsak.

Ha egységes transzformációt akarunk, akkor gyakorlatilag két lehetőségünk van:

- Elfogadjuk a „józan észnek" megfelelő Galilei-transzformációt, de ekkor hibásnak kell minősítenünk a Maxwell-egyenleteket. Az elektromágnességtan törvényeit tehát úgy kell átalakítanunk, hogy azok a Galilei-transzformációval szemben invariánsak legyenek.
- Elfogadjuk a Lorentz-transzformációt, de ekkor a mechanika törvényeit kell elvetnünk, és úgy átalakítanunk, hogy azok a Lorentz-transzformációval szemben invariánsak legyenek.

Mivel direkt tapasztalat mutatja, hogy a fényterjedésre nem érvényes a Galilei-transzformáció, célszerűnek látszott a második megoldást választani.

Az Einstein-féle posztulátumok és a relativitáselmélet

A XX. század első éveiben többen (Lorentz, Poincaré[1], Einstein) is eljutottak ahhoz a következtetéshez, hogy a Lorentz-transzformációt kell általános, a mechanikában is érvényes transzformációként elfogadni, és a mechanika törvényeit átdolgozni, de Einstein volt az, aki ezt a megoldást általános fizikai elmélet formájába öntötte. Ő vette észre, hogy a tapasztalati tényekkel egyező elmélet két alapvető fizikai elvből (posztulátumból) levezethető:

I. A fizikai folyamatokat leíró törvények minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek. Más szóval, minden fizikai folyamatra érvényes a *relativitás elve*.
II. A vákuumban terjedő *fény sebessége* minden inerciarendszerben azonos, *univerzális fizikai állandó*.

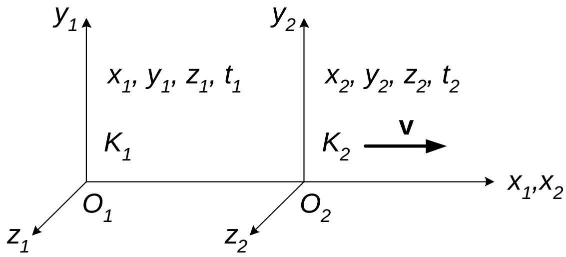
Ebből a két alapelvből levezethető a Lorentz-transzformáció, és segítségükkel elvégezhető a mechanika törvényeinek szükséges átalakítása. Az így létrejött, a fenti két elvvel összhangban álló fizikai elmélet a *speciális relativitáselmélet*. Nevében a „speciális" jelző arra utal, hogy csak speciálisan választott koordinátarendszerekben, nevezetesen inerciarendszerekben érvényes.
A fenti két alapelv elfogadása egyben azt is jelenti, hogy az „étert" nem tekinthetjük fényhordozó közegnek, hiszen a fénysebesség a mozgásállapottól független, és nem tekinthetjük valamiféle kitüntetett vonatkoztatási rendszernek sem, mivel a relativitás elve érvényes. Ezzel viszont elveszítette értelmét az éter létének feltételezése is.

---

[1] Jules Henri POINCARÉ (1854-1912) francia matematikus, elméleti fizikus.

A Lorentz-transzformáció

A Lorentz-transzformáció az Einstein-féle két alapelvből minden további feltevés nélkül levezethető. Itt a levezetést a korábban használt speciális, „egydimenziós" esetre végezzük el. Vizsgáljuk az ábrán látható két rendszert, amelyeknek *x*-tengelyei közösek, *y* és *z*- tengelyeik párhuzamosak egymással, és a K_2 rendszer $v_x = v$ sebességgel mozog a K_1 rendszerhez képest.



Egy esemény koordinátái (hely- és időadatai) a két rendszerben x_1, y_1, z_1, t_1 és x_2, y_2, z_2, t_2, a feladat a két koordináta-négyes közötti transzformációs összefüggés megkeresése.
Az összefüggést lineárisnak tételezzük fel

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta t_1$$
$$t_2 = \gamma x_1 + \delta t_1,$$

amit elsősorban a transzformáció egyértelműségének követelménye indokol, és az általánosság kedvéért transzformáljuk az időt is. Ezekben az összefüggésekben α, β, γ és δ meghatározandó konstansok, amelyek függhetnek a két rendszer v relatív sebességétől. Az általunk vizsgált speciális esetben a másik két koordinátára az

$$y_2 = y_1$$
$$z_2 = z_1$$

összefüggések érvényesek, ezekkel a továbbiakban nem foglalkozunk.
Egy tömegpont sebessége a K_2 rendszerben

$$\frac{dx_2}{dt_2} = \frac{\alpha dx_1 + \beta dt_1}{\gamma dx_1 + \delta dt_1} = \frac{\alpha \frac{dx_1}{dt_1} + \beta}{\gamma \frac{dx_1}{dt_1} + \delta}. \qquad (*)$$

1.) Alkalmazzuk a (*) összefüggést a K_1 rendszer origójának mozgására. A K_1 rendszer origója K_1-hez képest áll, tehát $\frac{dx_1}{dt_1} = 0$, a K_2 rendszerhez képest pedig $-v$ sebességgel mozog, tehát $\frac{dx_2}{dt_2} = -v$. Ezzel a $-v = \frac{\beta}{\delta}$, azaz a $\beta = -\delta v$ összefüggést kapjuk.
2.) Most vizsgáljuk K_2 origójának mozgását, ami K_1-hez képest v sebességgel mozog, tehát $\frac{dx_1}{dt_1} = v$, a K_2-höz képest pedig áll, azaz $\frac{dx_2}{dt_2} = 0$. Ebből a (*) egyenletbe való behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy $0 = \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}$, vagyis $\alpha v + \beta = 0$. Az *1.)* pontban kapott $\beta = -\delta v$ összefüggést felhasználva az $\alpha = \delta$ eredményt kapjuk.
3.) Használjuk ki a II. posztulátumot, vagyis azt, hogy a fény sebessége a két inerciarendszerben azonos. Az *x*-tengely mentén terjedő fényre ez azt jelenti, hogy $\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{dx_2}{dt_2} = c$, amiből a (*) összefüggés alapján $c = \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}$. Ebből a $\beta = -\delta v$ és az

$\alpha = \delta$ összefüggések felhasználása és rendezés után a $\gamma = -\alpha \frac{v}{c^2}$ összefüggést kapjuk.

4.) Ezek után az eredetileg bevezetett *4* konstans helyett már csak az egyetlen α maradt. Írjuk fel ezzel a transzformációs egyenleteket:

$$x_1 = \alpha x_2 + \alpha v t_2$$

$$t_1 = \alpha \frac{v}{c^2} x_2 + \alpha t_2 .$$

Ezek az összefüggések a mennyiségeket a K_1 rendszerből a K_2-be transzformálják. Az I. posztulátum, a relativitás elve miatt a fordított transzformáció esetén ugyanilyen alakú transzformációs összefüggéseknek kell fennállni, azzal az eltéréssel, hogy a relatív sebesség ellenkező irányú. A fordított transzformációs összefüggéseket tehát egyszerűen úgy kaphatjuk meg, hogy felcseréljük az *1* és *2* indexeket, és v helyébe $-v$-t írunk:

$$x_1 = \alpha x_2 + \alpha v t_2$$

$$t_1 = \alpha \frac{v}{c^2} x_2 + \alpha t_2 .$$

Ha most ezekben az összefüggésekben a K_2-beli mennyiségeket visszatranszformáljuk a K_1 rendszerbe, akkor nem változik meg semmi, tehát vissza kell kapnunk x_1-et és t_1-et. A behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \alpha(\alpha x_1 - \alpha v t_1) + \alpha v(-\alpha \frac{v}{c^2} x_1 + \alpha t_1)$$

$$x_1 = \alpha^2 x_1 - \alpha^2 v t_1 - \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} x_1 + \alpha^2 v t_1 = \alpha^2 x_1 - \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} x_1 = \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x_1 .$$

Ebből következik, hogy

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 .$$

Hasonlóan kapjuk az időre, hogy

$$t_1 = \alpha \frac{v}{c^2} (\alpha x_1 - \alpha v t_1) + \alpha(-\alpha \frac{v}{c^2} x_1 + \alpha t_1) ,$$

azaz

$$t_1 = \alpha^2 \frac{v}{c^2} x_1 - \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} t_1 - \alpha^2 \frac{v}{c^2} x_1 + \alpha^2 t_1 = -\alpha^2 \frac{v^2}{c^2} t_1 + \alpha^2 t_1 = \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t_1 .$$

Ebből szintén az következik, hogy

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 ,$$

így

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} .$$

Ezzel a transzformációs képletek az

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y_2 = y_1 \qquad z_2 = z_1 \qquad t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

alakot öltik.

Mint látható, az Einstein-féle fizikai alapelvek megkövetelésével kapott fenti egyenletek azonosak az elektromágnességtan egyenleteit változatlanul hagyó eredeti Lorentz-féle transzformáció egyenleteivel.
A Lorentz-transzformáció nagyon fontos tulajdonsága, hogy nincs ellentmondásban a hosszú időn át használt és helyesnek talált Galilei-transzformációval. Az összefüggésekből látható ugyanis, hogy „hétköznapi" sebességeknél ($v << c$) *visszakapjuk a Galilei-transzformációt*. Másként fogalmazva, a Galilei-transzformáció a Lorentz-transzformáció kis sebességekre érvényes közelítése. A mechanika klasszikus törvényeitől tehát csak akkor várható eltérés, ha a két vonatkoztatási rendszer (pl. a megfigyelő és a megfigyelt objektum) *relatív sebessége összemérhető a fénysebességgel*.
Ugyancsak fontos tény, hogy a Lorentz-transzformáció fizikailag értelmetlenné válik a $v \geq c$ esetben, vagyis a vákuumbeli c fénysebesség *határsebesség* szerepét játssza. Kimutatható, hogy ennél nagyobb sebességgel semmilyen anyagi rendszer és semmilyen információhordozó jel nem mozoghat.

A relativisztikus mechanika

Az Einstein által elfogadott két alapelv – ami egyenértékű a Lorentz-transzformáció elfogadásával és a Galilei-transzformáció elvetésével – maga után vonja, hogy a klasszikus mechanika alapfogalmait és törvényeit felül kell vizsgálni.

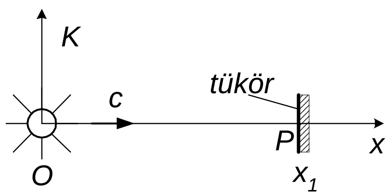
A klasszikus mechanika hétköznapi szemléleten alapuló olyan fogalmai, mint az idő, időtartam, távolság a relativitáselméletben bizonyosan koncepcionális változáson mennek keresztül, amit egyértelműen sejtet az a tény, hogy az időadatokat transzformálni kell.

Ami a felülvizsgálat másik részét illeti: a mechanika törvényeit úgy kell átalakítani, hogy azokat egyik inerciarendszerből a másikba történő átmenet során a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja, vagyis invariánsak legyenek a Lorentz-transzformációval szemben.

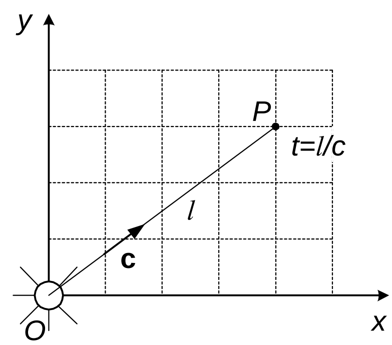
Az alábbiakban röviden összefoglaljuk ennek a felülvizsgálatnak az alapelveit és fő eredményeit.

A hely- és idő meghatározása

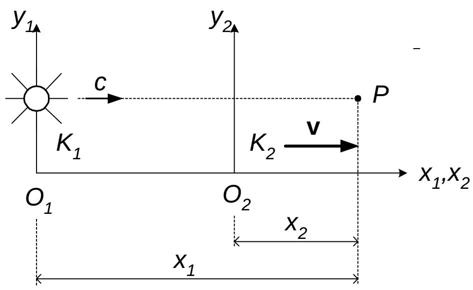
A fizikában a jelenségek leírásához szükség van a jelenség helyének és időpontjának megadására. Ehhez minden vonatkoztatási rendszerben ki kell alakítani egy *sűrű koordináta- és időhálózatot*. A koordinátahálózat azt jelenti, hogy meg kell határozni a rendszer nagyon sok pontjának helyzetét, az időhálózat pedig azt, hogy a rendszerben sűrűn el kell helyezni azonosan működő, egymáshoz igazított, szinkronizált órákat.
Ha nagyon precízen akarunk eljárni, akkor nem alkalmazhatunk olyan módszert, amely azzal járna, hogy méterrudakat és órákat szállítunk a rendszer különböző pontjai között, mert a szállítás közben ezek az eszközök megváltozhatnak. A koordináta- és időhálózat kialakításának legcélszerűbb módja az, ha a feladatot fényjelek segítségével oldjuk meg. Ez azért is célszerű, mert a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz, így az eljárás különböző rendszerekben is használható.
Ahhoz, hogy egy rendszer pontjainak helyzetét megadjuk, távolságokat (koordinátákat) kell meghatározni. Fényjellel ez úgy valósítható meg, hogy az origóból elindítunk egy fényjelet, a vizsgált pontban (az ábrán *P*) pedig elhelyezünk egy tükröt, amelyről a fényjel visszaverődik az origóba. Ha a fényjel az origóba a kibocsátástól számított *t* idő múlva érkezik vissza, akkor a vizsgált hely távolsága az origótól (az ábrán a *P* pont x_1 koordinátája) $x_1 = \frac{1}{2}ct$.



Az órák szinkronizálása szintén elvégezhető fényjelekkel. Ez úgy történhet, hogy a $t=0$ időpillanatban az origóban egy fényfelvillanást hozunk létre, és ezt a fényfelvillanást megfigyeljük a rendszer egy adott pontjában, amelynek az origótól mért *l* távolságát ismerjük (ábra). Mivel a fényjel *c* sebességgel terjed, a jel megérkezésének időpontjáig $t = \frac{l}{c}$ idő telt el, vagyis az adott helyen (*P*) lévő órát erre az időpontra kell beállítani. Ilyen módon a rendszer különböző helyein elhelyezett órákat szinkronizálni tudjuk.



Mivel egymáshoz lépest mozgó inerciarendszerekben a fény terjedési sebessége azonos, egy adott esemény helyének koordinátái viszont lehetnek különbözőek, a fenti szinkronizálási módszer segítségével rögtön látható, hogy a két rendszerben az órák nem ugyanazt az időt mutatják.
Ennek belátásához vizsgáljunk ismét két speciális elhelyezkedésű, egymáshoz képest v sebességgel mozgó koordinátarendszert (ábra), amelyeknek origói a $t=0$ időpillanatban azonos helyen voltak, és ekkor a közös origóból elindítottak egy fényfelvillanást. Ha a P pontban lévő órát mindkét rendszerben ugyanezzel a jellel állítjuk be, akkor a jel megérkezésekor a K_1 rendszerbeli órát $t_1 = \frac{x_1}{c}$ -, a K_2-beli órát pedig az ettől eltérő $t_2 = \frac{x_2}{c}$ értékre állítják be.



Az tehát, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben azonos értékű, azzal a következménnyel jár, hogy az időadatok az egyes rendszerekben eltérőek lesznek.
A koordináta- és időhálózat segítségével egy rendszerben tudunk helyet- és időpontot, továbbá távolságot- és időtartamot meghatározni.
Az események leírása szempontjából van még egy fontos kérdés: hogyan lehet meghatározni egy rendszerhez képest mozgó tárgynak a mozgásirányba eső méretét? Erre az a megoldás kínálkozik, hogy a mozgásirányban sűrűn felsorakozó órás megfigyelők feljegyzik a tárgy egyik- és másik végének elhaladási időpontját. Ezek közül kiválasztjuk azt a kettőt, akiknek egyike a tárgy egyik végének elhaladását ugyanabban a pillanatban észlelte, mint a másikuk a tárgy másik végének elhaladását. A mozgó tárgynak a mozgásirányba eső hossza a két megfigyelő közti távolsággal egyenlő.
Ezekkel a mérési módszerekkel egy esemény egy inerciarendszerben az x, y, z, t számnégyessel jellemezhető, amely megadja az esemény helyét és időpontját. Ezt a számnégyest gyakran az esemény koordinátáinak nevezik.

Időtartam és távolság a relativitáselméletben

Bár a Lorentz-transzformáció csak a hétköznapi sebességekhez képest nagy sebességeknél különbözik lényegesen a Galilei-transzformációtól, a kettő között mégis elvi különbség van, ami szükségessé teszi az idő és távolságméréssel kapcsolatos fogalmaink felülvizsgálatát.

Időtartamok relativitása, mozgási- és nyugalmi időtartam

Először vizsgáljuk meg, hogy milyen eredményre jutunk, ha két esemény között eltelt időt különböző inerciarendszerekből vizsgáljuk.
Tegyük fel, hogy a K_2 rendszer a K_1 rendszerhez képest a korábbi speciális elrendezésben v sebességgel mozog, és a K_2 rendszerben azonos helyen, a rendszerhez képest nyugalomban lévő pontban lejátszódik két esemény (pl. egy lámpa kigyullad és kialszik). Az első eseményt jellemző adatok ebben a rendszerben t_2^I, x_2, a másodikat jellemzők pedig t_2^{II}, x_2 (mivel a két esemény azonos helyen játszódik le, alkalmaztuk az $x_2^I = x_2^{II} = x_2$ jelölést). A két esemény között eltelt idő a K_2 rendszerben

$$\Delta t_2 = t_2^{II} - t_2^I .$$

A K_1 rendszerben az események között

$$\Delta t_1 = t_1^{II} - t_1^{I}$$

idő telik el.
Mivel a Lorentz-transzformáció szerint

$$t_1^{I} = \frac{t_2^{I} + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}} \qquad t_1^{II} = \frac{t_2^{II} + \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

azt kapjuk, hogy

$$\Delta t_1 = \frac{t_2^{II} - t_2^{I}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ez azt jelenti, hogy a két rendszerben nem csak az időpontok különböznek, hanem a két rendszerben ülő megfigyelők az események között eltelt időtartamot is különbözőnek találják. Mivel $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$, $\Delta t_1 > \Delta t_2$, tehát az események helyéhez képest mozgó (K_1-beli) megfigyelő az események között eltelt időt hosszabbnak találja, mint az eseményekhez képest nyugvó (K_2-beli) megfigyelő. Megkülönböztetésül a Δt_2 időtartamot nyugalmi mérőszámnak vagy *nyugalmi időtartamnak*-, a Δt_1 időtartamot mozgási mérőszámnak vagy *mozgási időtartamnak* nevezik.
Természetesen, ha az események közös helye a K_1 rendszerben nyugszik, akkor az időtartamok közötti összefüggés megfordul:

$$\Delta t_2 > \Delta t_1,$$

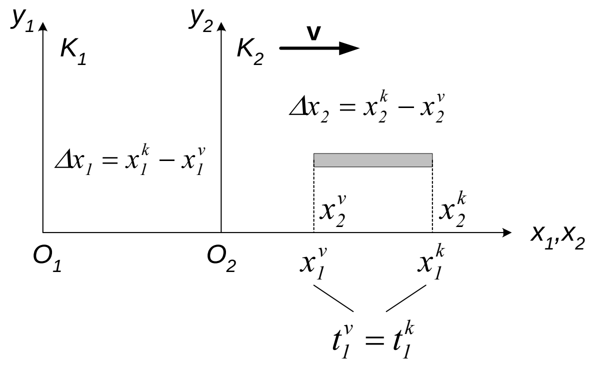
vagyis mindig az eseményekhez képest mozgó rendszerben kapott időtartam, a mozgási időtartam a hosszabb.
Ezt a tapasztalatunkat megfogalmazhatjuk a koordinátarendszerek jelölésétől független formában is. Ha az eseményekhez képest nyugvó megfigyelő által mért időtartamot T_0 -lal, a mozgó megfigyelő által mért időtartamot pedig T-vel jelöljük, akkor a fenti összefüggések a

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

alakba írhatók.
A mozgó megfigyelő által mért *mozgási időtartam* a megfigyelő és az események helye közti relatív sebességtől függ. Ezt a jelenséget gyakran *idődilatációnak* nevezik.
Az idődilatáció gyakorlatilag jelentőssé akkor válik, ha a mozgási sebesség a fénysebességgel összemérhető, a $v<<c$ esetben ugyanis $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1$, azaz $T \approx T_0$.
A fentiekhez hasonlóan egyszerű megfontolásokkal kimutatható, hogy ha két különböző helyen végbemenő esemény az egyik rendszerből egyidejűnek látszik, akkor egy hozzá képest mozgó rendszerből nézve különböző időpontban zajlanak le, vagyis az *egyidejűség sem abszolút*, hanem a koordinátarendszertől függ.

A távolságok relativitása, mozgási- és nyugalmi hossz

Számítsuk ki most, hogy milyen eredményre vezet egy rúd hosszának mérése, egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekben. Ismét a szokásos speciális elrendezést használjuk (ábra), a mérendő rúd a K_2 rendszerben nyugszik, és az x tengelyekkel párhuzamos.



A rúd hosszának meghatározása a K_2 rendszerben egyszerű, hiszen ha meghatározzuk a kezdőpont (k) és a végpont (v) x_2^k és x_2^v koordinátáit, akkor a hosszt a

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v$$

összefüggés adja meg.

A K_1 rendszerben a hosszt a korábban említett módon, az egyidejű kezdő- és végpont-koordináták (x_1^k és x_1^v) leolvasásával kapjuk:

$$\Delta x_1 = x_1^k - x_1^v \qquad (t_1^k = t_1^v)\,.$$

A Lorentz-transzformáció szerint

$$x_2^k = \frac{x_1^k - vt_1^k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2^v = \frac{x_1^v - vt_1^v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

ezért a $t_1^k = t_1^v$ feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v = \frac{x_1^k - x_1^v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ez azt jelenti, hogy a hosszúság is koordinátarendszertől függő mennyiség.

Természetesen, ha a rúd a K_1 rendszerben nyugszik és a K_2-höz képest mozog, akkor a Lorentz-transzformáció inverzét használva a

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggésre jutunk, vagyis a mozgásirányba eső hosszt mindig a rúdhoz képest mozgó megfigyelő méri rövidebbnek.

A fenti tapasztalatot a koordinátarendszerek jelölésétől független formában is felírhatjuk. Ha a tárgyhoz képest nyugvó megfigyelő által mért hosszt L_0-lal, a mozgó megfigyelő által mért hosszt pedig L-lel jelöljük, akkor a fenti összefüggések az

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

alakba írhatók. Eszerint a tárgynak a hozzá képest mozgó rendszerből mért *L mozgási hossza* mindig kisebbnek adódik, mint a hozzá képest nyugvó rendszerben mért *L_0 nyugalmi hossz*: a mozgó megfigyelő által mért hossz a megfigyelő és a tárgy v relatív sebességétől függ. Ehhez az eredményhez először Lorentz jutott el, ezért azt a tényt, hogy a mozgó megfigyelő kisebb hosszt mér, *Lorentz-kontrakciónak* nevezik. A Lorentz-kontrakció – az idődilatációhoz hasonlóan – csak akkor jelentős, ha a mozgási sebesség a fénysebességhez képest nem elhanyagolható.

Az idődilatáció- és Lorentz-kontrakció kísérleti bizonyítéka: a mezonok élettartama

A távolságokra és az időtartamokra vonatkozó fenti összefüggések egyik kísérleti bizonyítékát szolgáltatják a világűrből a Föld felszínére érkező részecskék, a μ-*mezonok* vagy rövidebb néven *müonok*.

Ezek a részecskék az atmoszféra felső rétegeiben, kb. *4-5 km* magasságban keletkeznek atomi ütközések során, és a fénysebességhez közeli $v \approx c$ sebességgel haladnak. A müonok nem stabilis részecskék: laboratóriumban végzett mérések szerint a – gyakorlatilag nyugvó – müonok átlagosan $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,s$ idő eltelte után elbomlanak. Számítsuk ki, hogy ezalatt mekkora utat futnak be.

A klasszikus elgondolás szerint a müonok keletkezésük után átlagosan $s_{KL} = v\tau_0 \approx c\tau_0 = 660\ m$ utat futnak be, majd elbomlanak, tehát a Földfelszín eléréséhez szükséges távolságnak (*4-5 km*) alig több, mint *10*-ed részét teszik meg. A tapasztalat ezzel szemben az, hogy a müonok leérnek a Föld felszínére.

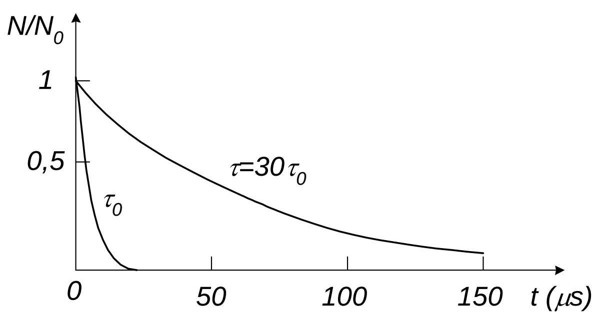
Az ellentmondás magyarázata az, hogy a fenti számításnál használt τ_0 időtartam a müonhoz képest nyugvó rendszerben mért nyugalmi élettartam, a számítást pedig a müonhoz képest nagy sebességgel mozgó rendszerben, a Földön végeztük. A Földhöz képest mozgó müont vizsgálva, a számításnál természetesen a $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ mozgási élettartamot kell használnunk.

Ha a müon sebessége $v = 0{,}99 \cdot c$, akkor $\tau = \dfrac{\tau_0}{0{,}141} = 15{,}6 \cdot 10^{-6}\ s$, és így a befutott út $s_F = v\tau \approx 4{,}68\ km$, a tapasztalattal egyezésben.

Természetesen, ha a problémát a müonnal együttmozgó rendszerből vizsgáljuk, akkor is arra a végeredményre kell jutnunk, hogy a müon elérheti a Föld felszínét. Ekkor az élettartam a τ_0 nyugalmi érték, az ebből kiszámítható befutott út pedig a klasszikusan is kapott *660 m* lesz. Ellentmondás azonban nincs, mert most a befutandó út nem az $s_0 = v\tau \approx 4{,}68\ km$ nyugalmi hossz, hanem annak mozgási értéke, azaz $s_\mu = s_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \approx 660\ m$, hiszen a müonhoz képest mozgó távolságról van szó. Vagyis a müon a hozzá rögzített rendszerben végzett számolás szerint is leérhet a Föld felszínére: a fizikai folyamat leírása szempontjából a két inerciarendszer a várakozásnak megfelelően egyenértékű.

Annak, hogy a müonok megérkeznek a Föld felszínére, csak akkor van bizonyító ereje, ha a Föld felszínén a magasban keletkezett müonok többsége leérkezik, hiszen az átlagos élettartam csak bomlási felezési időt jelent. A megfigyelések igazolják ezt a várakozást.

A jelenség pontosabb elemzését teszik lehetővé azok a mérések, amelyeket a genfi CERN laboratórium gyorsítójában végeztek el, ahol közvetlenül megmérték a müonok bomlási sebességét (ábra).



A müonok elektronra és neutrinóra bomlanak, ezért a bomlásban keletkezett elektronok detektálásával mérni tudták a bomlás gyakoriságát. Kiderült, hogy a $v \approx 0{,}9994 \cdot c$ sebességgel mozgó müonok bomlásának felezési ideje (τ) – a relativitáselmélet idődilatáció-összefüggésének megfelelően – kb. 30-szor akkora, mint a nyugvó müonoké (τ_0). Az ábra a még nem elbomlott müonok számának (N) és a kezdetben jelen lévő müonok számának (N_0) hányadosát mutatja az idő függvényében a két esetben.

A sebességtranszformáció

Ha a fénysebesség minden inerciarendszerben azonosnak adódik, akkor a Lorentz-féle sebesség-transzformációnak alapvetően különbözni kell a Galilei-féle transzformáció megfelelő összefüggésétől.
Írjuk fel egy pont v_{2x} sebességét a K_2 rendszerben, amely v sebességgel mozog a K_1 rendszerhez képest. és használjuk a korábban is használt speciális koordinátarendszer-elrendezést.
A sebesség x-komponense

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt_2}.$$

Felhasználva a Lorentz-transzformáció egyenleteit

$$v_{2x} = \frac{\kappa(dx_1 - v dt_1)}{\kappa(dt_1 - \frac{v}{c^2} dx_1)},$$

ahol bevezettük a $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ jelölést.

Ebből a számláló és nevező dt_1-gyel való osztása után kapjuk

$$v_{2x} = \frac{\dfrac{dx_1}{dt_1} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx_1}{dt_1}}$$

Mivel a K_1 rendszerbeli x-irányú sebesség $v_{1x} = \dfrac{dx_1}{dt_1}$, a sebesség-transzformáció összefüggése az x-komponensre

$$v_{2x} = \frac{v_{1x} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} v_{1x}}.$$

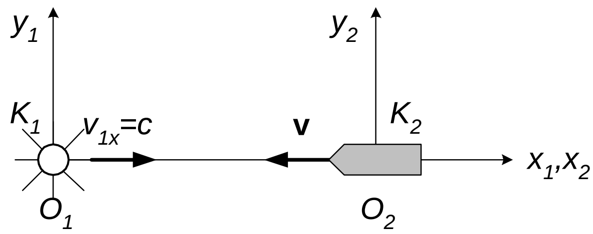
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$v_{2y} = \frac{v_{1y}}{\kappa\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_{1x}\right)}$$

$$v_{2z} = \frac{v_{1z}}{\kappa\left(1 - \dfrac{v}{c^2} v_{1x}\right)}.$$

A fenti kifejezések különböznek a Galilei-transzformáció megfelelő összefüggéseitől, és itt már nem csak az x-komponensekben, hanem (az idő transzformációja miatt) a többiben is van eltérés. Az is szembetűnő azonban, hogy a $v << c$ esetben ezek az összefüggések visszaadják a Galilei-féle sebesség-transzformáció egyenleteit: az eltérés ismét csak a fénysebességgel összemérhető relatív sebességek esetén számottevő.

Mivel a Lorentz-transzformáció megfelel annak a követelménynek, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanaz, ezt a tényt a fenti képleteknek is tükrözniük kell. Nézzük meg egy egyszerű példán, hogyan is működik ez a sebesség-transzformáció. Tegyük fel, hogy valahol (K_1 rendszer) kibocsátanak egy fényjelet, amely ebben a rendszerben $v_{1x}=c$ sebességgel halad az x-tengely mentén a pozitív irányban (ábra). Milyen fénysebességet észlel a fenti rendszerhez képest az x-tengely negatív irányában v nagyságú sebességgel haladó megfigyelő (K_2 rendszer)?



A sebességtranszformáció megfelelő összefüggésébe behelyettesítve az aktuális adatokat, azt kapjuk, hogy

$$v_{2x} = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = c\,,$$

vagyis a K_2 rendszerben mért fénysebesség is c lesz, szemben a Galilei-transzformáció alapján várható $c+v$ értékkel. A vákuumbeli fénysebesség tehát sebesség-összetevéssel nem növelhető.

Kimutatható azonban, hogy a fenti eredmény csak a vákuumbeli c fénysebességre érvényes. A különböző átlátszó közegekben a fény ennél kisebb $c_K=c/n$ (n a törésmutató) sebességgel terjed, és ilyenkor a fénnyel szemben haladó megfigyelő a c_K-nál nagyobb sebességet mér, de mindig érvényes a $c_K < c'_K < c$ egyenlőtlenség. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az a megállapítás, hogy a fénysebesség határsebesség, szintén a fény vákuumbeli terjedési sebességére igaz: egy közegbeli $c_K<c$ fénysebesség túlléphető.