

Merev test mozgása

Eddig olyan idealizált "testek" mozgását vizsgáltuk, amelyek a tömegpont modelljén alapultak. Ez azzal az előnnyel járt, hogy nem kellett foglalkozni a test kiterjedésével kapcsolatos mozgási lehetőségekkel, a forgással és a deformációval. Egy fokkal közelebb jutunk a valósághoz, de még mindig viszonylag egyszerűen leírható mozgást kapunk, ha kiterjedt testet vizsgálunk, amelyet azonban az egyszerűség kedvéért merevnek tekintünk, vagyis elhanyagoljuk a test alakváltozásait. A kiterjedt, de alakját nem változtató test a *merev test*.

A merev test kinematikájának alapjai

A merev test általános mozgása

A merev test mozgásának leírását a mozgás leírásához szükséges adatok, az ún. *szabadsági fokok* (f) számának vizsgálatával kezdjük.

Egy tömegpont mozgását egy helyvektorral, vagyis 3 skalár adattal jellemezhetjük, a tömegpont szabadsági fokainak száma tehát $f=3$.

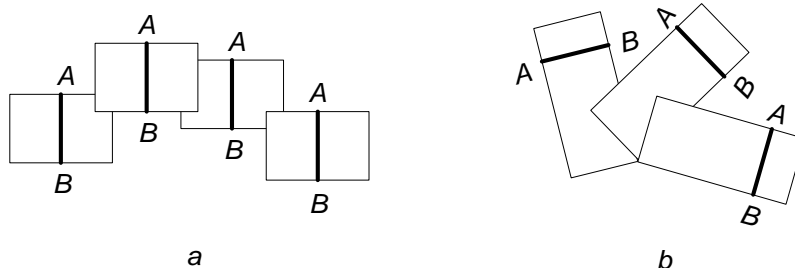
Egy merev test helyzetét akkor ismerjük, ha megadjuk három – nem egy egyenesbe eső – pontjának helyzetét, vagyis összesen 9 adatot, pl. a három pont derékszögű koordinátáit. (Ha egy pontot adunk meg, akkor ekörül tetszőlegesen foroghat a test, ha még egy pontot megadunk, akkor a pontokon áthaladó tengely körül még mindig foroghat, egy harmadik, a tengelyen kívül eső pont megadása rögzíti a test helyzetét.)

A valóságban azonban ennél kevesebb adat is elegendő, hiszen a test merevsége azt jelenti, hogy bármely két pontjának távolsága állandó. Így a három pont közötti három távolságot kifejezve pl. a pontok koordinátaival, a 9 koordináta között 3 összefüggést kapunk. A 9 adat közül tehát csak 6 független, ezért a szabad merev test szabadsági fokainak száma $f=6$.

Ha a merev test nem mozoghat szabadon, hanem mozgását valamilyen kényszer korlátozza (pl. egy kerék egy felületen gurul, vagy a test egy pont körül vagy rögzített tengely körül forog), akkor a szabadsági fokok száma a kényszertől függő mértékben csökken (a felsorolt példákban rendre $f=5$, $f=3$ és $f=1$).

A merev test lehetséges mozgásai közül a legegyszerűbb a *haladó mozgás*, vagy más néven *transzláció*, amikor a test minden pontja ugyanolyan pillanatnyi sebességgel mozog, vagyis az egyes pontok mozgása egymással párhuzamos pályákon zajlik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a testben felvett egyenes térbeli helyzete a mozgás során nem változik, önmagával párhuzamosan mozdul el (pl. az AB szakasz az *a* ábrán). Így mozog egy egyenes pályán haladó szán, vagy az "óriáskerék" kabinja. Mivel ilyenkor az összes pont ugyanúgy mozog, elég egyetlen pont mozgását jellemezni.

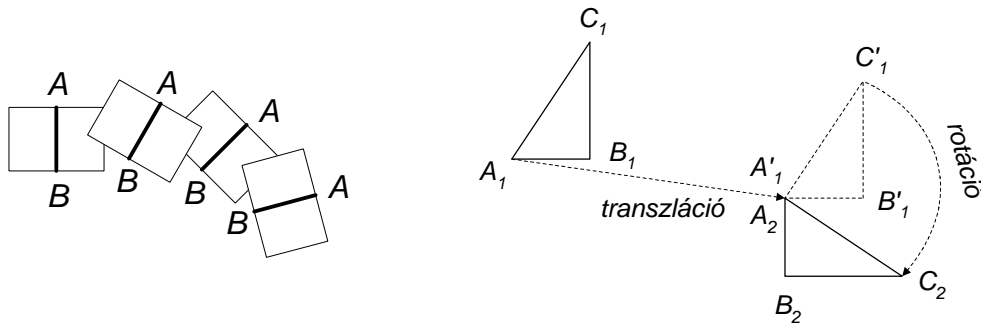
A merev test mozgása tulajdonképpen tömegpontoszerű apró részek mozgásaként is felfogható,



ezért haladó mozgásának leírására használhatók a tömegpontra vonatkozó összefüggések, így például a tömegközépponti tétel is.

A merev test másik – a tömegponthoz képest új – mozgási módja a *tengely körüli forgás* vagy más néven *rotáció*. Eközben a test különböző pontjai különböző sebességgel mozognak, és a testben felvett egyenes térben elfordul (*b* ábra).

A merev test mozgása közben általában mindkét mozgási mód egyidejűleg jelenik meg (baloldali ábra). Ez figyelhető meg pl. egy elgurított kerék, egy elhajított test vagy egy



kanyarodó jármű esetében. A szemlélet is azt sugallja, de be is bizonyítható, hogy a *merev test tetszőleges mozgása elemi transzlációk és rotációk egymásutánjaként fogható fel*. Ezt az eljárást egy síkidomnak a saját síkjában történő elmozdulása (az 1 helyzetből a 2 helyzetbe) kapcsán a jobboldali ábra szemlélteti: az $A_1 \rightarrow A_2$ transzlációval, és az azt követő $A_2 (A'_1)$ körüli forgatással tetszőleges elmozdulás létrehozható.

A merev test mozgásának transzlációra és rotációra történő felbontását könnyen bemutathatjuk, ha egy pontjának mozgását egy külső K koordináta-rendszerből és a test tömegközéppontjához rögzített K^{TK} rendszerből is megvizsgáljuk (ábra).

A helyvektorok között ekkor fennáll az

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{TK} + \mathbf{r}_i^{TK}$$

összefüggés, amiből a sebességekre azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{TK} + \mathbf{v}_i^{TK}$$

Mivel a tömegközéppont és az i -edik pont távolsága adott, a pont \mathbf{v}_i^{TK} pillanatnyi

sebessége merőleges lesz az \mathbf{r}_i^{TK} helyvektorra, így ez a sebesség a két vektorra

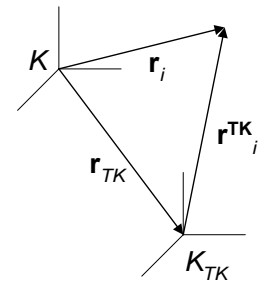
merőleges $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektorral adható meg:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{TK} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i^{TK}).$$

Ez azt jelenti, hogy a merev test bármely pontjának mozgása felbontható a tömegközéppont transzlációs mozgására és a tömegközépponton átmenő tengely körüli forgásra. A megfelelő forgástengely helyzete azonban a pont tényleges sebességétől függ, vagyis a mozgás során változik, ezért ez a felbontás csak elemi elmozdulásokra igaz. Mivel a fenti gondolatmenet a test bármelyik pontjára érvényes, azt is kimondhatjuk, hogy az egész merev test mozgása a tömegközéppont elemi transzlációinak és a tömegközépponton átmenő tengely körüli elemi forgásoknak az egymásutánjaként fogható fel.

A merev test mint pontrendszer

A merev testet kis részekre felosztva (ábra), közelítőleg pontokból állónak tekinthetjük, és a pontrendszerre vonatkozó összefüggéseket használhatjuk. A pontos leíráshoz úgy jutunk el, hogy a felosztást egyre finomítjuk és megnézzük, hogy eközben a pontrendszerre felírt



mennyiségek milyen határértékhez tartanak. A merev testre vonatkozó mennyiségekként illetve összefüggésekként a határértéket fogadjuk el (bebizonyítható, hogy ezek a határértékek léteznek, de ezzel itt nem foglalkozunk).

A felosztás alapján a test teljes térfogatát és teljes tömegét a

$$V = \sum_i \Delta V_i \quad m = \sum_i \Delta m_i$$

összefüggések adják meg. A teljes tömeg a sűrűséggel is kifejezhető az $m = \rho \Delta V$ összefüggés felhasználásával. Mivel a sűrűség a helytől is függhet, az i -edik térfogatelem közelítő

tömegét a térfogatelemben érvényes átlagos ρ_i sűrűséggel a $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$ összefüggés adja meg. Ezzel a teljes tömeg közelítő értéke

$$m \approx \sum_i \rho_i \Delta V_i,$$

a pontos érték pedig a felosztás finomításával kapható meg

$$m = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Itt az egyenlet jobboldalán álló ún. térfogati integrállal itt nem foglalkozunk részletesebben. Egyelőre elég, ha végtelenül finom felosztáson történő összegzésnek tekintjük, amelyben dV az \mathbf{r} helyvektorral megadott pont körül felvett elemi térfogatot jelent.

A pontrendszeréknél bevezetett tömegközéppont helyvektorát folytonos tömegeloszlás esetére ugyanezzel a módszerrel általánosíthatjuk:

$$\mathbf{r}_{TK} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{r}_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{r}_i \rho_i \Delta V_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Ezzel a modellel elértük azt, hogy a pontrendszerre érvényes kinematikai és dinamikai törvényeket változatlan formában lehet alkalmazni, csak végül mindig át kell térni a végtelenül finom felosztásnak megfelelő határértékre.

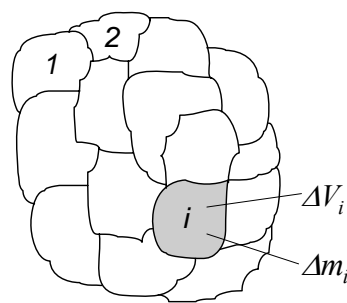
Merev test dinamikája

A merev test mozgásának leírására szolgáló egyenletekhez a legegyszerűbben úgy juthatunk el, ha igen kis – pontszerűnek tekinthető – részekre osztjuk, és speciális, egymáshoz képest rögzített helyzetű pontokból álló pontrendszerként tárgyaljuk. Mivel a pontrendszerre vonatkozó törvényeket ismerjük, ezzel a módszerrel a merev testre vonatkozó összefüggésekhez is eljuthatunk.

Mivel a merev test mozgása translációra és rotációra bontható, a mozgás leírása is két részből áll. A transláció leírása a pontrendszeréknél érvényes tömegközépponti tétellel lehetséges: a külső erők a tömegközéppontban egyesített teljes tömegre hatnak, és a tömegközéppont mozgását a tömegpontra érvényes mozgásegyenlet írja le.

A továbbiakban a translációval részletesebben nem foglalkozunk, hanem elsősorban a – tömegpont mozgásához képest új – forgást vizsgáljuk.

A forgómozgás vizsgálatát is több lépésben, az egyszerűtől a bonyolult felé haladva végezzük el.



Rögzített tengely körül forgó merev test mozgása

Először a legegyszerűbb esettel foglalkozunk, amikor a test egy rögzített tengely körül foroghat. Ez az eset egyszerűsége mellett azért is fontos, mert módot ad a legfontosabb alapfogalmak bevezetésére, és gyakorlati szempontból is fontos.

Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete és mozgásegyenlete, a tehetetlenségi nyomaték

A pontrendszerek vizsgálatánál láttuk, hogy a rendszer perdületének bevezetésével egy mozgásegyenletet tudunk felírni:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}_K, \quad \text{illetve merev testre} \quad \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}.$$

(itt csak külső forgatónyomaték van, így a megkülönböztető „K” index felesleges).

Írjuk fel ezért először a merev test perdületét. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a z-tengely a rögzített forgástengelyre essen (ábra). A testet osszuk fel térfogatelemekre, és a számítást az így kapott "közelítő pontrendszeren" végezzük el. Az egyes térfogatelemek körpályán mozognak, az i-edik tömegelem perdülete:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i.$$

Mivel a vektorszorzatban szereplő vektorok merőlegesek egymásra, a perdület nagysága

$$N_i = r_i \Delta m_i v_i.$$

A rögzített tengely miatt a perdületet csak a forgatónyomaték z-komponense tudja változtatni (a másik két komponens a tengely kikompenzálja), ezért mozgásegyenletnek és a perdületnek csak a z-komponensét érdemes felírni:

$$N_{iz} = N_i \cos \vartheta_i = r_i \Delta m_i v_i \cos \vartheta_i.$$

Mivel a tengelytől mért távolság és a helyvektor hossza között fennáll az $R_i = r_i \cos \vartheta_i$ összefüggés, végül az

$$N_{iz} = N_i \cos \vartheta_i = R_i \Delta m_i v_i = \Delta m_i R_i^2 \omega_z$$

összefüggést kapjuk (itt felhasználtuk, hogy a körmozgásnál $v = R\omega$), aminek az az előnye, hogy benne az egyes tömegek sebességei helyett a közös szögsebesség szerepel.

A teljes test perdületének z-komponense ennek alapján közelítőleg:

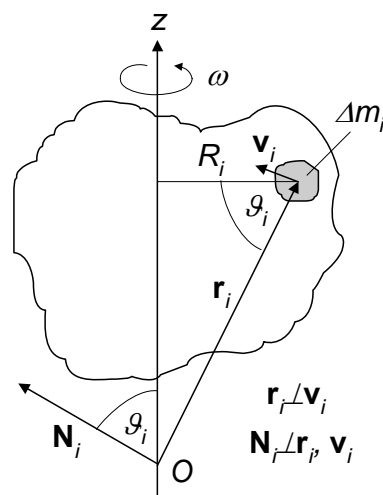
$$N_z \approx \sum_i N_{iz} = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_i \Delta m_i R_i^2.$$

Az összeget pontszerűnek tekinthető térfogatelemek esetén a testnek az adott tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékának* nevezik, és rendszerint θ -val jelölik:

$$\theta_z \approx \sum_i \Delta m_i R_i^2.$$

A tehetetlenségi nyomaték adott össztömeg esetén alapvetően a test tömegének a rögzített tengely körüli eloszlásától függ, vagyis nagyságát a test tömege, alakja és a tengely helyzete egyaránt befolyásolja.

A tehetetlenségi nyomaték fenti kifejezése pontos eredményt csak tömegpontokból álló testnél ad. A merev test rendszerint nem tekinthető ilyennek, ezért általában



végtelen finom felosztáson történő összegzéssel, vagyis integrálással számítható ki (l később).

A tehetetlenségi nyomaték ismeretében a rögzített tengely körül forgó merev test perdületének z -komponense az egyszerű

$$N_z = \Theta_z \omega_z$$

alakba írható.

A pontrendszeréknél kapott mozgásegyenlet ennek alapján:

$$\frac{dN_z}{dt} = \frac{d(\Theta_z \omega_z)}{dt} = M_{Kz} = M_z.$$

Ha a tehetetlenségi nyomaték időben állandó, akkor a mozgásegyenlet a

$$\Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_z \beta_z = M_z$$

alakot ölti, ahol β_z a szöggyorsulás.

Az egyenletről a forgatónyomatékok és a tehetetlenségi nyomaték ismeretében a szöggyorsulás, abból integrálással a szögsebesség, újabb integrálással pedig a szögelfordulás időfüggése meghatározható.

A fenti mozgásegyenlet egy másik fontos következménye, hogy ha a külső forgatónyomatékok eredője nulla, akkor a perdület megmarad, és érvényes a

$$\Theta_z \omega_z = \text{állandó}$$

összefüggés. Ezt az összefüggést számos egyszerű kísérlettel lehet szemléltetni.

KÍSÉRLETEK:

A kísérleteket függőleges tengely körül forgatható székre ültetett személy végzi.

- ◆ A kísérletező mindkét kinyújtott kezébe súlyzókat adunk, majd forgásba hozzuk. Ha a kísérletező a súlyzókat behúzza, akkor forgása felgyorsul (kisebb az " R " és így a θ , ezért nagyobb lesz az ω), a súlyzókat újra kinyújtva, a forgás lelassul. Ugyanez az oka annak, hogy a kinyújtott karokkal lassan forgó korcsolyázó gyors forgásba tudja hozni magát (piruett) kezeinek behúzásával.
- ◆ A kísérletező kezébe függőleges tengelyű biciklikereket adunk. Ha a kereket a tengelye körül megforgatja, akkor a forgószerék ellenkező irányban forogni kezd, ha a kereket megállítja, a forgószerék megáll (perdület-megmaradás).
- ◆ Ha a kísérletező kezébe forgó kereket adunk, akkor nem történik semmi, de ha a forgó kerék tengelyét 180° -kal elfordítja, akkor a szerék a kerék forgásirányával ellentétesen forogni kezd.

A tehetetlenségi nyomaték kiszámítása, a Steiner tétel

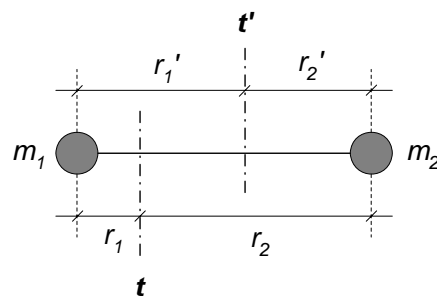
A tehetetlenségi nyomatékokat a fenti definíció alapján csak akkor lehet kiszámítani, ha a merev test valóban pontszerűnek tekinthető részekből áll. Közelítőleg ez az eset áll fenn pl., ha egy súlyzószzerű testben a súlyzó nyelének tömege elhanyagolható a súlyoké mellett, és a súlyok mérete elhanyagolható a távolságuk mellett. Ebben az esetben az ábrán látható t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Látható, hogy egy másik (t') tengelyt választva, a tehetetlenségi nyomaték általában más lesz:

$$\Theta' = m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2,$$

vagyis a tehetetlenségi nyomaték nem egyszerűen



a test jellemzője, hanem azt a test és a tengelynek a testhez viszonyított helyzete együttesen határozza meg.

Hasonlóan egyszerű a tehetetlenségi nyomaték számítása, ha a test teljes tömege (m) egy nagy sugarú (R) körvonal vagy hengerfelület mentén helyezkedik el, és a tömegelemek a sugárhoz képest elhanyagolható vastagságú rétegben (gyűrű vagy cső) találhatóak. Ilyenkor az összegzésben szereplő tömegek közel azonos távolságra vannak a forgástengelytől, ezért közelítőleg igaz, hogy

$$\Theta \approx \sum_i \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2 .$$

A testek azonban többnyire nem ilyenek, ezért ez a módszer általában nem használható. Az általános számítási eljárás a végtelenül finom felosztásra, majd integrálásra való áttérése alapján:

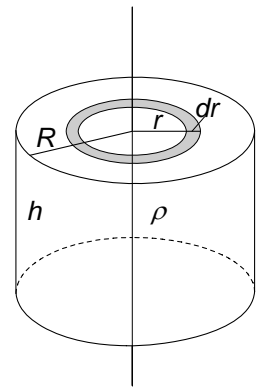
$$\Theta = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \rho_i \Delta V_i = \int_V r^2 \rho(\mathbf{r}) dV .$$

Ha a test homogén, akkor a sűrűség mindenütt ugyanannyi, és az egyszerűbb

$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV$$

alakot kapjuk.

Bonyolult alakú test vagy általános helyzetű forgástengely esetén ennek az integrálnak a kiszámítása nagyon bonyolult is lehet, ha azonban a test szimmetrikus, és a forgástengely szimmetriatengely is, akkor egyszerűbb a számítás. Egyszerű példaként egy henger alakú homogén testnek a hengerpaláستtal párhuzamos szimmetriatengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát számítjuk ki. A számítás azért egyszerű, mert a térfogatelemet egy vékonyfalú csőnek választva (ábra), a fenti térfogati integrál sugár szerinti integrállá alakítható. A kiszemelt térfogatelem $dV = 2r\pi h dr$, így a tehetetlenségi nyomaték:



$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2 .$$

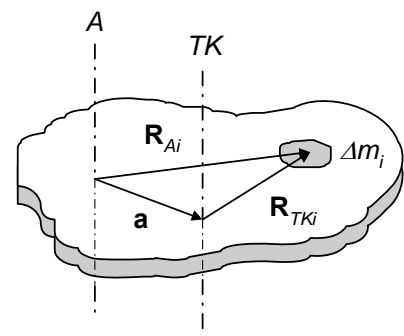
Adott test esetén a tehetetlenségi nyomaték attól függ, hogy a forgástengely hogyan helyezkedik el a testhez képest. Gyanítható azonban, hogy a különböző tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok nem függetlenek egymástól. Egy ilyen összefüggést ad meg egymással párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok között az ún. *Steiner-tétel*.

Az ábra egy testnek olyan szeletét mutatja, amely merőleges a tömegközépponton átmenő TK - és a vele párhuzamos A tengelyre. Az i -edik tömegelem helyzetét a két tengelyhez viszonyítva az \mathbf{R}_{Ai} és az \mathbf{R}_{TKi} vektorok, a két tengely relatív helyzetét az \mathbf{a} vektor mutatja; mindhárom vektor merőleges a tengelyekre. A tömegelem tehetetlenségi nyomatéka a két tengelyre:

$$\Theta_{Ai} = R_{Ai}^2 \Delta m_i$$

$$\Theta_{TKi} = R_{TKi}^2 \Delta m_i$$

Mivel $\mathbf{R}_{Ai} = \mathbf{a} + \mathbf{R}_{TKi}$, azt kapjuk, hogy



$$\begin{aligned}\Theta_{Ai} &= R_{Ai}^2 \Delta m_i = (\mathbf{a} + \mathbf{R}_{TKi})^2 \Delta m_i = a^2 \Delta m_i + R_{TKi}^2 \Delta m_i + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i = \\ &= a^2 \Delta m_i + \Theta_{TKi} + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i.\end{aligned}$$

Itt $|\mathbf{a}| = a$ a két párhuzamos tengely távolsága.

A teljes tehetetlenségi nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy ezt az összeget a testben felvett párhuzamos szeletek minden tömegelemére kiszámítjuk, és összeadjuk:

$$\Theta_A = a^2 \sum_i \Delta m_i + \Theta_{TK} + 2\mathbf{a} \sum_i \mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i = a^2 m + \Theta_{TK} + 2\mathbf{a} \sum_i \mathbf{R}_{TKi} \Delta m_i.$$

Az utolsó tag a test tömegközéppont-vektorának a tengelyekre merőleges összetevőjét adja meg a tömegközépponti rendszerben, értéke tehát nulla, így végül azt kapjuk, hogy

$$\Theta_A = a^2 m + \Theta_{TK},$$

ahol m a test teljes tömege.

Vagyis egy tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot kiszámíthatjuk, ha ismerjük a vele párhuzamos, tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot. Ez a *Steiner-tétel*.

Rögzített tengely körül forgó merev test energiája

A rögzített tengely körül forgó test mechanikai energiája a forgásból származó mozgási energiával egyenlő. Ez a térfogatelemekre osztás technikájával könnyen kiszámítható:

$$E_f = \sum_i E_{mi} = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Az egyidejűleg haladó- és forgómozgást végző test mozgási energiáját a korábban a pontrendszerre kapott összefüggéssel kaphatjuk meg:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{TK} \omega^2.$$

Itt v_{TK} a tömegközéppont sebessége a koordináta-rendszerünkhöz képest, v_i' az i -edik tömegelem sebessége a tömegközépponti rendszerben (ezért szerepel itt a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték).

A teljes mozgási energia tehát a tömegközéppontba képzelt össztömeg haladó mozgásából származó mozgási energiából és a tömegközépponti tengely körüli forgásból származó forgási energiából áll.

Ha külső konzervatív erőterben a testnek helyzeti energiája is van (belső helyzeti energia merev testnél nincs), akkor ez hozzáadódik a mozgási energiához.

$$E = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{TK} \omega^2 + E_h.$$

Ahogy a pontrendszernél, úgy itt is igaz, hogy a mechanikai energia megváltozása a nem konzervatív erők munkájával egyenlő (itt csak külső erők vannak):

$$\Delta E = W_{nk}.$$

Ha a nem konzervatív erők munkája nulla, akkor a mechanikai energia megmarad:

$$E = \frac{1}{2} m v_{TK}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{TK} \omega^2 + E_h = \text{állandó}.$$

Rögzített tengely körüli forgás és a haladó mozgás analógiája

Ha a rögzített tengely (z) körül forgó merev test tehetlenségi nyomatéka nem változik, akkor a mozgásegyenlet a

$$\Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_z \beta_z = M_z$$

alakba írható. Ebből a φ szögelfordulás időfüggésére az alábbi egyenletet kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy $\omega_z = \frac{d\varphi(t)}{dt}$

$$M_z = \Theta_z \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}.$$

Ez az egyenlet formailag teljesen azonos az x -tengely mentén zajló haladó mozgásra felírt

$$F_x = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Newton-féle mozgásegyenlettel, csak az erő helyett forgatónyomaték, a tömeg helyett tehetetlenségi nyomaték, a koordináta helyett pedig szögelfordulás szerepel benne. Az egyenlet megoldása az említett mennyiségek átírása után nyilván ugyanolyan, mint a haladó mozgás esetén. Így például állandó forgatónyomaték esetén

$$\beta_z = \frac{M_z}{\Theta_z}$$

$$\omega_z(t) = \int_{t_0}^t \beta_z dt = \omega_0 + \beta_z(t - t_0)$$

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega_z(t) dt = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \beta_z(t - t_0)^2,$$

tehát a haladó mozgás összefüggéseivel azonos alakú összefüggéseket kapunk.

Láttuk, hogy a forgási energia kifejezése is megerősíti ezt a felismerést, hiszen az

$$E_f = \frac{1}{2} \Theta_z \omega_z^2$$

kifejezés az említett mennyiségek cseréjével a haladó mozgás mozgási energia-kifejezésével azonos.

Az x -tengely menti haladó mozgás minden összefüggése átírható a z -tengely körüli forgómozgás összefüggésévé (és viszont), ha végrehajtjuk az alábbi cseréket:

$$F_x \Leftrightarrow M_z$$

$$m \Leftrightarrow \Theta_z$$

$$a_x \Leftrightarrow \beta_z$$

$$v_x \Leftrightarrow \omega_z$$

$$x \Leftrightarrow \varphi.$$

Merev test mozgásegyenletének néhány alkalmazása

A mozgásegyenlet alkalmazására három egyszerű esetet vizsgálunk meg, az egyik a torziós inga, a másik a fizikai inga, a harmadik pedig egy lejtőn legördülő henger vagy gömb.

Torziós inga

A torziós inga egy rugalmas szálla felfüggesztett test, például egy korong (ábra), ami a szála csavarásával elindítva, függőleges tengely körül lengőmozgást végez. A korong tehetetlenségi nyomatéka a szálla, mint tengelyre vonatkozóan Θ . A kitérés után a szállaiban fellépő rugalmas erők egy visszatérítő forgatónyomatékot eredményeznek, ami arányos a szögelfordulással (φ) és azzal ellentétesen forgat:

$$M_z = -D^* \varphi_z.$$

A korong mozgásegyenlete ezzel

$$M_z = -D^* \varphi_z = \Theta \beta_z = \Theta \frac{d^2 \varphi_z}{dt^2},$$

ami rendezés után a harmonikus rezgés egyenletének korábban megismert alakját ölti

$$\frac{d^2 \varphi_z(t)}{dt^2} + \frac{D^*}{\Theta} \varphi_z(t) = 0.$$

Ennek megoldása

$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} \cos(\omega_z t + \alpha),$$

ahol $\omega_z = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$. Vagyis a korong lengése ilyen

körfrekvenciájú harmonikus rezgés lesz.

Fizikai inga

A fizikai inga egy vízszintes (az ábrán O -val jelölt, a rajz síkjára merőleges) tengely körül forgatható test, amelynek tömegközéppontja (TK) a tengely alatt helyezkedik el.

Ha a tengelyt és a súlypontot összekötő egyenes nem függőleges, akkor a súlyerő egy visszatérítő forgatónyomatékokot fejt ki, ami a kitéréssel (φ) ellentétesen forgat:

$$\mathbf{M} = \mathbf{s} \times \mathbf{F}_g.$$

Ha a z -tengelyt az O pontból az ábra síkjára merőlegesen kifelé irányítjuk, akkor a forgatónyomaték z -komponense:

$$M_z = -s F_g \sin \varphi_z = -mgs \sin \varphi_z,$$

így a mozgásegyenlet:

$$M_z = -mgs \sin \varphi_z = \Theta \frac{d^2 \varphi_z}{dt^2}.$$

Itt Θ a testnek az O forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka.

A fenti egyenletből rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 \varphi_z}{dt^2} + \frac{mgs}{\Theta} \sin \varphi_z = 0.$$

Tudjuk, hogy az inga lengőmozgást fog végezni, de a kapott egyenlet szerint ez nem harmonikus rezgés. Ha azonban a φ_z kitérés kicsi, akkor $\sin \varphi_z \approx \varphi_z$, és az egyenlet a harmonikus rezgés egyenletévé alakul:

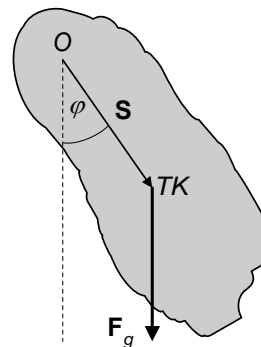
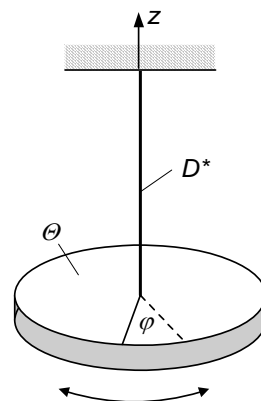
$$\frac{d^2 \varphi_z}{dt^2} + \frac{mgs}{\Theta} \varphi_z = 0.$$

A fizikai inga tehát kis kitérésnél harmonikus rezgést végez, amit a

$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} \cos(\omega_z t + \alpha)$$

függvény ír le, ahol a körfrekvencia $\omega_z = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta}}$.

A fizikai inga speciális eseteként a vékony (elhanyagolható tömegű) fonálra felfüggesztett pontszerű m tömeggel megvalósított ún. *matematikai inga* körfrekvenciáját és lengésidejét is megkaphatjuk. Ekkor a felfüggesztési pont és a tömegközéppont távolsága (ami a fizikai ingánál s) éppen az inga l hossza, a



tehetetlenségi nyomaték pedig $\Theta = I^2 m$, így $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$. A frekvencia $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$, a lengésidő pedig $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Lejtőn legördülő henger (gömb)

Ebben az esetben a merev test egyidejűleg forgó- és haladó mozgást is végez. A mozgás leírásához azt a korábbi eredményünket használjuk fel, hogy a mozgás a tömegközéppont haladó mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra bontható fel. Ha a test tisztán gördül (nincs csúszás), akkor a testre a nehézségi erő (\mathbf{G}) és a lejtővel való érintkezésnél fellépő érintőleges kontaktus erő (\mathbf{F}_T) lép fel (ez utóbbi miatt gördül a test, és ez nem a szokásos értelemben vett súrlódási erő!). A test tömege m , sugara R , a lejtő szöge α (ábra).

A tömegközéppont haladó mozgására felírhatjuk az

$$F_{ex} = G_T - F_T = ma_x$$

$$F_{ey} = F_N - G_N = ma_y$$

egyenleteket.

Ha lejtőre merőleges mozgás nincs, akkor $a_y=0$, amiből azt kapjuk, hogy $F_N = G_N$, $\mathbf{F}_N = -\mathbf{G}_N$

A lejtő mentén (x) történő mozgásra a

$$G_T - F_T = G \sin \alpha - F_T = ma_x,$$

a $G=mg$ összefüggés felhasználásával pedig az

$$mg \sin \alpha - F_T = ma_x$$

egyenletet kapjuk.

A tömegközéppontra csak az \mathbf{F}_T erőnek van forgatónyomatéka, ami a szögelfordulással azonos irányban forog, vagyis a forgatónyomaték-vektor a z tengellyel szembe mutat (a jobbsodrású rendszerben a z tengely a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutat). Emiatt

$$M_z = -F_T R,$$

és a tömegközépponton átmenő vízszintes tengely körüli forgásra a mozgásegyenlet:

$$-F_T R = \Theta_z \beta_z.$$

A két mozgásegyenletben 3 ismeretlen szerepel (a_x , β_z és F_T), de ha a test gördül, akkor a szöggyorsulás és a tömegközéppont gyorsulása között az

$$a_x = -R\beta_z$$

összefüggés áll fenn (a mínusz jel oka: a gyorsulás a „+” x -tengely irányába mutat, a szöggyorsulás viszont a „-” z -tengely irányába), így az egyenletrendszer megoldható.

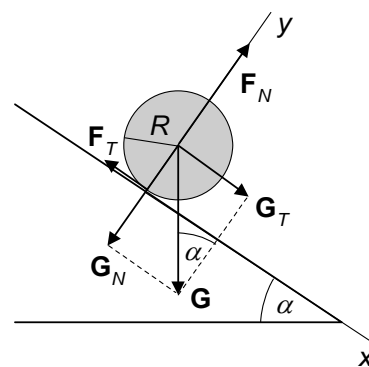
A számolás elvégzése után a tömegközéppont gyorsulására az

$$a_x = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{\Theta_z}{R^2}},$$

a szöggyorsulásra pedig a

$$\beta_z = -\frac{mg \sin \alpha}{R \left(m + \frac{\Theta_z}{R^2} \right)}$$

kifejezést kapjuk.



Ha a legördülő test homogén henger, akkor $\Theta_z^h = \frac{1}{2}mR^2$, így a tömegközéppont gyorsulása

$$a_x^{henger} = \frac{2}{3}g \sin \alpha,$$

vagyis a henger adataitól független.

KÍSÉRLET:

Tömör hengert és vele azonos tömegű, belül üres, vékonyfalú hengert (cső) nyugalmi helyzetből egyszerre elindítunk egy lejtő azonos magasságú pontjairól, és megfigyeljük, hogy melyik ér előbb a lejtő aljára. Azt tapasztaljuk, hogy mindig a tömör henger ér le előbb, vagyis annak a gyorsulása nagyobb.

A kísérlet értelmezése érdekében számítsuk ki egy olyan R sugarú henger gyorsulását, ami belül üres, és a tömege egy a henger sugarához képest vékony héjban helyezkedik el (vékonyfalú cső). Ennek a testnek a tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\Theta_z^{cső} = mR^2$, ezért a tömegközéppont gyorsulása

$$a_x^{cső} = \frac{1}{2}g \sin \alpha;$$

szintén független a henger adataitól.

Látható tehát, hogy – a hengerek adataitól függetlenül – $a_x^{henger} > a_x^{cső}$, ami megmagyarázza a fenti tapasztalatot: a tömör henger ér előbb a lejtő aljára.

Hasonló módon számítható ki a gyorsulás egy gömb legördülésénél is. A gömb tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_z^g = \frac{3}{5}mR^2$. Ebből $a_x^g = \frac{5}{7}g \sin \alpha$.

Merev test perdülete és szögsebessége közötti általános összefüggés, szabad tengelyek

Láttuk, hogy a merev test perdület-vektora még rögzített tengely körüli forgásnál sem mindig párhuzamos a szögsebességvektorral (forgástengellyel), de a forgástengely irányába eső vetülete arányos a szögsebességgel. Szabad mozgásnál a perdület és szögsebesség összefüggése még bonyolultabb.

A tehetetlenségi tenzor, főtehetetlenségi nyomatékok

Mint kimutatható, szabad mozgásnál is igaz az, hogy a perdületvektor komponensei lineáris kapcsolatban vannak a szögsebesség komponenseivel, de ez általában nem egyszerű arányosságot jelent. Az általános összefüggés egy derékszögű x, y, z koordinátarendszerben a következő¹:

$$N_x = \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z$$

$$N_y = \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z$$

$$N_z = \Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z.$$

A $\Theta_{xx}, \Theta_{xy}, \dots, \Theta_{zy}, \Theta_{zz}$ mennyiségek (9 adat) a testnek a koordinátatengelyekhez viszonyított tömegeloszlását jellemzik, és ismeretükben az origón átmenő tetszőleges irányú tengelyre kiszámítható a test tehetetlenségi nyomatéka. Ez a 9 szám együttesen adja meg az egymással általában nem párhuzamos \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ vektor összefüggését, és

¹ Részletesebben pl.: Budó Á.: Kísérleti Fizika I.

ezt a 9 számból álló mennyiséget *tehetetlenségi tenzornak* nevezik (a tenzorokról a fizikában és a matematikában később részletesen lesz szó).

Fontos tudni, hogy bármely testben található 3 egymásra merőleges irány, amelyekben felvéve a koordinátatengelyeket, érvényes, hogy

$$N_x = \Theta_{xx} \omega_x$$

$$N_y = \Theta_{yy} \omega_y$$

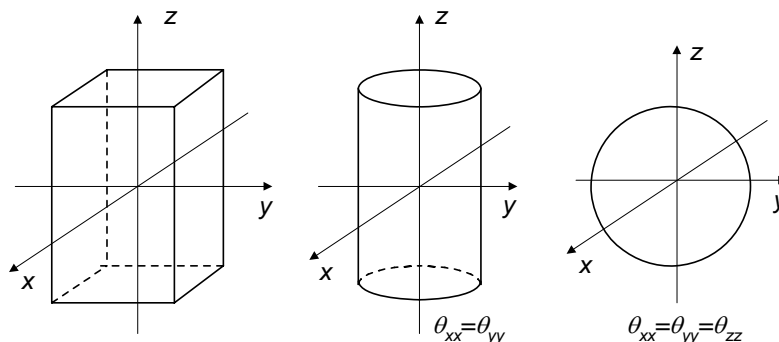
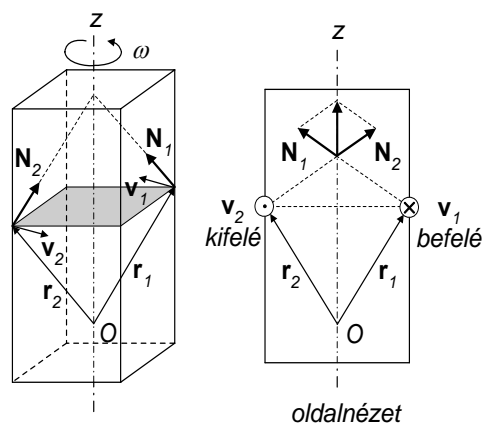
$$N_z = \Theta_{zz} \omega_z.$$

Ezeket az irányokat *főtehetetlenségi tengelyeknek*, az általuk meghatározott koordinátarendszert pedig *főtengelyrendszernek* nevezik. A definiáló egyenletekből látható, hogy ha egy test egyik főtehetetlenségi tengelye körül forog, akkor az **N** és **ω** vektor egymással párhuzamos. Ha pl. a forgástengely a z-tengely, akkor $\omega_x = \omega_y = 0$, ezért $N_x = N_y = 0$, vagyis

$$\mathbf{N} = N_z \mathbf{k} = \Theta_{zz} \omega_z \mathbf{k} = \Theta_{zz} \boldsymbol{\omega}.$$

Szemléletesen is belátható, hogy bizonyos szimmetriával rendelkező testek esetén a főtehetetlenségi tengely a szimmetriatengelyen van. Ha például a test egy szimmetriatengelyre merőleges metszetének centrum-szimmetriája van, akkor ez a tengely biztosan főtehetetlenségi tengely, hiszen az ábra alapján látható, hogy ilyen tengely körüli forgásnál a szimmetrikus térfogatelem-párok perdületvektora a tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el, így az eredőjük és a teljes perdület is tengelyirányú lesz.

Könnyen belátható, hogy egy derékszögű hasáb három főtehetetlenségi tengelye a három egymásra merőleges "kétfogású" forgástengely, a hengeré a palásttal párhuzamos szimmetriatengely és minden erre merőleges kétfogású forgástengely, a gömbé pedig minden a középponton átmenő tengely (ábra).



Szabálytalan testnél a főtehetetlenségi tengelyek szemlélet alapján nem találhatók meg, de számítással vagy kísérlet útján meghatározhatók.

Szabad tengelyek

A tapasztalat szerint a testek akkor is végeznek forgó mozgást, ha nincs külső beavatkozással rögzített forgástengely. Az ilyen – spontán kialakuló – forgástengelyeket *szabad tengelyeknek* nevezik.

A szabad tengely kialakulása és az, hogy milyen tengely lehet szabad tengely, jól szemléltethető az alábbi kísérletekkel.

KÍSÉRLETEK:

- ◆ Készítsünk egy derékszögű hasábot úgy, hogy az egyik élhossza sokkal nagyobb legyen, mint a másik kettő, és a rövidebb élhosszak között is legyen lényeges eltérés. Függesztük fel a hasábot egy dróra a hosszú oldalaira merőleges lapja közepén úgy, hogy a felfüggesztés minden irányban megengedje az elfordulást. Ezután a felfüggesztő drótot forgassuk meg. Kezdetben a hasáb a hosszú oldalával párhuzamos, függőleges tengely körül forog, de a szögsebességet növelve vízszintes helyzetbe ugrik át, és a legrövidebb oldallal párhuzamos szimmetriatengely körül forog tovább. Megjegyzés: a hosszanti tengely a hasáb legkisebb-, a vízszintesbe fordulás utáni tengely pedig a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú, tömegközépponton átmenő főtehetetlenségi tengelye.
- ◆ Hurok alakú kerékpárláncot függesztünk fel egy dróra úgy, hogy a hurok összecukódva lógjon a dróton, majd a drótot forgassuk meg. A lánc kezdetben összecukódva forog, majd a szögsebesség növelésekor egyszer csak vízszintes helyzetbe ugrik át, a hurok a forgástengelyre merőleges síkú körré tágul, és a forgástengely a kör középpontján megy át. Megjegyzés: a lánc előbb a legkisebb-, azután a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú, tömegközépponton átmenő tengely körül forog.

Az itt szerzett tapasztalatok egyeznek az általános tapasztalatokkal, amelyek szerint szabad tengely

- ◆ csak főtehetetlenségi tengely lehet,
- ◆ csak tömegközépponton átmenő tengely lehet,
- ◆ stabilis forgás csak a legnagyobb- és a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú főtehetetlenségi tengely körül jön létre (előbbi a stabilabb).

A fenti tapasztalatok elméletileg is értelmezhetők, ha megvizsgáljuk a szabad tengely létrejöttének feltételeit. Egy tengely körül forgó test egy térfogatelemére (pl. az i -edikre) a centripetális erő hat (a nehézségi erőt most elhanyagoljuk), ami az ábra jelöléseivel:

$$\mathbf{F}_i = -\Delta m_i \omega^2 \mathbf{R}_i.$$

Ugyanennek az erőnek forgatónyomatéka is van:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

A forgáshoz szükséges eredő erő és eredő forgatónyomaték:

$$\mathbf{F} = -\sum_i \Delta m_i \omega^2 \mathbf{R}_i$$

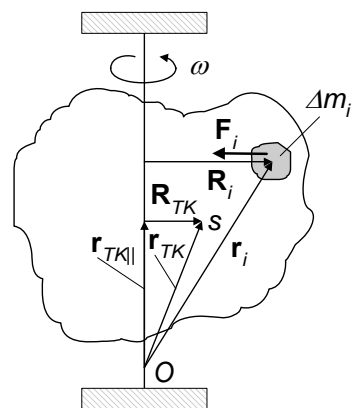
$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Ezt az erőt és nyomatékot a tengelyek rögzítése (csapágyak) adja.

Ha a test tömegeloszlása olyan, hogy egy tengely körüli forgásnál fennállnak az

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = 0$$

feltételek, akkor a tengelyre ható erők és forgatónyomatékok eredője is nulla, a test szabadon forog az adott irány körül, és *nincs szükség tengelyre*. A fenti feltételekből meghatározható, hogy milyen tengelyek jöhetnek szóba szabad tengelyként.



Az első feltétel következményének kiderítése érdekében a tömegelemek helyvektorait bontsuk a tengellyel párhuzamos ($\mathbf{r}_{i||}$)- és arra merőleges (\mathbf{R}_i) összetevőkre, majd tegyük ugyanezt a tömegközéppont helyvektorával is ($\mathbf{r}_{TK||}$ és \mathbf{R}_{TK}). A test tömegközéppont-vektora így

$$\mathbf{r}_{TK} = \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i (\mathbf{r}_{i||} + \mathbf{R}_i) = \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_{i||} + \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{r}_{TK||} + \mathbf{R}_{TK}.$$

Ezért a tömegközéppont-vektor tengelyre merőleges összetevőjét megadó vektor

$$\mathbf{R}_{TK} = \frac{1}{m} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i.$$

Ezzel az erőkre vonatkozó $\mathbf{F} = 0$ feltétel az alábbi alakba írható:

$$\sum_i \Delta m_i \omega^2 \mathbf{R}_i = \omega^2 m \mathbf{R}_{TK} = 0.$$

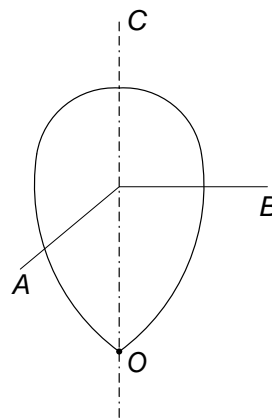
Ez csak úgy teljesülhet, ha $\mathbf{R}_{TK} = 0$, vagyis a tömegközéppont a tengelyen van. Szabad tengely tehát csak *tömegközépponton átmenő tengely* lehet.

Az, hogy a szabad tengelynek mindig *főtehetetlenségi tengelynek* kell lennie, a nyomatékra vonatkozó $\mathbf{M} = 0$ feltételből következik hosszabb számolás után, amit itt mellőzünk¹.

Merev test forgása rögzített pont körül, a pörgettyű

A szabad forgásénál kevesebb, a rögzített tengely körüli forgásénál több a szabadsági foka a mozgásnak, ha a test egy pontja rögzített, és a forgás ekörül történik. Az ilyen módon mozgó testet *pörgettyűnek* nevezik.

A pörgettyűk mozgásának leírása szempontjából fontos a forgó test alakja is. Itt csak azzal az egyszerű esettel foglalkozunk, amikor a homogén anyagú pörgettyű hengerszimmetrikus, és a forgáspont a C szimmetriatengelyen van (ábra). Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a súlypont a szimmetriatengelyen van, és a pörgettyű három főtehetetlenségi nyomatéka ($\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$) közül kettő megegyezik ($\Theta_A = \Theta_B \neq \Theta_C$). Az ilyen pörgettyűt *szimmetrikus pörgettyűnek* nevezik.



A pörgettyűk mozgásának vizsgálatánál két alapesetet érdemes megkülönböztetni:

- ◆ Ha a külső erők rögzített forgáspontra vonatkozó forgatónyomatékainak eredője nulla, akkor *erőmentes pörgettyűről* beszélünk. Nehézségi erőterben ez a feltétel rendszerint úgy valósítható meg, hogy a rögzített (alátámasztott) forgáspont a test súlypontjában van.
- ◆ Ha a külső erők forgatónyomatéka a forgáspontra vonatkozóan nem nulla, akkor a pörgettyű neve *súlyos pörgettyű*. Az elnevezés azzal függ össze, hogy nehézségi erőterben ez általában azt jelenti, hogy a forgáspont (alátámasztási pont) nem esik egybe a súlyponttal, ezért a súlyerőnek a forgáspontra vonatkozó forgatónyomatéka általában nem nulla.

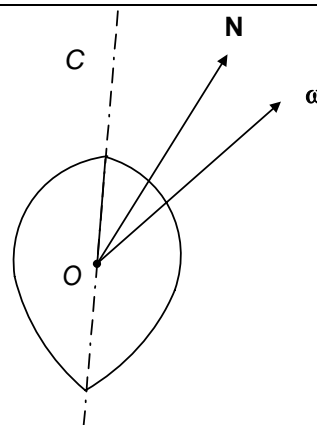
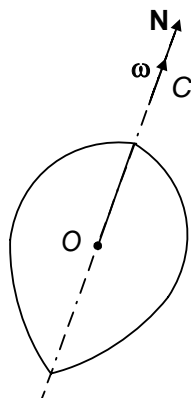
¹ A számolás megtalálható: Budó Á.: Kísérleti Fizika I.

Erőmentes, szimmetrikus pörgettyű mozgása, a nutáció

Az erőmentes szimmetrikus pörgettyű mozgásának vizsgálatát kísérlettel kezdjük:

KÍSÉRLET:

Súlypontjában (O) alátámasztott pörgettyűt ferdén álló szimmetriatengelye (C) körül gyorsan megforgatjuk (baloldali ábra). Ekkor a pörgettyű a tengelye irányát megtartva forog. A szimmetriatengelyt kissé kibillentve (a jobboldali ábrán a függőlegeshez közelítve), a tengely egy kúp mentén körbeforog. A jelenség neve: *nutáció*.



A megforgatott pörgettyű szimmetriatengelye szabad tengely, tehát akörül foroghat a test. A forgástengely az irányát azért tartja meg, mert tengelyirányú perdületet adtunk a pörgettyűnek, és ez megmarad, hiszen nincs külső forgatónyomaték. Itt tehát a C szimmetriatengely, az ω vektor (forgástengely) és az \mathbf{N} perdületvektor iránya egybeesik.

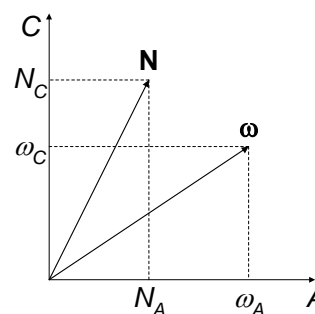
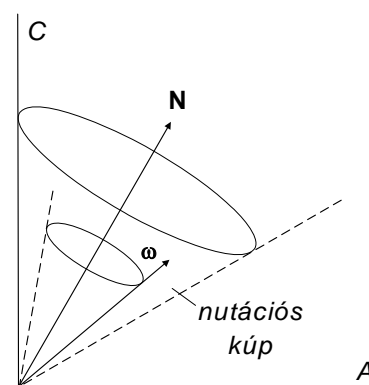
A kibillentéskor megváltozik a perdület, de a külső hatás megszűnése után az új perdület megmarad. A lökés hatására azonban a szimmetriatengely és az ω vektor (pillanatnyi forgástengely) iránya sem egymással, sem pedig a perdületvektor irányával nem egyezik meg többé.

Az alapos megfigyelés azt mutatja, hogy a szimmetriatengely és a pillanatnyi forgástengely a perdületvektor rögzített iránya körül egy-egy kúp mentén körbeforog, úgy hogy C , ω és \mathbf{N} mindig egy síkban vannak (ábra). Az együttes körbeforgás oka lényegében az, hogy az ω vektor (pillanatnyi forgástengely) most nem esik egybe a C tengellyel, ezért a C tengely kifordul az A és C által meghatározott síkból. Ez azonban csak úgy történhet, hogy az \mathbf{N} perdületvektor állandó marad. Ha a perdületet A és C tengely irányú komponensekre bontjuk (ábra), akkor azt írhatjuk, hogy

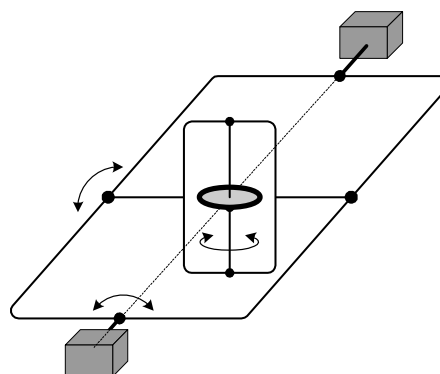
$$N_A = \Theta_A \omega_A$$

$$N_C = \Theta_C \omega_C$$

(A és C főtehetetlenségi tengelyek). Mivel a C tengely elfordulása miatt N_C és ω_C is kifordul az A és C által meghatározott síkból, \mathbf{N} állandósága miatt N_A -nak és ω_A -nak is ugyanezt kell tennie, vagyis az ω vektor együtt forog a C tengellyel az állandó \mathbf{N} perdületvektor körül.



Ha olyan erőmentes pörgettyűt készítünk, amely tetszőleges irányban elfordulhat (Cardano¹-féle felfüggesztés; ábra), és ezt úgy hozzuk forgásba, hogy a forgástengely és a perdületvektor iránya egybeesik a szimmetriatengellyel, akkor a pörgettyű ezt a forgástengelyt akkor is megtartja, ha az alátámasztása elfordul. Az ilyen, tengelyirányát megtartó pörgettyűt *giroszkóp*nak nevezik. Ennek a viselkedésnek egy példája, hogy a Föld egyenlítőjén Kelet-Nyugat irányú, vízszintes tengely körül forgásba hozott giroszkóp tengelye a Föld forgása miatt egy negyed nap alatt függőleges irányúvá válik (valójában megtartja az irányát, és a Föld fordul el).

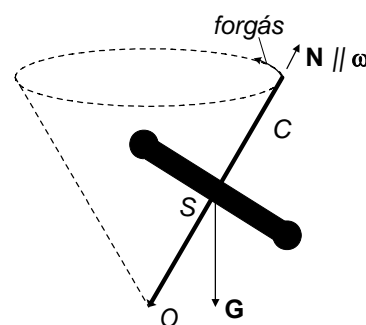


Súlyos, szimmetrikus pörgettyű mozgása, a precesszió

Ha a pörgettyű forgáspontjára vonatkozó forgatónyomaték nem nulla, akkor mozgása lényegesen eltér az erőmentes pörgettyűétől. Az ilyen pörgettyű gyakori esete, hogy a külső forgatónyomaték a nehézségi erőtől származik, vagyis a pörgettyű forgáspontja (O) nem esik egybe a súlyponttal (S). Az ilyen pörgettyűt *súlyos pörgettyű*nek nevezik. (Megjegyezzük, hogy súlyos pörgettyűnek szigorúan véve azt a pörgettyűt nevezik, amelynél az S az O pont felett van; ha S az O pont alatt van, akkor pörgettyűs ingáról beszélünk.)

KÍSÉRLET:

Súlypontja (S) alatt alátámasztott (O) pörgettyűt ferdén álló szimmetriatengelye körül gyorsan megforgatjuk, és magára hagyjuk. A pörgettyű továbbra is a szimmetriatengelye körül forog, de ez a tengely kúpfelületet leírva lassan körbeforog (ábra). A jelenséget *precesszió*nak nevezik.



A szimmetriatengely körüli gyors forgatás biztosítja, hogy a C szimmetriatengely, az ω vektor (forgástengely) és az \mathbf{N} perdületvektor iránya egybeesik ($\omega_C \gg \omega_A$ ezért $N_C \gg N_A$, vagyis $N \approx N_C$). Most azonban a pörgettyűre a \mathbf{G} súlyerő az O pontra vonatkozó, az ábra síkjára merőleges, befelé mutató forgatónyomatékot fejt ki. Mivel a mozgásegyenlet szerint

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M}dt,$$

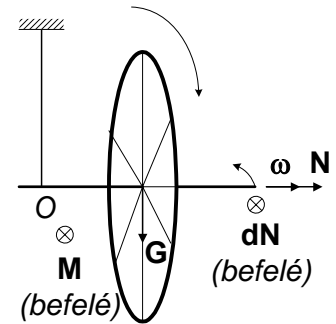
a perdület a forgatónyomaték-vektor irányában megváltozik. Mivel az \mathbf{N} perdületvektor a szimmetriatengellyel egybeesik, a szimmetriatengely iránya a perdülettel együtt változik. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a tengely mindig a súlyerő és a tengely által meghatározott síkra merőlegesen mozdul el: a tengely csúcsa körön, a tengely maga egy kúpfelületen mozog.

A precesszió még látványosabban bemutatható egy biciklikerek segítségével.

¹ Gerolamo CARDANO (1501-1576) olasz természettudós

KÍSÉRLET:

Egy vízszintes tengelyű biciklikereket gyorsan megforgatunk, és a tengelyt egyetlen pontján madzaggal felfüggesztjük (ábra). Ekkor a kerék továbbra is a vízszintes (szabad) tengely körül forog, de a tengely vízszintes síkban függőleges tengely körül körbeforog.



A tengely körbeforgásának szögsebessége, vagy más szóval a precesszió szögsebessége a mozgásegyenlet alapján várhatóan arányos a külső forgatónyomatékkal, de pontos értéke is kiszámítható a mellékelt ábrák segítségével.

A precesszió szögsebessége

$$\Omega_p = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Az ábra alapján:

$$d\vartheta = \frac{dN_C}{N_C \sin \varphi},$$

másrészt a mozgásegyenletből

$$dN_C = M dt,$$

így

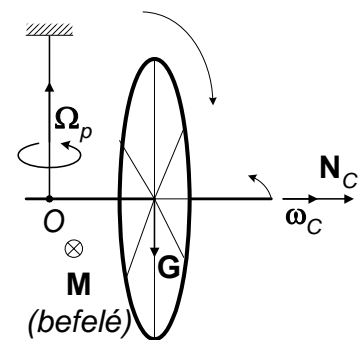
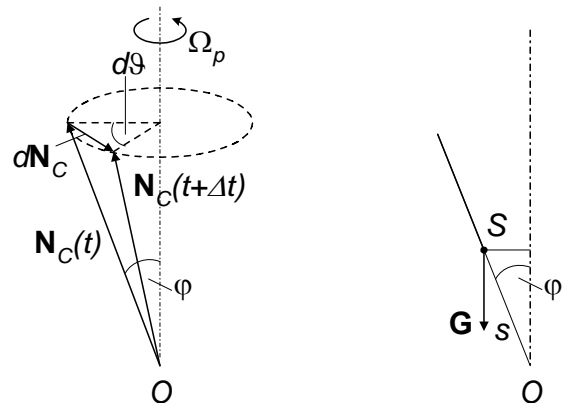
$$\Omega_p = \frac{M}{N_C \sin \varphi}.$$

Ha a nyomaték a nehézségi erőtől származik, akkor az ábra alapján

$$M = Gs \sin \varphi = mgs \sin \varphi,$$

ezért

$$\Omega_p = \frac{mgs}{N_C} = \frac{mgs}{\Theta_C \omega_C}.$$



A pörgettyűnyomaték

A precessziót egy a pörgettyűvel kölcsönhatásban álló test által kifejtett forgatónyomaték okozza. Newton III. törvénye értelmében a pörgettyű ugyanekkora, de ellentétes irányú forgatónyomatékot fejt ki a kölcsönható testre. Ezt a forgatónyomatékot *pörgettyűnyomatéknak* nevezik.

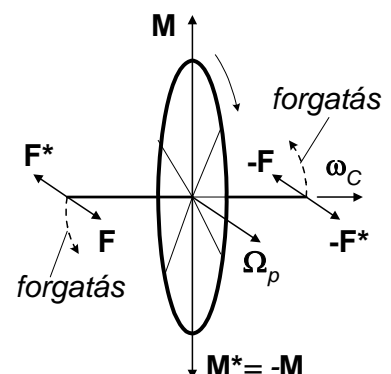
A precessziót létrehozó nyomaték a korábbiak alapján:

$$M = \Omega_p N_C \sin \varphi$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{N}_C = \Theta_C \boldsymbol{\Omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_C.$$

A pörgettyűnyomaték ennek megfelelően:

$$\mathbf{M}^* = -\mathbf{M} = \mathbf{N}_C \times \boldsymbol{\Omega}_p = \Theta_C \boldsymbol{\omega}_C \times \boldsymbol{\Omega}_p.$$



A pörgettyűnyomatékot mutatja az alábbi kísérlet (fenti ábra).

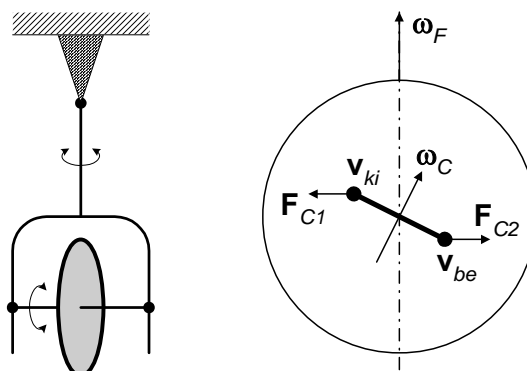
KÍSÉRLET:

Hozzunk forgásba egy vízszintes tengelyen forgó biciklikereket, és a tengelyt próbáljuk függőleges síkban az óramutató járásával ellentétesen elfordítani (ábra). Ekkor azt érezzük, hogy a tengelynek függőleges síkban történő elforgatása csak akkor sikerül, ha a két kezünk a tengelyt megtartó erőpárt (az ábrán \mathbf{F} és $-\mathbf{F}$) fejt ki. Ez az erőpár a tengelyt vízszintes síkban az óramutató járásával ellentétes irányba forgatná el (ez felfelé mutató \mathbf{M} forgatónyomaték-vektort jelent). Ez a tengely elforgatásához (Ω_p) – azaz a precesszióhoz – szükséges nyomaték. Ennek ellenhatásaként megjelenő erőpár (az ábrán \mathbf{F}^* és $-\mathbf{F}^*$) hatását érezzük a kezünkön, ami a tengelyt vízszintes síkban az óramutató járásával egyező irányban akarja elforgatni. Ez okozza az \mathbf{M}^* pörgettyűnyomatékot.

Alkalmazások

A pörgettyűk sajátos viselkedésének számos megnyilvánulását megfigyelhetjük, illetve felhasználhatjuk, amelyek közül néhányat itt megemlítünk.

- ♦ Az erőmentes pörgettyűnek azt a sajátosságát, hogy forgástengelyének irányát megtartja, mozgások stabilizálására lehet használni (hajókon, egysínű vasúton erre nagy tehetetlenségi nyomatékú pörgettyűt használnak, a diszkoszvető a diszkoszt pörögve hajtja el, emiatt a diszkosz függőlegeshez képest ferde síkját megtartja, így egy állandó felhajtóerő lép fel, amittől messzebbre repül a diszkosz, a lövedékek is pörögve repülnek ki a fegyver csövéből, ami szintén a mozgás stabilizálását szolgálja)
- ♦ Az erőmentes pörgettyű érdekes alkalmazása az ún. pörgettyűs iránytű, amely egy függőleges és vízszintes tengely körül szabadon elforduló pörgettyű (baloldali ábra). Ha egy ilyen pörgettyűt gyors forgásba hozunk, akkor tengelye a Földön Észak-Déli irányba áll be, vagyis iránytűként használható. Ennek oka a Föld forgásából származó Coriolis-erő. Ez a jobboldali ábra segítségével érthető meg, ahol a pörgettyű sematikus felülnézeti rajza látható. A Föld szögsebességvektora (ω_F) az ábrán felfelé, a pörgettyű szögsebességvektora (ω_C) Északkelet felé mutat. A pörgettyűnek az ábra síkjában lévő tömegelemei a tengelytől jobbra az ábra síkjára merőlegesen befelé (\mathbf{v}_{be}) a baloldalt lévőket kifelé (\mathbf{v}_{ki}) mozognak. Ennek megfelelően az $\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \omega_F$ Coriolis-erő a jobboldali tömegelemekre jobb felé (\mathbf{F}_{C2}), a baloldaliakra bal felé (\mathbf{F}_{C1}) mutat, így egy olyan erőpár jön létre, amely a pörgettyű tengelyét az Észak-Déli irányba forgatja be (ez az egyensúlyi helyzet, mert ekkor nulla a forgatónyomaték).
- ♦ A kerékpár egyensúlyának stabilizálásában is szerepet játszik a pörgettyűhatás. Ha a kerékpár valamilyen okból a haladási irányhoz viszonyítva jobbra dől, akkor a súlypont az alátámasztástól jobbra kerül, ezért fellép egy előre mutató forgatónyomaték. Emiatt az első kerék perdülete – amely balra mutat – a haladás irányában változik meg. Így a kerék perdületvektora, és vele együtt a kerék tengelye jobbra fordul, és az alátámasztás a súlypont felé mozdul el: a pörgettyűhatás a kerékpár stabilizálódását segíti elő.



- ◆ Jobbra kanyarodó jármű kerekeinek tengelye a haladási irányhoz viszonyítva jobbra fordul, tehát a precesszió szögsebességvektora lefelé mutat. A kerék szögsebességvektora balra mutat, ezért az útra (sínre) ható pörgettyűnyomaték vektora ($\mathbf{M}^* = \mathcal{O}_C \boldsymbol{\omega}_C \times \boldsymbol{\Omega}_p$) hátrafelé mutat. Ez a forgatónyomaték az út külső oldalán lévő baloldali kereket rányomja az útra, az út belső oldalán lévő jobboldali kereket pedig megemeli, ami (az egyidejűleg fellépő centrifugális erővel együtt) felboruláshoz vezethet.