Bevezetés

Fizika: a szó eredeti görög alakjának jelentése "természet", akkoriban az összes természeti jelenség vizsgálatát jelentette.
Később a vizsgálatok köre szűkül: élettelen természet jelenségei anyagi minőség változása nélkül (utóbbi a kémia "területe"). Ennek a szűkített területnek a jellegzetességei:

– a jelenségek egyszerűbben vizsgálhatók, matematikailag könnyebben leírhatók (a fizika ún. egzakt tudomány)
– a feltárt törvények általánosak, a jelenségek széles körében érvényesek (pl. kémia, biológia).

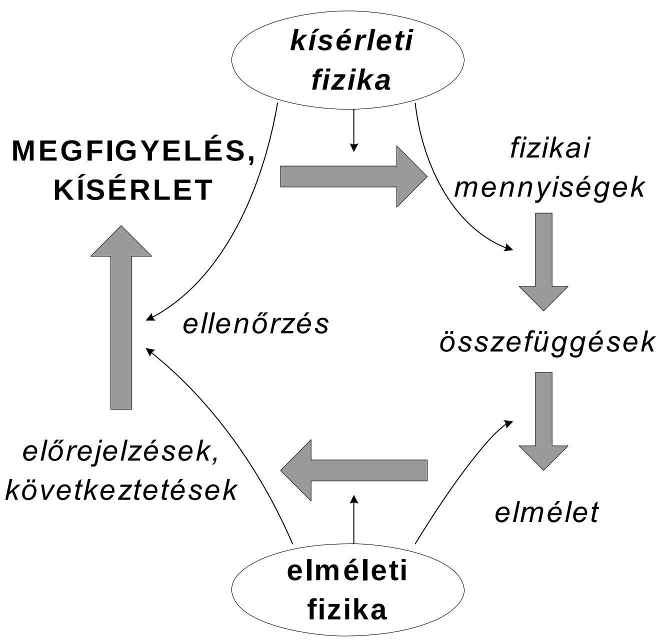
Ma nehéz definiálni a vizsgálati területet, de a fentinél sokkal szélesebb:

– a modern fizika alapvetően fontos szerepet játszik az *anyagátalakulás*sal járó jelenségek leírásában (pl. kémiai kötés, vegyületképződés, magátalakulások), sőt a bonyolultabb természettudományokban, mint a biológia és az orvostudomány is (biofizika),
– a *modern technológiák* megalapozásában közvetlenül részt vesz, aminek társadalmi hatásai is vannak (mikroelektronika, atomenergia)
– a *Föld és a világegyetem* egészének megértéséhez nélkülözhetetlen (pl. "globális problémák")
– a fizika kísérletező tudomány, ezért *új, hatékony mérési módszereket* fejleszt ki, amelyeket más tudományok és a technika felhasznál.

Jobb egy olyan definíció, amely nem tudományterülethez kapcsolja a fizikát, ilyen például az alábbi:

> *a fizika az anyag részei közötti kölcsönhatások- és az ebből fakadó folyamatok vizsgálatával és értelmezésével, az anyag tulajdonságainak magyarázatával és megváltoztatásával, a természeti jelenségek magyarázatával foglalkozik.*

Vizsgálati módszerének vázlata:



A fizika a jelenségek megértése és leírása érdekében *modellekkel* dolgozik, vagyis nem a vizsgált objektumot vagy jelenséget próbálja a maga teljességében leírni, hanem egyszerűsítéseket használ, elhanyagolja a jelenség lényegének megértéséhez nem okvetlenül szükséges részleteket, és az így kapott modell-objektumot, vagy modell-jelenséget vizsgálja. A modell akkor jó, ha a belőle kapott eredményeket a tapasztalat igazolja (*ellenőrzés*).

Fontos segédeszköz a *matematika*, amelynek segítségével a mennyiségek között számszerű összefüggések írhatók fel: a *törvények kvantitatívvá tehetők*.
Használt mennyiségek típusai:

- *skaláris*- (csak nagyság: pl. tömeg, hőmérséklet, töltés)
- *vektoriális* (irány *is*: pl. elmozdulás, sebesség, erő).

Számunkra szükséges matematikai alapok: a skalár- és vektormennyiségekkel végzett műveletek, vagyis a *vektorszámítás-,* továbbá a *differenciál- és integrálszámítás alapjai*.

A mozgás leírása, modellek a mechanikában

A mozgás alapvető jelenség a világban, ennek vizsgálatával a *mechanika* foglalkozik.
A mozgások nagyon sokfélék és bonyolultak lehetnek. A mozgó test

- haladhat,
- foroghat,
- deformálódhat,
- áramolhat.

A leírásnál gyakran nem a valódi testet, hanem annak egyszerűsített "hasonmását", *modelljét* használjuk, mert pl.:

- az általános leírás nem megy, hiányos információk, hiányos fizikai ismeretek vagy hiányos matematikai lehetőségek miatt,
- az általános leírásra nincs is szükség, mert a mozgás egyik vagy másik formája számunkra elhanyagolható.

A mechanikában használt modellek:

- *anyagi pont* vagy *tömegpont* (kiterjedése nincs, tehát csak haladó mozgást tud végezni, de tömege van),
- *pontrendszer* (kiterjedt, de önálló pontokból álló, nem "összefüggő test"),
- *merev test* (valódi testhez közelálló kiterjedt test, amely foroghat is, de nem deformálódik),
- *deformálható test* (a valódi testhez legközelebb áll), sajátos deformálható "testek" a folyadékok és a gázok.

A modell jóságát a levont következtetések kísérleti vizsgálatával *ellenőrizni* kell.

A mozgás leírásának két lépcsőfoka:

- mozgás leírása, anélkül, hogy a mozgás jellegének okát kutatnánk: ez a *kinematika* tárgya.
- annak vizsgálata, hogy miért a megfigyelt módon mozognak a testek, milyen összefüggés van a test mozgása és a külső hatások között: ezt vizsgálja a *dinamika*.

A tárgyalás során a legegyszerűbb modelltől haladunk a bonyolultabbak felé.

Anyagi pont kinematikája

A legegyszerűbb, legelvontabb – de ennek ellenére a gyakorlatban is használható – modell az *anyagi pont* vagy *tömegpont*, amelynek kiterjedése nincs, de tömege van. Tárgyalása azért fontos, mert

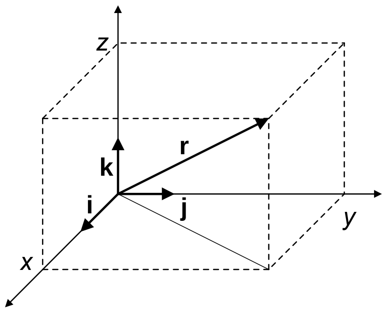
- itt könnyen bevezethetők a mozgás leírásához szükséges alapfogalmak,
- a mozgás egyszerű leírását teszi lehetővé,
- a *modell alapján kapott fogalmak és eredmények a bonyolultabb modelleknél is használhatók*.

A továbbiakban általában a tömegpont kifejezést használjuk.

A kinematika alapmennyiségei

A kinematika egyszerűen *leírja* a test mozgását, anélkül, hogy a mozgás körülményeivel foglalkozna. Ehhez szükség van egy olyan eszköztárra, amellyel a test mozgását számszerűen jellemezni lehet (hol van, hogyan mozog).

Helyzetmegadás, helyzetvektor, pálya, út, elmozdulás

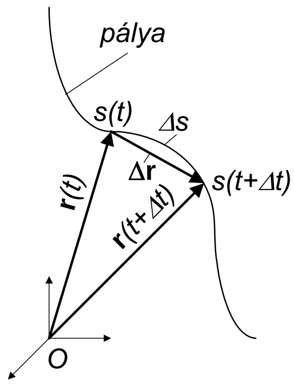


A mozgás leírásához a tömegpont helyzetét kell megadnunk az idő függvényeként.
A tömegpont helyzete megadható pl. egy derékszögű koordinátarendszerben a *tömegpont x,y,z koordinátáival*, illetve az ide mutató $\mathbf{r}(x,y,z)$ *helyzetvektor komponenseivel*.
Ha bevezetjük a koordinátatengelyek irányát megadó $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat, akkor a helyzetvektor így írható

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Ha a tömegpont mozog, akkor a helyzetvektor (és komponensei) változnak, vagyis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Rightarrow x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$



Eközben a tömegpont a helyzetvektor végpontja által leírt *pályagörbén* halad. A pályagörbén egy önkényesen kiválasztott nulla időponttól a t időpontig befutott *szakasznak az* $s = s(t)$ *hosszát* a tömegpont által *megtett útnak* nevezik. A t és $t+\Delta t$ pillanatok között megtett Δs út eszerint: $\Delta s = s(t+\Delta t)-s(t)$.
A tömegpont helyzetét a t időpillanatban az $\mathbf{r}(t)$ helyzetvektor adja meg. Azt, hogy a pályagörbe egy kiszemelt $\mathbf{r}(t)$ pontjából egy másik $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ pontjába való átmenet során a tömegpont milyen irányban, mekkora távolságra mozdult el, a kiindulópontból a végpontba mutató

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y(t) &= y(t+\Delta t) - y(t) \\ \Delta z(t) &= z(t+\Delta t) - z(t) \end{aligned}$$

vektorral jellemezhetjük. Ez az *elmozdulásvektor*, amelynek komponenseit is megadtuk.

Látható, hogy az elmozdulás és az út – bár egységük ugyanaz – két lényegesen különböző mennyiség: az elmozdulás vektor, az út skalár, és általában a nagyságuk is különböző.

A sebesség és a gyorsulás

Az elmozdulás illetve a pályán való haladás "gyorsasága" – a szokásos módon – a változás és a hozzá szükséges idő hányadosával jellemezhető. Ha egy rövid Δt idő alatt az elmozdulás $\Delta\mathbf{r}$, akkor ez a jellemző

$$\mathbf{v}_{átl} = \frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

alakban írható fel. Ez a mennyiség a tömegpontnak a (t, $t+\Delta t$) időintervallumra vonatkozó *átlagos sebessége*. Ez nem nagyon pontos jellemzése az elmozdulás "ütemének", mert általában nagysága és iránya is függ a választott időtartam hosszától (véges időtartamon belül a mozgás „üteme” és iránya változhat).
Megadott t időpillanatban érvényes, pontos jellemzőt kapunk, ha az időtartam hosszát végtelenül kicsire csökkentjük és a

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

határértéket számítjuk ki, aminek a jelölésére szolgál az egyenlet jobb oldalán álló differenciálhányados-szimbólum. Az így kapott mennyiség a tömegpont *pillanatnyi sebessége* vagy egyszerűen a *sebessége* a t időpillanatban.
A fenti differenciálhányados eltér a szokásos alaktól, hiszen itt egy vektorra vonatkozik. A matematikában egy vektor differenciálhányadosán azt a vektort értik, amelynek komponensei a vektor (skaláris) komponenseinek a differenciálhányadosaival egyenlők:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k}\,.$$

Így a sebességvektor komponensei:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt},$$

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$

A sebesség nagysága a vektorokra vonatkozó szabálynak megfelelően

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

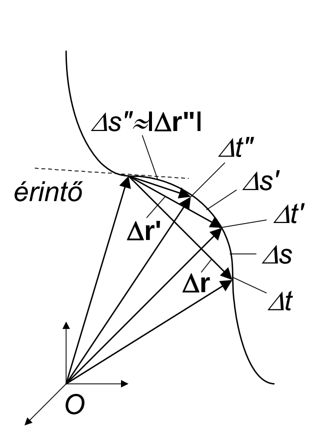
Az ábra alapján jól látható, hogy az elmozdulás és az út nagysága általában nem azonos, de az is látható, hogy igen kis elmozdulásoknál fennáll a

$$|\Delta\mathbf{r}| \approx \Delta s$$

összefüggés. Ezt felhasználva, a sebességre vonatkozóan újabb megállapításokat tehetünk.
Egyrészt a sebesség nagyságára a

$$v(t) = \left|\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right| = \frac{|d\mathbf{r}(t)|}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}.$$

kifejezést kaphatjuk, másrészt az is látható (ábra), hogy a



sebességvektor a *pálya érintőjé*nek irányába mutat. Ezért, bevezetve az érintőirányú $\mathbf{u}_T$ egységvektort, a sebességvektor más alakban is felírható. Ehhez a sebesség kifejezését – formálisan *ds*-sel osztva és szorozva, majd figyelembe véve, hogy *ds=dr* – írjuk át az alábbi módon:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dr}\frac{ds}{dt}\ .$$

Itt az első tényező az elmozdulás illetve a sebesség irányába mutató egységvektor, ami egyúttal a pálya érintőjének irányába mutat ($\mathbf{u}_T$), a második tényező pedig a sebesség nagysága (v), így a sebességvektor az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T\ .$$

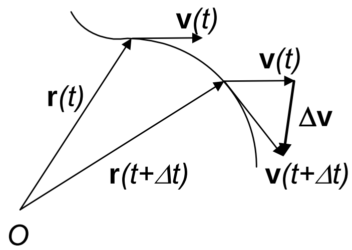
Megjegyzések:

- A sebesség nagyságára vonatkozó fenti összefüggés szigorúan véve csak a (pillanatnyi) sebességre érvényes, az átlagos sebességre csak akkor, ha a sebesség időben állandó (közelítőleg érvényes "igen rövid" időtartamra vonatkozó átlagos sebességre is).
- A sebesség nagyságából kiszámítható a tömegpont által adott idő alatt megtett út is:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t')dt'\ .$$

A gyakorlatban *átlagsebességnek* nevezik egy adott időtartam alatt befutott út s hosszának és az időnek a hányadosát: $\bar{v} = \dfrac{s_{12}}{t_2 - t_1}$

Egy mozgó tömegpont sebessége változhat. Elvi és gyakorlati szempontból is fontos számszerűen jellemezni a sebesség változásának "ütemét", amit ismét a változás és a változás időtartamának hányadosa ad meg. A közelítő jellemzésre az *átlagos gyorsulás* (ábra)



$$\mathbf{a}_{átl} = \frac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}\ ,$$

a pontos jellemzésre az

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

pillanatnyi gyorsulás szolgál. A gyorsulásvektor komponensei a sebességvektor mintájára:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2},$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2},$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}.$$

A gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Példa a kinematikai mennyiségek számítására:

Ha az $\mathbf{r}(t)$ függvény az alábbi

$$x(t) = 2 + 3t^3$$
$$y(t) = 3t$$
$$z(t) = 1 + 2t + t^2,$$

akkor a sebesség:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 9t^2$$
$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 3$$
$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = 2 + 2t,$$

a gyorsulás pedig:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 18t$$
$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 0$$
$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = 2.$$

A helyzetvektor kiszámítása a gyorsulásból

A valóságban a helyzetvektor időfüggését többnyire nem ismerjük, hanem a gyorsulásra vonatkozóan vannak ismereteink (ezzel a kérdéssel később részletesen foglalkozunk a Newton-törvények kapcsán).
A gyorsulás időfüggésének ismeretében a sebesség kiszámítható a differenciálás inverz művelete, az integrálás segítségével.
Ha a mozgást egy önkényesen választható t_0 időpillanattól vizsgáljuk, akkor a gyorsulás definícióját felhasználva kapjuk:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{v} = \mathbf{a}(t)dt$$
$$dv_x = a_x(t)dt,\ dv_y = a_y(t)dt,\ dv_z = a_z dt$$

A fenti vektoregyenlet komponens-egyenleteinek integrálásával megkaphatjuk a sebesség-komponensek

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt' = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x(t')dt',$$
$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t')dt' = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y(t')dt',$$
$$v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t')dt' = v_{0z} + \int_{t_0}^{t} a_z(t')dt'$$

illetve a sebességvektor

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')dt' = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')dt'$$

időfüggését. Jelölés: $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$, a t_0 időpillanatban érvényes ún. *kezdeti sebesség*.

Hasonlóan kapható a helyzetvektor időfüggése a sebesség integrálásával:

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' = x_0+\int_{t_0}^{t} v_x(t')dt',$$

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} v_y(t')dt' = y_0+\int_{t_0}^{t} v_y(t')dt',$$

$$z(t)=z(t_0)+\int_{t_0}^{t} v_z(t')dt' = z_0+\int_{t_0}^{t} v_z(t')dt'.$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')dt' = \mathbf{r}_0+\int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')dt'$$

Itt a kezdeti helyvektorra az $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ jelölést alkalmaztuk.
Az integrálás határozatlan jellegéből következik, hogy a helyzetvektor időfüggésének meghatározásához a gyorsulás időfüggésének ismerete mellett még 6 állandót – pl. a 3 kezdeti koordinátát és a 3 kezdeti sebességet – is ismerni kell.

Kinematikai összefüggések konkrét esetekben

A fenti egyenletek megoldásához ismerni kell az integrálandó függvényeket, mindenek előtt a gyorsulás $\mathbf{a}(t)$ időfüggését. A feladat megoldása – vagyis az $\mathbf{r}(t)$ függvény megkeresése – attól függően könnyű vagy nehéz, hogy milyen a gyorsulásvektor és annak időfüggése. A mozgások csoportosításánál ez a szempont fontos szerepet játszik.

Mozgás állandó gyorsulással

Ha $\mathbf{a}$ = *állandó*, akkor a gyorsulás a_x, a_y, a_z komponensei is állandók, ezért

$$v_x(t)=v_{0x}+\int_{t_0}^{t} a_x dt = v_{0x}+a_x(t-t_0).$$

Hasonlóan:

$$v_y(t)=v_{0y}+a_y(t-t_0)$$
$$v_z(t)=v_{0z}+a_z(t-t_0).$$

Ugyancsak integrálással kapható a helyvektor a sebességből:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} v_x(t)dt = x_0+\int_{t_0}^{t} v_{0x}+a_x(t-t_0)dt =$$
$$= x_0+v_{0x}(t-t_0)+\tfrac{1}{2}a_x(t^2-t_0^2)-a_x t_0(t-t_0),$$

vagyis

$$x(t)=x_0+v_{0x}(t-t_0)+\tfrac{1}{2}a_x(t-t_0)^2.$$

Hasonlóan:

$$y(t)=y_0+v_{0y}(t-t_0)+\tfrac{1}{2}a_y(t-t_0)^2$$

$$z(t)=z_0+v_{0z}(t-t_0)+\tfrac{1}{2}a_z(t-t_0)^2.$$

Vektori alakban ugyanezek az összefüggések:

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}(t-t_0)$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0(t-t_0)+\tfrac{1}{2}\mathbf{a}(t-t_0)^2.$$

Ha a mozgás vizsgálatát a $t_0=0$ időpillanatban kezdjük, és a tömegpont ekkor az $\mathbf{r}_0=0$ origóban van, akkor az ismert egyszerű összefüggéseket kapjuk:

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}_0 t+\tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2.$$

Mivel a kezdősebességre és a gyorsulásra semmiféle kikötést nem tettünk, az állandó gyorsulású mozgás pályája általában nem egyenes. A legegyszerűbb mozgáshoz úgy jutunk el, hogy újabb egyszerűsítő feltételeket alkalmazunk.

Egyenes vonalú mozgás állandó gyorsulással

A mozgás akkor lesz egyenesvonalú, ha a gyorsulás a sebesség irányát nem változtatja meg, vagyis, ha a gyorsulásvektor ($\mathbf{a}$) és a kezdeti sebesség vektor ($\mathbf{v_0}$) egyenese egymással párhuzamos. Ekkor ugyanis az egyik koordinátatengelyt – például a z tengelyt – a kezdeti sebesség egyenesén felvéve:

$$\mathbf{v}_0\{0,0,v_{0z}\}$$

$$\mathbf{a}(t)\{0,0,a_z(t)\}$$

és

$$\mathbf{r}_0\{0,0,z_0\}.$$

Ebből következik, hogy az integrálás után a sebességvektornak és a helyzetvektornak is csak a z-komponense lesz nullától különböző, vagyis a mozgás a z-tengelyen zajlik, és egyetlen koordináta segítségével írható le:

$$\mathbf{a}(t)\{0,0,a_z(t)\}$$

$$\mathbf{v}(t)\{0,0,v_z(t)\}$$

$$\mathbf{r}(t)\{0,0,z(t)\}.$$

A legegyszerűbb eset az, ha a gyorsulás időben állandó. Ilyen mozgás pl. a lejtőn való lecsúszás és a szabadesés. A kinematikai összefüggések ilyenkor:

$$v_z(t)=v_{0z}+a_z t$$

$$z(t)=z_0+v_{0z}t+\tfrac{1}{2}a_z t^2.$$

Ha a test nyugalomból, az origóból indul, akkor $v_{0z}=0$, és $z_0=0$. Ha emellett még $t_0=0$ is fennáll, akkor az egyenletek:

$$v_z(t)=a_z t$$

$$z(t)=\tfrac{1}{2}a_z t^2.$$

KÍSÉRLET: golyós kötél ejtése (függőleges kötélre golyókat erősítünk, a padlótól rendre *d, 4d, 9d, 16d*, stb távolságra, majd a kötelet elengedjük. A golyók a padlón egyenlő időközökben koppannak).

KÍSÉRLET: Galilei lejtő (lejtőbe vágott csatornákban azonos magasságú helyről induló golyók útjába az indulási helytől rendre *d, 4d, 9d, 16d*, stb távolságra csengőket helyezünk el, majd a golyókat egyszerre elengedjük a lejtőn. A golyók egyenlő időközökben csendítik meg a csengőket).

Értelmezés:
Ha a két koppanás (csengetés) közti idő t_1, akkor az n-edik golyó koppanásának (csengetésének) időpontja: $t_n = nt_1 \ \ (n = 1,2,3....)$, és így a különböző golyók által megtett (azaz különböző n értékekhez tartozó) utakra kapjuk:

$$z_n = \tfrac{1}{2} a_z n^2 t_1^2$$

$$z_n = n^2 z_1 = n^2 d$$

$$(z_1 = d).$$

Ebből a golyók útjaira valóban a fenti számsorozat adódik, a golyók egymás közti távolságára pedig a *3d, 5d, 7d,...* számok adódnak.
Lejtő segítségével pontosabb vizsgálatot is végezhetünk.

KÍSÉRLET: Légpárnás lejtőn lecsúszó test sebességét (v_z) mérjük különböző helyeken, és ábrázoljuk a befutott út (z) négyzetgyökének függvényében (mert $v_z = \sqrt{2a_z z} = \sqrt{2a_z}\sqrt{z}$). Ha a mért pontok egyenest adnak, akkor igaz, hogy a mozgás gyorsulása állandó, és az egyenes meredekségéből ($M_e = \sqrt{2a_z}$) a gyorsulás megkapható: $a_z = \dfrac{M_e^2}{2}$.

Ha $a_z = 0$, akkor *egyenletes* is a mozgás, és az egyenletek így egyszerűsödnek:

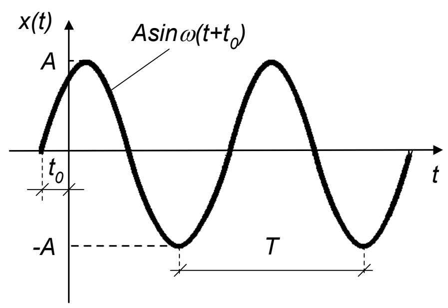
$$v_z = v_{0z} = \mathit{állandó}$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z} t\ .$$

KÍSÉRLET: Mikola-cső: folyadékkal töltött, lezárt csőben buborék van. A csövet ferdén tartva a buborék egyenletes mozgást végez. Igazolás: metronómmal egyenlő időtartamokat jelölünk ki, és minden időjelnél az üvegcsövön megjelöljük a buborék helyét. A jelek egyenlő távolságra lesznek egymástól.

Egyenes vonalú mozgás változó gyorsulással, a harmonikus rezgőmozgás

Egyenes vonalú, változó gyorsulású mozgás nagyon sokféle lehet. Az egyik legfontosabb ilyen mozgás a rezgőmozgás. Az egyenes mentén rezgő tömegpont úgy mozog, hogy mozgásirányát időről-időre ellenkezőre változtatja.
A rezgőmozgás speciális esete a *harmonikus rezgőmozgás*, amikor a pontnak az egyenesen (pl. az x-tengelyen) elfoglalt helyzete időben szinusz (koszinusz) függvény szerint változik (ábra).



Ez a mozgás azért fontos, mert (többé-kevésbé pontosan) a valóságban is létezik, és mert segítségével bármilyen rezgőmozgás leírható.

KÍSÉRLET: megpendített acéllap végének rezgőmozgását alatta egyenletesen mozgatott kormozott üveglapra rajzoltatjuk, és kivetítjük. Ha sikerült kis csillapítást elérni, akkor a kapott görbe valóban szinuszos jellegű, tehát közelítőleg harmonikus rezgés. (A valódi rezgés csillapított!)

Ha a mozgás egyenese az x-tengely, akkor az ábrán látható esetben (tehát amikor az időmérés kezdete nem egyezik azzal az időpillanattal, amikor a pont a $+x$ irányban mozogva áthalad az $x=0$ helyzeten) a harmonikus rezgés kitérése az idő függvényében az

$$x(t) = A \sin \omega(t + t_0)$$

függvénnyel irható le. Itt A a legnagyobb kitérés, amit a rezgés amplitúdójának neveznek, a t_0 mennyiséggel pedig azt vesszük figyelembe, hogy a $t=0$ időpillanatban a kitérés nem nulla, hanem $x_0 = x(0) = A \sin \omega(t_0)$. A kifejezés tovább alakítható, ha bevezetjük az $\omega t_0=\delta$ jelölést:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

A δ mennyiség azt adja meg, hogy a tömegpont a rezgésének milyen fázisában van az időmérés kezdetén ($t=0$), ezért δ-t gyakran kezdőfázisnak nevezik. Mivel az időmérés kezdete tőlünk függ, δ értéke tetszőleges lehet, ez az oka annak, hogy a harmonikus rezgés leírására a *sin* és a *cos* függvény egyformán jól használható (ha pl. a fenti kifejezésben az időmérés kezdetét úgy választjuk meg, hogy $\delta=\omega t_0=\pi/2$, akkor a *sin* helyett kezdőfázis nélküli *cos* függvényt kapunk).
Milyen a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont sebessége és gyorsulása?
A kitérés időfüggését megadó

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

függvényből a tömegpont sebessége és gyorsulása differenciálással kapható:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t).$$

Vagyis ez egy olyan mozgás, ahol a gyorsulás nagysága a kitéréssel arányos, iránya pedig azzal ellentétes.

Görbe vonalú mozgás állandó gyorsulással:

Ilyen pl. a hajítás, ahol az állandó nehézségi gyorsulás (g) érvényes.
Ha a gyorsulás állandó, akkor $t_0=0$ esetén:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2.$$

Általában

$$\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$$

$$\mathbf{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0).$$

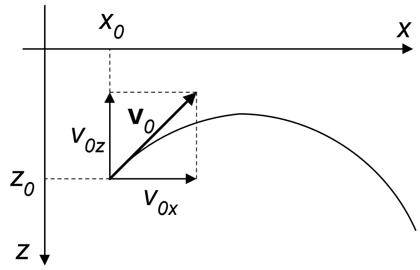
Egyserűsítés: válasszuk ki az **a** és $\mathbf{v}_0$ vektorok által meghatározott síkot, és vegyük fel a koordinátarendszerünket úgy, hogy pl. az *xz* sík ezzel párhuzamos legyen. Ekkor

$$\mathbf{a}(a_x, 0, a_z)$$
$$\mathbf{v}_0(v_{0x}, 0, v_{0z})$$
$$\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0).$$

Forgassuk úgy a rendszert, hogy a *z*-tengely a gyorsulás irányába mutasson, ekkor

$$\mathbf{a}(0, 0, a_z)$$
$$\mathbf{v}_0(v_{0x}, 0, v_{0z})$$
$$\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0).$$

Ezek után a koordinátarendszert addig toljuk az *y*-tengely irányában, amíg $y_0=0$ lesz, így ekkor a test kezdeti helyvektora és kezdeti sebessége is az *xz* síkban van, és



$$\mathbf{a}(0, 0, a_z)$$
$$\mathbf{v}_0(v_{0x}, 0, v_{0z})$$
$$\mathbf{r}_0(x_0, 0, z_0).$$

A gyorsulás integrálásával kapjuk, hogy

$$v_x = v_{0x} \qquad x(t) = x_0 + v_{0x}t,$$
$$v_y = v_{0y} = 0 \qquad y(t) = y_0 = 0,$$
$$v_z = v_{0z} + a_z t \qquad z(t) = z_0 + v_{0z}t + \tfrac{1}{2}a_z t^2$$
$$(t_0 = 0).$$

A fenti egyenletek írják le a hajításokat, csak ekkor az $a_z = g$ értéket kell behelyettesíteni.

A egyenletekből látszik, hogy a mozgást jellemző adatoknak csak *z és x* komponense lesz, vagyis *síkmozgás* jön létre.

A mozgás jellege a kezdősebesség-vektortól függ. Nehézségi erőtérben történő mozgás (hajítás) esetén:

általában:	ferde hajítás,
$v_{0z} = 0,\ v_{0x} \neq 0$:	vízszintes hajítás,
$v_{0x} = 0,\ v_{0z} \neq 0$:	függőleges hajítás,
$v_{0x} = v_{0z} = 0$:	szabadesés.

A koordinátákat megadó egyenletekből az időt kiküszöbölve megkapjuk a *z(x)* függvényt, azaz a pálya egyenletét

$$z(x) = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x + \frac{a_z}{2v_{0x}^2}x^2,$$

ami – a tapasztalatnak megfelelően – parabola.

Görbe vonalú mozgás változó gyorsulással, a körmozgás

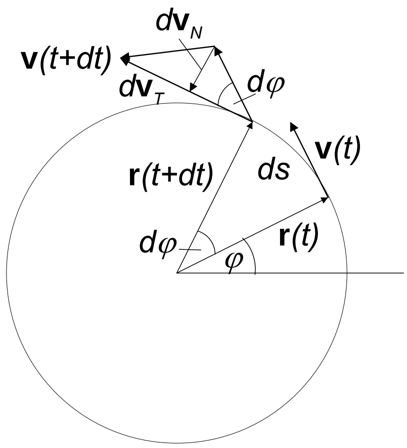
A sebesség az általános definíció alapján:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

a gyorsulás pedig formálisan:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Konkrét kifejezések természetesen csak akkor kaphatók, ha ismerjük a mozgást.
Vizsgáljunk egy egyszerű, de gyakorlatilag fontos esetet, a *körmozgást*, amelynél a pálya kör alakú, és próbáljunk konkrét kifejezést kapni a gyorsulásra.



Az ábrán a pálya egy r sugarú kör, amelyen feltüntettünk egy kis elmozdulást, és berajzoltuk az elmozdulás két végpontján érvényes sebességvektorok különbségét. A sebességvektor megváltozását bontsuk fel egy *tangenciális* (érintő irányú) $d\mathbf{v}_T$ - és egy arra merőleges $d\mathbf{v}_N$ és összetevőre. Ha az elmozdulás végtelenül kicsi, akkor a $d\mathbf{v}_N$ összetevő merőleges a pályagörbére, ezt az összetevőt *normális* összetevőnek nevezik. A két összetevő nagysága:

$$dv_N = v d\varphi \quad illetve \quad dv_T = dv$$

A megfelelő gyorsulás-komponensek:

$$a_N = \frac{dv_N}{dt} = v\frac{d\varphi}{dt} \quad illetve \quad a_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Így a gyorsulás a pályára merőleges, normális ($\mathbf{u}_N$)- és a pálya érintőjének irányába ($\mathbf{u}_T$) mutató, tangenciális egységvektorokkal kifejezve:

$$\mathbf{a} = v\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{u}_N + \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T$$

(mivel a sebességváltozás normális komponense a kör középpontja felé mutat, az itt bevezetett $\mathbf{u}_N$ egységvektor is ilyen irányú).
Az ábrából látható, hogy

$$d\varphi = \frac{ds}{r} \text{ azaz } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}v.$$

Így a gyorsulás

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{r}\mathbf{u}_N + \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T.$$

A normális gyorsuláskomponens neve *centripetális gyorsulás*, amely a kör középpontja felé mutat, és a sebesség irányváltozásából származik, az érintőleges komponens pedig a *pályamenti gyorsulás*, amely a sebesség nagyságának változásából származik.
A mozgás jellemezhető a ponthoz húzott sugár és egy önkényesen választott sugár (ábra) közötti szög változásával is: $\varphi = \varphi(t)$. Bevezetve a szögelfordulás (φ) ütemét jellemző szögsebességet (ω):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

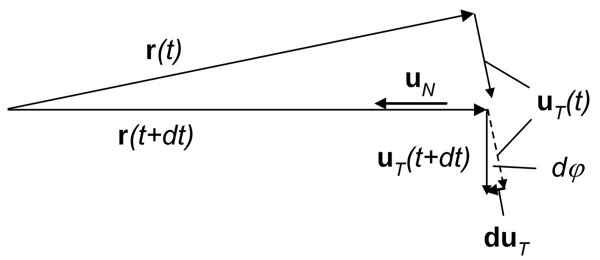
a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\omega\mathbf{u}_N.$$

*************** ***************** *****************

A gyorsulás általános kifejezését közvetlenül a sebesség differenciálásával is megkaphatjuk. Tudjuk, hogy a sebesség mindig a pálya érintőjének irányába mutat, ezért kifejezhető a sebesség v nagyságával és a pálya érintőjének irányába mutató (időben változó irányú) $\mathbf{u}_T(t)$ egységvektorral is: $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{u}_T(t)$
Ebből a gyorsulás:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\mathbf{u}_T(t) + v(t)\frac{d\mathbf{u}_T(t)}{dt}.$$



Bebizonyítható, hogy az érintő irányú egységvektor idő szerinti differenciálhányadosa a pályára merőleges, a pálya homorú oldala felé mutató vektor (ábra), amelynek nagysága $\frac{d\varphi}{dt}$. Itt $d\varphi$ az egységvektor szögelfordulása dt idő alatt. Ezzel a gyorsulás

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\frac{d\varphi(t)}{dt}\mathbf{u}_N .$$

Ha a pálya kör, akkor $d\varphi$ egyben a helyvektor szögelfordulásával is egyenlő, ezért a $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ szögsebesség bevezetésével az

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\omega\mathbf{u}_N$$

eredményt kapjuk.

*************** ***************** ******************

A szögsebesség változási sebességének jellemzésére bevezethető a *szöggyorsulás* (β)

$$\beta = \frac{d\omega}{dt},$$

és a szögjellemzőkkel a sebesség és a gyorsulás is kifejezhető. Ehhez először vegyük figyelembe, korábbi eredményünket: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$. Másrészt ennek alapján $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$ (körmozgásnál *r=állandó*). Így végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = r\omega\mathbf{u}_T$$

$$\mathbf{a} = r\omega^2\mathbf{u}_N + r\beta\mathbf{u}_T .$$

Vagyis:

$$v_T = v = r\omega \qquad v_N = 0$$

$$a_T = r\beta \qquad a_N = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} .$$

Mivel a szögjellemzők közötti összefüggések pontosan ugyanolyanok, mint a koordinátákkal korábban felírt kinematikai jellemzők összefüggései, az ott elmondottak itt is alkalmazhatók:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \beta(t)dt$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt .$$

Állandó szöggyorsulás (azaz állandó pályamenti gyorsulás) esetén az integrálás könnyen elvégezhető, és azt kapjuk, hogy

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta(t - t_0)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\beta(t - t_0)^2 .$$

Vagyis a körmozgást végző pont mozgása ilyenkor az egyenes vonalú, állandó gyorsulású mozgással analóg módon írható le.