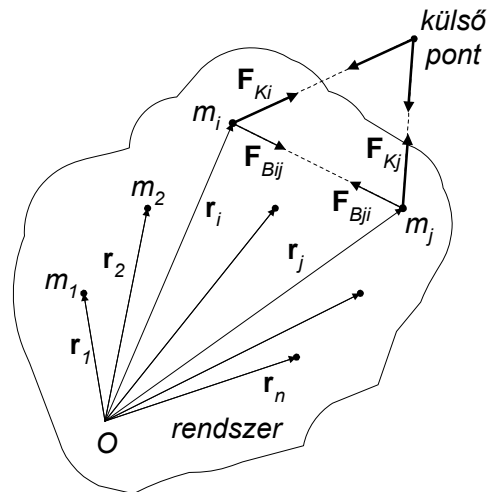


Tömegpont-rendszer mozgása

Bonyolultságban a tömegpont után következő, és gyakorlati szempontból is igen fontos eset, amikor több tömegpontból álló rendszert, ún. *tömegpont-rendszert* (rövidebben: *pontrendszert*) vizsgálunk. Az ábrán az általunk kiválasztott rendszerhez a körberajzolt területen lévő pontok tartoznak, ezeket a pontokat sorszámoztuk: az i -edik pont tömegét m_i -vel, helyzetvektorát \mathbf{r}_i -vel jelöljük. A tömegpontokra ható erőket célszerű két csoportba osztani: a rendszerhez tartozó pontok között fellépő erőket *belső erőknek*, a rendszeren kívül eső testek által a rendszer pontjaira kifejtett erőket pedig *külső erőknek* nevezzük. Jelöljük a j -edik pont által az i -edik pontra kifejtett (belső) erőt \mathbf{F}_{Bij} -vel, az i -edik pontra ható külső erők eredőjét pedig \mathbf{F}_{Ki} -vel.



A tömegpontrendszer mozgása, tömegközéppont

A pontrendszer mozgása leírható, ha külön-külön minden pontra felírjuk a mozgásegyenletet:

$$\mathbf{F}_{K1} + \sum_{j=2}^n \mathbf{F}_{B1j} = m_1 \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{F}_{K2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \mathbf{F}_{B2j} = m_2 \mathbf{a}_2$$

.....

$$\mathbf{F}_{Ki} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij} = m_i \mathbf{a}_i$$

.....

$$\mathbf{F}_{Kn} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n \mathbf{F}_{Bnj} = m_n \mathbf{a}_n .$$

Látható, hogy ez elég bonyolult leírási mód, ami a pontrendszerről, mint egészről nem sokat mond.

A teljes rendszer egyfajta jellemzését adja az az egyenlet, amit a fenti egyenletek összeadásával kapunk:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ki} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i .$$

Newton III. törvénye alapján könnyen belátható, hogy a belső erők összege nulla, így a rendszerre ható külső erők eredőjét \mathbf{F}_K -val jelölve, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\mathbf{F}_K = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i .$$

Jó lenne, ha a pontrendszerre a fenténél egyszerűbb, a tömegpont mozgásegyenletéhez hasonló összefüggést kaphatnánk, vagyis az egyenlet jobboldalát a pontrendszerre jellemző "egyetlen gyorsulás" és az $m = \sum_i m_i$ össztömeg szorzataként írhatnánk fel. Ilyen egyenletre juthatunk,

ha a pontrendszer helyzetének globális jellemzésére bevezetjük egy speciális pontot, amit az alábbi módon definiálhatunk. Alakítsuk át a fenti mozgásegyenletet

$$\mathbf{F}_K = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right),$$

és vegyük észre, hogy a zárójelben lévő mennyiség helyzetvektor jellegű. Tekintsük ezt a tömegpontok helyzete által egyértelműen meghatározott sajátos helyzetvektort a pontrendszer *tömegközéppontjának* (\mathbf{r}_{TK}), amely eszerint

$$\mathbf{r}_{TK} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m} .$$

Kimutatható, hogy ez a pont valóban a pontrendszer tömegeloszlásának egyfajta centruma, ami homogén nehézségi erőterben azonos a rendszer súlypontjával.

A fenti mozgásegyenletben a tömegközéppont helyzetvektorának második időderiváltja, vagyis a tömegközéppont gyorsulása (\mathbf{a}_{TK}) szerepel, így a rendszer mozgását leíró egyenlet az alábbi egyszerű alakot ölti

$$\mathbf{F}_K = m \mathbf{a}_{TK} .$$

Eszerint a *pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege a tömegközéppontban lenne elhelyezve, és erre a külső erők eredője hatna.*

Mivel a kiterjedt, merevnek tekinthető testek pontrendszerként is felfoghatók, ez az eredmény azt mutatja, hogy egy ilyen test haladó mozgása úgy írható le, mintha a test pontszerű lenne, és tömege a tömegközéppontjában lenne összesűrítve. Vagyis a fenti eljárást követve, *kiterjedt testek haladó mozgásának leírására a már megismert tömegpont-mozgásegyenlet használható.*

A lendület (mozgásmennyiség)-megmaradás tétele pontrendszerben

A lendületre vonatkozó összefüggéshez úgy juthatunk el, hogy a tömegközéppont mozgásegyenletét a lendületváltozás segítségével írjuk fel. Ehhez szükségünk lesz a tömegközéppont sebességének kifejezésére:

$$\mathbf{v}_{TK} = \frac{d\mathbf{r}_{TK}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{m} .$$

Ebből látható, hogy a pontrendszer lendületösszege (\mathbf{p}_R) kifejezhető a rendszer össztömegének és a tömegközéppont sebességének szorzatával:

$$\mathbf{p}_R = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_{TK}$$

Eszerint a tömegközéppont ebből a szempontból is úgy viselkedik, mint egy olyan tömegpont amelynek tömege a pontrendszer össztömegével egyenlő.

A mozgásegyenlet ezzel így írható át:

$$\mathbf{F}_K = m\mathbf{a}_{TK} = m \frac{d\mathbf{v}_{TK}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_{TK}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right),$$

vagyis a külső erők eredője egyenlő a rendszer összes lendületének változási sebességével:

$$\mathbf{F}_K = \frac{d\mathbf{p}_R}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right).$$

Ebből következik, hogy ha a külső erők eredője nulla ($\mathbf{F}_K = 0$), akkor:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = 0,$$

azaz

$$\mathbf{p}_R = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{állandó}.$$

Vagyis, ha a pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a rendszer összes lendülete nem változik. Ez a *lendületmegmaradás törvénye pontrendszerre* (használatos még a mozgásmennyiség-megmaradás illetve impulzusmegmaradás elnevezés is).

A törvény jelentősége, többek között az, hogy mechanikai problémák megoldásánál olyan egyenletet ad, amelyből ismeretlen sebesség határozható meg, anélkül, hogy integrálnunk kellene a mozgásegyenletet. (Ennek a megmaradási törvénynek speciális esetét láttuk korábban két kölcsönható testre).

Pontrendszer energiája, a mechanikai energia megmaradásának tétele pontrendszerben

A pontrendszer energiájának vizsgálatánál az egyes pontokra felírt munkatételből indulhatunk ki. Ha a rendszer az 1 állapotából a 2 állapotba megy át, akkor a munkatétel az i -edik pontra:

$$W_{ei} = \Delta E_{mi} = E_{mi2} - E_{mi1},$$

ahol W_{ei} az i -edik pontra ható erők eredőjének munkája. Ha ezeket az egyenleteket összeadjuk, akkor a baloldalon a pontrendszerre ható összes erők munkáját, a jobboldalon pedig a pontrendszer teljes mozgási energiájának megváltozását kapjuk:

$$W_e = \Delta E_m = E_{m2} - E_{m1}.$$

Ha különválasztjuk a külső- és belső erők munkáját (W_K és W_B), ezeken belül pedig a konzervatív- és nem konzervatív erők munkáját ($W_{K,k}$, $W_{K,nk}$, $W_{B,k}$, $W_{B,nk}$), akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} + W_{K,k} + W_{B,k} = E_{m2} - E_{m1}.$$

Felhasználva, hogy a konzervatív erők munkája a helyzeti energia megváltozásának negatívja, átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = E_{m2} - E_{m1} + E_{hB2} - E_{hB1} + E_{hK2} - E_{hK1},$$

ahol a helyzeti energia-tagoknál a B és K index a belső kölcsönhatásokból, illetve a külső testekkel való kölcsönhatásból származó helyzeti energiára utal. Az összefüggést átrendezéssel áttekinthetőbb alakba írhatjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = (E_{m2} + E_{hB2} + E_{hK2}) - (E_{m1} + E_{hB1} + E_{hK1}),$$

ahol a zárójelben lévő tagok a rendszer összes mechanikai energiáját jelölik a rendszer kezdeti (1) és végső (2) állapotában. Ha az összes mechanikai energiát E_R -rel jelöljük

$$E_R = E_m + E_{hB} + E_{hK},$$

akkor az energiaváltozás általános összefüggését tömören így írhatjuk:

$$W_{K,nk} + W_{B,nk} = E_{R2} - E_{R1} = \Delta E_R,$$

vagyis a rendszer energiájának megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő. Az eredmény tehát ugyanaz, mint a tömegpont esetén, azzal a különbséggel, hogy itt az energia és munka kifejezései bonyolultabbak, mint a tömegpontnál.

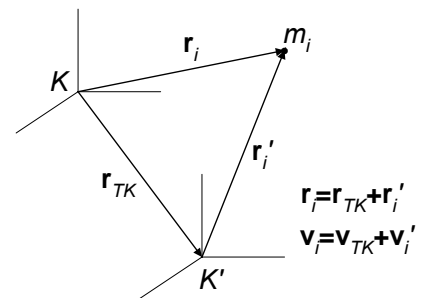
Ha a nem konzervatív erők munkája nulla (például úgy, hogy nincsenek ilyen erők), akkor

$$\Delta E_R = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{R2} = E_{R1},$$

vagyis a rendszer összes mechanikai energiája nem változik. Ez az *energia-megmaradás tétele pontrendszerre*. Jelentősége gyakorlati szempontból ugyanaz, mint a lendület-megmaradás törvényéé: olyan egyenletet ad, amelyből pl. ismeretlen sebesség határozható meg, anélkül, hogy integrálnunk kellene a mozgásegyenletet.

A pontrendszer mozgási energiájának kifejezését tovább vizsgálva, egy újabb fontos mennyiséghez juthatunk el. Vizsgáljuk a pontrendszer mozgási energiáját egy K koordináta-rendszerből és a hozzá képest egyenletesen mozgó K' rendszerből, amelyet a pontrendszer tömegközéppontjához rögzítettünk (ábra). Írjuk fel a pontrendszer mozgási energiáját a K rendszerben, és fejezzük ki azt a K' rendszerbeli adatokkal:

$$\begin{aligned} E_m &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{TK}) \cdot (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{TK}) \end{aligned}$$



(itt alkalmaztuk az ábrán is feltüntetett Galilei transzformációt).

A műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_i'^2 + v_{TK}^2 + 2\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{TK}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{TK} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i.$$

Az utolsó tagban szereplő összeg éppen a tömegközéppont sebessége a K' rendszerben, mivel azonban a K' rendszer a pontrendszer tömegközéppontjához van rögzítve, ez a sebesség nulla:

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{TK}^2.$$

Ebből rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2,$$

vagyis a pontrendszer mozgási energiája felírható a tömegközéppontba képzelt össztömeg mozgási energiájának és a tömegközéppontban lévő megfigyelő által észlelt sebességekkel (v'_i) számított mozgási energiák összegeként.

Ezzel a rendszer összes mechanikai energiája

$$E_R = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + E_{hK} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{hB}.$$

Ha a rendszer tömegközéppontjával együtt mozgunk (vagyis $K=K'$), akkor a tömegközéppont áll, tehát az első tag nulla. Ha ezenkívül a rendszerre külső erők nem hatnak, akkor a külső helyzeti energia (második tag) is nulla. A tömegpont-rendszer energiája ekkor

$$E_B = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + E_{hB},$$

amit a rendszer *belső energiájának* neveznek. Az elnevezés logikus, hiszen ez a külső hatásoktól mentes rendszer tömegközéppontjában „ülő” megfigyelő által észlelt mozgási energia és a pontrendszer tagjai között fellépő belső kölcsönhatásokból származó helyzeti energia összege.

Perdület és forgatónyomaték, a perdületmegmaradás tétele pontrendszerben

A lendület és az energia bevezetését az indokolja, hogy ezekre a mennyiségekre bizonyos körülmények között megmaradási törvény érvényes. Ugyanez az oka a *perdület* (*impulzuszóránymomentum*) (\mathbf{N}) bevezetésének is.

Egy pontrendszer \mathbf{r}_i helyvektorú, \mathbf{p}_i impulzusú i -edik tömegpontjának \mathbf{N}_i perdülete az O vonatkoztatási pontra (ábra):

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

A definícióból látszik, hogy a perdület függ a vonatkoztatási ponttól, tehát egyértelmű megadásához ezt is meg kell adni.

Ha a mozgó pontra ható erők \mathbf{F}_i eredője nem nulla, akkor a sebesség- és általában a perdület is változik. Ezt a változást megkaphatjuk a fenti egyenlet differenciálásával:

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

A jobboldal első tagja két párhuzamos vektor (\mathbf{v}_i és \mathbf{p}_i) vektorszorzata, ezért ez a tag nulla, a második tagban pedig a lendület időderiváltja az eredő erővel egyenlő, ezért

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

A jobboldalon megjelenő mennyiséget az \mathbf{F}_i erő O pontra vonatkozó *forgatónyomatékának* (\mathbf{M}_i) nevezzük. Ezzel a perdület megváltozása és az eredő forgatónyomaték között az alábbi összefüggést kapjuk

$$\frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \mathbf{M}_i.$$

Egy pontrendszer perdülete (\mathbf{N}_R) az egyes pontok perdületeinek vektori összege, az eredő forgatónyomaték (\mathbf{M}_R) pedig az egyes pontokra ható forgatónyomatékok vektori összege, vagyis a pontrendszerre vonatkozó egyenletet a pontokra vonatkozó egyenletek összeadásával kaphatunk. A korábban követett eljáráshoz hasonlóan, itt is szétválasztjuk a külső- és belső erők forgatónyomatékát:

$$\sum_i \frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Bi} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{Bij}.$$

Newton III. törvénye és a forgatónyomaték definíciója alapján belátható (ábra), hogy a belső erők forgatónyomatékainak összege nulla lesz, így a rendszerre a

$$\frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki} = \mathbf{M}_K$$

egyenletet kapjuk, ahol \mathbf{M}_K a külső erők forgatónyomatékainak összege.

Ha a külső forgatónyomatékok eredője nulla, akkor a fenti egyenlet szerint

$$\frac{d\mathbf{N}_R}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_R = \text{állandó},$$

vagyis a perdület nem változik. Ez a *perdület megmaradásának tétele pontrendszerre*.

