Munka és energia

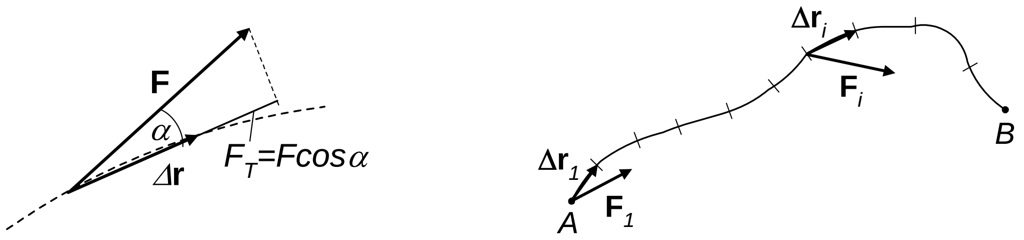
A mozgásegyenlet megoldásához a tömegpontra ható erő időfüggésének ismerete szükséges, ami igen komoly nehézségeket okoz. Az erőhatásokat megadó erőtörvények ugyanis általában az erő helyfüggését adják meg, így az erő időfüggésének megadásához ismerni kellene a helyvektor időfüggését, vagyis tudni kellene a mozgásegyenlet megoldását.
A probléma megoldását az teszi lehetővé, hogy az erő helyfüggésének ismeretében bevezethető egy olyan mennyiség, amelyre (bizonyos feltételek mellett) megmaradási törvény érvényes. Ehhez a mennyiséghez a *munka* bevezetésével juthatunk el.

A munka fogalma

Egy tömegpontra ható $\mathbf{F}$ erő akkor végez munkát, ha az erő működése közben (de nem feltétlenül annak kizárólagos hatására) a tömegpont elmozdul. A végzett elemi munkát (ΔW) egy elemi $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás során az erő és az elmozdulás skaláris szorzataként definiáljuk (baloldali ábra):

$$\Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}\,.$$

Látható, hogy mechanikai definíciója szerint a munka előjeles mennyiség, továbbá mechanikai értelemben egy erő nem végez munkát, ha nincs elmozdulás, vagy ha az elmozdulás merőleges az erőre.



Véges *AB* elmozdulásnál az elmozdulás során változhat az erő nagysága és iránya is, ezért az elmozdulást elemi szakaszokra kell bontani (jobboldali ábra), és a munkát közelítőleg az elemi munkák összege adja meg. A munka pontos értékét úgy kapjuk meg, hogy a felosztást finomítva, megkeressük az összeg határértékét:

$$W_{AB} = \lim_{\Delta r\to 0}\sum_i \mathbf{F}_i\Delta\mathbf{r}_i = \int_A^B \mathbf{F}d\mathbf{r}\,.$$

Ennek a határértéknek a jelölésére szolgál a fenti integrál, amelyet az erő *AB* görbére vonatkozó vonalintegráljának neveznek.
Állandó erő és egyenes pályán történő *s* nagyságú elmozdulás (út) esetén ebből megkapjuk az egyszerűbb, közismert

$$W = Fs\cos\alpha$$

alakot, ahol α az erő- és elmozdulásvektor által bezárt szög.

Munkatétel, mozgási energia

Ha egy tömegpontra erő hat, akkor ennek eredményeként a tömeg gyorsulni fog, és az erő közben munkát végez. A munka fogalmának hasznossága akkor derül ki, ha megnézzük, milyen összefüggés van az erő munkája és a test sebessége között?

Számítsuk ki, hogy mekkora munkát végez egy tömegponton a rá ható erők $\mathbf{F}_e$ eredője, ha a tömegpont az *1* helyzetből egy *2* helyzetbe megy át. A mozgásegyenletet és a skaláris szorzat koordinátás alakját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$W = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} dt = m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \,,$$

vagyis az eredő erő munkája az $\frac{1}{2} m v^2$ mennyiség megváltozásával egyenlő. Az összefüggés fordítva is érvényes: a felgyorsított test (ideális esetben) ugyanakkora munkát tud elvégezni a lefékeződése árán, mint amekkora munkával felgyorsítottuk. Más szóval a befektetett munka visszanyerhető, a test a munka révén jól meghatározott munkavégző képességre tett szert.

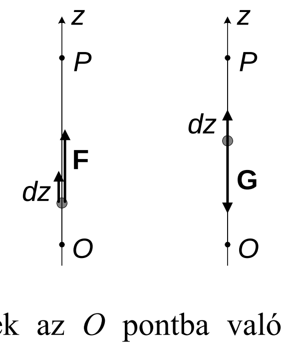
Az $E_m = \frac{1}{2} m v^2$ mennyiséggel egyértelműen meghatározott munkavégző képességet a tömegpont *mozgási energiá*jának nevezik. Ezzel a definícióval élve tehát azt mondhatjuk, hogy a tömegpontra ható eredő erő munkája a tömeg mozgási energiájának megváltozásával egyenlő:

$$W_e = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \Delta E_m \,.$$

Ezt a törvényt gyakran *munkatétel*nek nevezik.

Konzervatív erőtér, helyzeti energia

Egy tömegpontnak munkavégző képessége nem csak a mozgása következtében lehet, hanem egy külső erőtér jelenléte miatt is.
Közismert például, hogy a nehézségi erőtér hatására egy tömeg felgyorsulhat, és ennek következtében munkát tud végezni. Ezt a munkavégző-képességet a jelenlévő külső erőtér által a tömegen végzett munka teszi lehetővé, munkavégző képességről azonban csak akkor beszélhetünk, ha az egyértelműen megadható.
Ha egy tömeget a nehézségi erőtérben az *O* pontból (ábra) állandó sebességgel függőlegesen felemelünk a *h* magasságban lévő *P* pontba, akkor $F=F_z=mg$ nagyságú, felfelé mutató erőt kell kifejtenünk, és eközben



$$W^{OP} = \int_0^h F_z dz = \int_0^h mgdz = mgh$$

munkát végzünk a nehézségi erő ellenében. Ugyanakkor a lefelé mutató nehézségi erő (*z*-komponense $G_z=-F_z=-mg$) az emelés közben

$$W_{neh}^{OP} = -W^{OP} = -mgh$$

munkát végez.
A tömeget a *P* pontban elengedve, a nehézségi erő az eredetileg általunk végzett munkával azonos nagyságú munkát végez a testnek az *O* pontba való visszatérése közben, és – a veszteségektől eltekintve – a tömeg

$$W_{neh}^{PO} = W^{OP} = -W_{neh}^{OP} = \frac{1}{2} m v^2$$

mozgási energiára tesz szert. Eszerint a nehézségi erőtérben a kiszemelt *O* vonatkoztatási ponthoz viszonyítva *h* magasságra emelt tömegnek meghatározott munkavégző képessége, *energiája* van az erőtér jelenléte miatt. A példából az is kiderül, hogy ez az energia az utolsó egyenletben szereplő bármelyik munkával megadható, az egyértelműség követelménye miatt azonban jobb *az erőtér által végzett munkát* használni (a tömeget az erőtérrel szemben elmozdító erő lehet nagyobb is, mint az erőtér által kifejtett erő, így a folyamat során a tömeg mozgási energiára is szert tehet).

Egy testnek ilyen munkavégző képessége természetesen *más erőtér esetén is lehet*. Az egyedüli követelmény az, hogy adott pontban lévő testhez egyértelműen hozzárendelhető legyen az erőtér által végzett munka. Ez a fenti példa alapján azt jelenti, hogy a vonatkoztatási pont és a tömegpont helye közötti elmozdulásnál az erőtér munkája nem függhet az úttól (ez nem minden erő esetén teljesül: pl. súrlódási erő). Az ilyen erőket (erőtereket), amelyeknél a munkavégzés csak az elmozdulás kezdő és végpontjától függ, és így független az úttól, *konzervatív erőknek (erőtereknek)* nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy – mint látni fogjuk – ilyen erőtérben mozgó tömeg teljes mechanikai energiája megmarad, "konzerválódik".

Konzervatív erőtérben ($\mathbf{F}_k$) tehát általánosan bevezethetjük egy pontszerű testnek egy O vonatkoztatási ponthoz viszonyított energiáját tetszőleges P pontban az alábbi módon:

$$E_h^O(P) = -W_k^{OP} = -\int_O^P \mathbf{F}_k d\mathbf{r} .$$

Ez az energia a testnek a vonatkoztatási ponthoz viszonyított helyzetétől függ, ezért *helyzeti (vagy potenciális) energiának* (E_h) nevezik.

A konzervatív erő munkája csak a kezdő- és végponttól függ. Ez a definíció lehetőséget ad a konzervatív erőtér egy másik meghatározására is: ha egy pontból kiindulva valamilyen pályán visszatérünk a kiindulópontba, és ezen a zárt görbén kiszámítjuk a konzervatív erő összes munkáját, akkor a fenti definíció értelmében nullát kell kapnunk, azaz az erőtér akkor konzervatív, ha teljesül a

$$\oint_L \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = 0$$

feltétel.

Itt az integráljelen elhelyezett kis kör azt jelöli, hogy az integrálást (összegzést) egy zárt görbe (L) mentén végeztük el. (Ezt a műveletet a matematikában „körintegrálnak” nevezik.)

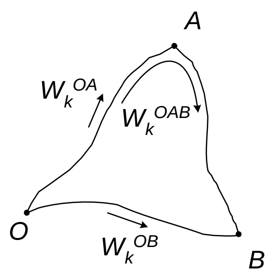
A nehézségi erőtér a tapasztalat szerint konzervatív, így az általános definíció alapján a vonatkoztatási ponthoz képest h magasságban az m tömeg helyzeti energiája (a bevezetőben mutatott példával összhangban)

$$E_h = -W_{neh}^{OP} = \int_0^h mgdz = mgh .$$

A fentiekből kitűnik, hogy a helyzeti energia – a mozgási energiával szemben – egy állandó erejéig határozatlan, hiszen nagysága a vonatkoztatási pont megválasztásától függ.

A vonatkoztatási ponttól való függés azonban gyakorlatilag nem okoz problémát, mert a fizikai folyamatok leírásánál általában az energia megváltozása fontos, a helyzeti energia *megváltozása* pedig nem függ a vonatkoztatási pont megválasztásától. Ezt az állítást az alábbi ábra alapján a következőképpen láthatjuk be. A helyzeti energia megváltozása az AB elmozdulás során:

$$\Delta E_h^{AB} = E_h^O(B) - E_h^O(A) = -\left(W_k^{OB} - W_k^{OA}\right) = -\int_O^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} - \left(-\int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r}\right).$$



Konzervatív erőtér munkája azonban nem függ az úttól, ezért a közvetlen OB elmozdulás során végzett munka ugyanaz, mint az OAB úton végzett munka:

$$\int_O^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = \int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r}.$$

Ezt az összefüggést figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_h^{AB} = -\int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = -\int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} ,$$

vagyis a helyzeti energia megváltozása csak az A és B pontok helyzetétől függ, és nem függ az O vonatkoztatási ponttól.

Az általános energia-munka összefüggés, az energiamegmaradás tétele tömegpontra

Ha a tömegpont konzervatív ($\mathbf{F}_k$)- és nem konzervatív ($\mathbf{F}_{nk}$) erők együttes hatása alatt mozdul el az A pontból a B pontba, akkor a munkatétel szerint írhatjuk, hogy

$$\int_A^B (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{nk}) d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{nk} d\mathbf{r} = W_k + W_{nk} = \Delta E_m ,$$

ahol W_k és W_{nk} a konzervatív- illetve nem konzervatív erők munkája.
Tudjuk viszont, hogy a konzervatív erők munkájára fennáll, hogy

$$W_k = -\Delta E_h ,$$

tehát az alábbi egyenletet kapjuk:

$$W_{nk} = \Delta E_m + \Delta E_h ,$$

vagyis a helyzeti- és mozgási energia megváltozásának összege a nem konzervatív erők munkájával egyenlő. Mivel a helyzeti (E_h)- és mozgási (E_m) energia

$$E = E_m + E_h$$

összegét rendszerint a tömegpont *teljes (mechanikai) energiájának* nevezik, a fenti állítás így is megfogalmazható:

$$\Delta E = W_{nk} ,$$

vagyis a *tömegpont teljes mechanikai energiájának megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő*.
Ha a tömegpontra csak konzervatív erők hatnak, vagy a rá ható nem konzervatív erők összes munkája nulla, akkor a tömegpont mechanikai energiája nem változik meg:

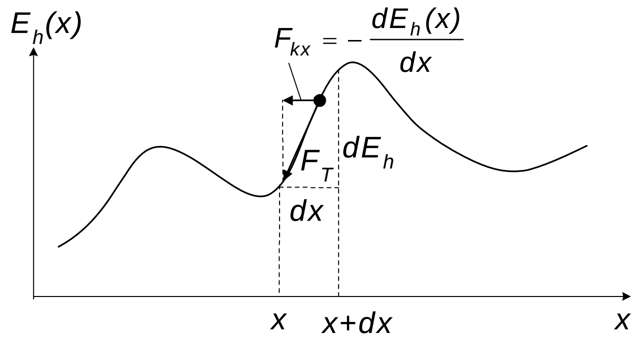
$$\Delta E = 0 .$$

Ez *az energia-megmaradás törvénye tömegpontra.*

Példák és alkalmazások

Erő és helyzeti energia

Egy pontszerű test helyzeti energiája a helynek egyértelmű függvénye. Vizsgáljunk először egy egyszerű egydimenziós esetet, amikor a helyzeti energia csak x-irányban változik. Ebben az esetben a helyzeti energia helyfüggését az $E_h = E_h(x)$ függvény adja meg (ábra). Egy elemi dx elmozdulás során a helyzeti energia megváltozása



$$dE_h = \frac{dE_h}{dx} dx .$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy a helyzeti energia megváltozása a konzervatív erő (esetünkben a nehézségi erő) munkájával is kifejezhető:

$$dE_h = -F_{kx} dx \,.$$

A két kifejezés összehasonlításából látható, hogy

$$F_{kx} = -\frac{dE_h(x)}{dx},$$

vagyis az erő x-komponense a helyzeti energia-görbe meredekségéből megkapható.

**************** ******************* *******************

Általános (három dimenziós) esetben tetszőleges erőtérben a test helyzeti energiája az $E_h = E_h(x,y,z)$ függvénnyel adható meg, aminek elemi megváltozása egy $d\mathbf{r}(dx,dy,dz)$ elemi elmozdulásnál

$$dE_h = \frac{\partial E_h}{\partial x}dx + \frac{\partial E_h}{\partial y}dy + \frac{\partial E_h}{\partial z}dz \,.$$

Másrészt a helyzeti energia megváltozása kifejezhető a konzervatív erő elemi munkájával is:

$$dE_h = -\mathbf{F}_k \mathbf{dr} = -(F_{kx}dx + F_{ky}dy + F_{kz}dz).$$

A két kifejezés összehasonlításából kapjuk, hogy

$$F_x = -\frac{\partial E_h}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial E_h}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_h}{\partial z},$$

vagyis az erő a helyzeti energia helyfüggésének ismeretében kiszámítható.

**************** ******************* *******************

Homogén gravitációs térben lévő m tömeg helyzeti energiája a magasság függvénye. Ez a függvény függőlegesen felfelé irányított z-tengely esetén:

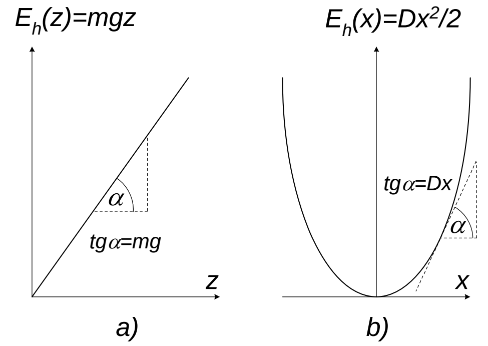
$$E_h(z) = mgz$$

(*a)* ábra).

A tömegpontra ható erő z-komponense a fentiek szerint

$$F_z = -\frac{dE_h(z)}{dz} = -mg\,,$$

ami valóban a lefelé mutató gravitációs erőt adja.



Megfeszített rugóhoz rögzített tömegpont helyzeti energiája, ha az x tengely nullpontja a tömegnek a rugó megfeszítetlen állapotához tartozó helyzetében van:

$$E_h(x) = -\int_0^x (-Dx)dx = \tfrac{1}{2}Dx^2 \,.$$

Természetesen a helyzeti energia deriváltja most is visszaadja az erőt

$$F_x = -\frac{dE_h(x)}{dx} = -Dx$$

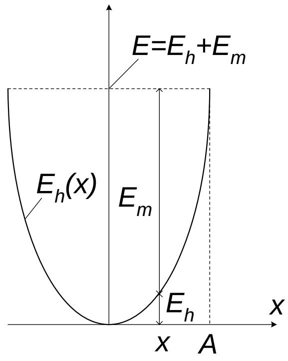
(*b)* ábra).

Az x*-tengely mentén rezgő pont* esetén az energia mozgási energiából és rugalmas helyzeti energiából áll:

$$E_m = \tfrac{1}{2}mv_x^2, \qquad E_h = \tfrac{1}{2}kx^2 \,.$$

Ha az energia megmarad, akkor

$$E_m + E_h = E = állandó.$$



Mivel az $x_{max}=A$ maximális kitérésnél a rezgő tömegpont sebessége nulla, ekkor a teljes energiája helyzeti energia: $E = E_h = \frac{1}{2}A^2$. Ennek ismeretében a helyzeti energia-grafikonból megállapítható a helyzeti- és mozgási energia megoszlása bármilyen x kitérésnél (ábra).

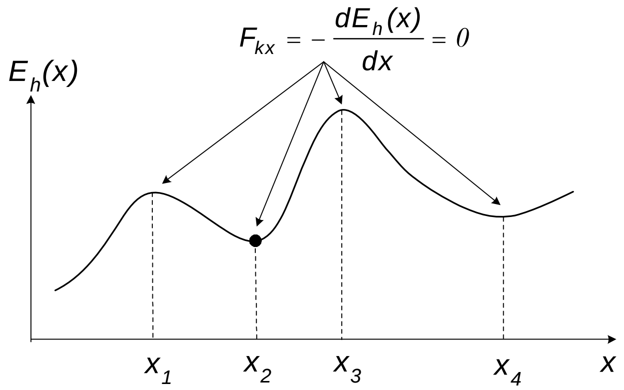
Helyzeti energia és egyensúlyi állapot

A helyzeti energia helyfüggése alapján azt is megállapíthatjuk, hogy egy test hol lehet *egyensúlyi helyzetben*, és ez az egyensúly milyen jellegű (stabilis vagy labilis). Tegyük fel, hogy egy pontszerűnek tekinthető test mindig azonos irányban (pl. Kelet felé) halad emelkedő és süllyedő szakaszokból álló pályán (pl. egy dombos vidéken haladó autó). Vegyük fel a koordinátarendszerünket úgy, hogy az x-tengely a haladási irányba (Kelet) mutasson. Ekkor a nehézségi erőtérben a test helyzeti energiája az x-koordináta függvényében pontosan az emelkedéseknek és süllyedéseknek megfelelően változik (ábra), hiszen a helyzeti energia arányos a magassággal.

Ha a testre (a kényszererőn kívül) csak a nehézségi erő hat, akkor a lehetséges *egyensúlyi helyzetei* a helyzeti energia helyfüggését megadó görbéről leolvashatók. Egyensúlyban az eredő erő x-komponensének nullának kell lenni, azaz:

$$F_{kx} = -\frac{dE_h(x)}{dx} = 0,$$

vagyis ezeken a helyeken a görbének szélsőértéke van.



Belátható, hogy az ábrán páratlan számmal jelölt helyeken (maximumok, ahol $\frac{d^2E_h(x)}{dx^2} < 0$) az egyensúly labilis, vagyis a testet kimozdítva az egyensúlyból, a fellépő erő az egyensúlyi helyzetből elviszi a testet, a páros számú helyeken (minimumok, ahol $\frac{d^2E_h(x)}{dx^2} > 0$) pedig az egyensúly stabilis, a kimozdításkor fellépő erő a testet visszaviszi az egyensúlyi helyzetbe.