Mozgásleírás különböző vonatkoztatási rendszerekből

Egy test mozgásának leírása általában úgy történik, hogy annak mindenkori helyzetét egy többé-kevésbé önkényesen választott testhez, egy ún. *vonatkoztatási rendszerhez* viszonyítva adjuk meg. A helyzet meghatározásához általában a vonatkoztatási rendszer egy pontjához rögzített *koordinátarendszert* veszünk fel, és a test mozgását jellemző adatokat ebben a koordinátarendszerben adjuk meg.
Könnyen belátható, hogy ha ugyanazt a testet két különböző, egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerből figyeljük meg, akkor a mozgását jellemző *adatok* egy részét (pl. helyzetvektor, sebesség, lendület, energia) eltérőnek találjuk. Felmerül a kérdés, hogy az adatok közötti összefüggéseket megadó *fizikai törvények* is különbözőek-e a különböző vonatkoztatási rendszerekben. Leegyszerűsítve: a kérdés az, hogy használhatja-e a robogó vonaton utazó megfigyelő ugyanazokat a fizikai törvényeket, amelyeket a Földhöz képest nyugvó laboratóriumban érvényesnek talált.
A kérdés vizsgálatát érdemes két részre bontani: először az egyszerűbb esetet nézzük meg, amikor egymáshoz képest (állandó sebességgel) mozgó *inerciarendszerekkel* foglalkozunk, majd ezután térünk át egymáshoz képest *gyorsuló rendszerek* tárgyalására.

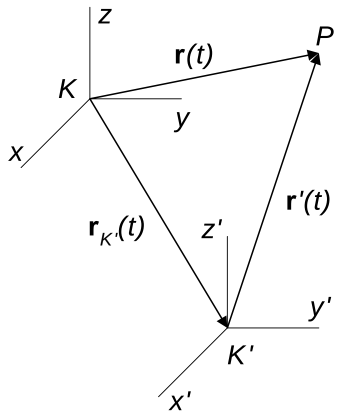
Mozgásleírás egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekből

Vizsgáljunk két olyan rendszert, amelyek egymáshoz képest állandó sebességgel mozognak, és mindkettőben érvényes a "tehetetlenség törvénye" (Newton I. axiómája), vagyis két inerciarendszerről van szó. Próbáljuk meg leírni ugyanannak a tömegpontnak a mozgását a két rendszerből nézve, és keressük meg a leírások közötti összefüggéseket.
Számos tapasztalat sugallja azt, hogy a különböző inerciarendszerekből nézve a mechanikai jelenségek ugyanúgy zajlanak le, és a különböző rendszerekben a mechanika törvényei azonos matematikai alakban érvényesek (természetesen csak akkor, ha adott rendszerben alkalmazva a törvényeket a bennük szereplő összes fizikai mennyiség helyébe ugyanabban a rendszerben mért adatokat helyettesítünk be). Ez a tapasztalatok alapján elfogadott alaptétel a *klasszikus mechanika relativitási elve*. A relativitás elvének fontos következménye, hogy az inerciarendszerek a mechanikai folyamatok leírása szempontjából egyenértékűek, vagyis mechanikai kísérletek segítségével nem lehet köztük különbséget tenni, így valamiféle "abszolút", kitüntetett inerciarendszert sem lehet találni.
Ha egy test mozgását két egymáshoz képest mozgó K és K' inerciarendszerből vizsgáljuk, akkor a test mozgását jellemző adatokra általában eltérő értékeket kapunk, de a két rendszerben mért adatok között összefüggések állnak fenn. Ezek az összefüggések a rendszerek egymáshoz viszonyított mozgása által meghatározott *koordináta-transzformációk* segítségével kaphatók meg, és ismeretükben egy fizikai törvényt áttranszformálhatunk egyik rendszerből a másikba az alábbi módon.
A K rendszerben felírt fizikai törvényben szereplő fizikai mennyiségeket a transzformációs összefüggések segítségével kifejezzük a K' rendszer megfelelő mennyiségeivel, és így megkapjuk a kérdéses fizikai mennyiségek közötti összefüggést (a fizikai törvényt) a K' rendszerben. Ha ez az összefüggés matematikai alakját tekintve azonos a K rendszerben felírt összefüggéssel, akkor azt mondhatjuk, hogy *a transzformáció összhangban van a relativitás elvével*.
Ha a relativitás elvét, mint tapasztalati tényt elfogadjuk, akkor csak vele összhangban álló transzformációt használhatunk. Elvileg elképzelhető, hogy olyan – fizikailag indokolható – transzformációt fogadunk el, amely nincs összhangban a relativitás elvével (a törvények

alakja a transzformációnál megváltozik), ekkor azonban nem tarthatjuk fenn a relativitás elvét.
Nézzük meg most, hogy a klasszikus mechanikában használt ún. *Galilei*[1]*-féle transzformáció* összhangban van-e a mechanikában elfogadott relativitási elvvel.

A Galilei-transzformáció és a relativitás elve a klasszikus mechanikában

A Galilei-transzformáció összefüggései a hétköznapi szemléleten alapulnak, és az alábbi egyszerű meggondolásokkal kaphatók. Az ábra P pontjában lévő tömegpont mindenkori helyzetét a K koordinátarendszerből a mindenkori $\mathbf{r}(t)$-, a K' rendszerből pedig a mindenkori $\mathbf{r}'(t)$ helyvektorral adhatjuk meg (t az idő). Ha a két rendszer relatív helyzetét megadó vektor $\mathbf{r}_{K'}(t)$, akkor a két rendszerben érvényes helyvektorok kapcsolata



$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}_{K'}(t).$$

Ha a K' rendszer a K hoz képest állandó $\mathbf{w}$ sebességgel mozog (inerciarendszerekről van szó), akkor

$$\mathbf{r}_{K'}(t) = \mathbf{w}t + \mathbf{r}_0,$$

ahol $\mathbf{r}_0$ a két rendszer origójának relatív helyzetét megadó vektor a $t=0$ időpillanatban. Ezzel a fenti kifejezés így alakul

$$\mathbf{r}_{K'}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{w}t + \mathbf{r}_0,$$

ami a koordinátákkal kifejezve

$$x = x' + w_x t + x_0$$
$$y = y' + w_y t + y_0$$
$$z = z' + w_z t + z_0$$
$$t' = t.$$

Ez a klasszikus mechanika *Galilei-féle transzformációja*.
A fenti gondolatmenet fontos mozzanata, hogy az időt nem transzformáltuk, azaz természetesnek vettük, hogy a két rendszerben az idő azonos:

$$t'=t.$$

A sebességek közötti összefüggés a helyvektorok kapcsolatát megadó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapható

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \mathbf{w},$$

ahol $\mathbf{v}$ a vizsgált tömegpont K rendszerbeli sebessége, $\mathbf{v}'$ annak K' rendszerbeli sebessége. Komponensekkel kifejezve:

$$v_x = v'_x + w_x$$
$$v_y = v'_y + w_y$$
$$v_z = v'_z + w_z.$$

Vagyis a hétköznapi tapasztalattal egyezésben azt kapjuk, hogy ugyanazon test sebességét egymáshoz képest mozgó megfigyelők különbözőnek találják.
A gyorsulások összefüggését a sebességre vonatkozó egyenlet idő szerinti differenciálásával kapjuk:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t).$$

[1] Galileo GALILEI (1564-1642) olasz fizikus, matematikus, csillagász

A különböző inerciarendszerekből mért gyorsulások tehát azonosnak adódnak. Ez azt jelenti, hogy egy inerciarendszerhez képest egyenletesen mozgó rendszer szintén inerciarendszer.

Ezek után nézzük meg, hogy a Galilei-transzformáció összhangban van-e a relativitás elvével a mechanikai törvények esetében.
Először vizsgáljuk meg a tömegpontra vonatkozó közismert Newton-féle mozgástörvényt. A K rendszerben érvényes

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

törvényben szereplő mennyiségeket transzformáljuk át a K' rendszerbe.
A klasszikus fizikában feltételezett erőtörvények esetén egy tömegpontra ható erő csak annak a többi testhez viszonyított helyzetétől, azokhoz viszonyított relatív sebességétől és az időtől függhet. Mivel ezek a mennyiségek a fenti transzformáció szerint a két rendszerben azonosnak adódnak, így az erők is azonosak maradnak az egyik rendszerből a másikba való átmenetnél: $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Másrészt láttuk, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Ha viszont a testek közötti kölcsönhatások és a gyorsulás a két rendszerben azonos, akkor az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{a}$ közötti arányosság is érvényben marad, és a tömeg is azonos. Ez azt jelenti, hogy a mozgástörvénynek a K' rendszerbe áttranszformált alakja

$$\mathbf{F}' = m\,\mathbf{a}',$$

ami azonos a K-beli alakkal (ráadásul itt maguk a mennyiségek is azonosak maradnak).
Minthogy a mechanika törvényei lényegében a kölcsönhatás törvényéből és a dinamika alapegyenletéből származtathatók, általánosan is kijelenthető, hogy a Galilei-transzformáció a mechanika törvényeit változatlanul hagyja egyik inerciarendszerből a másikba történő transzformáció során. Másként fogalmazva ez azt jelenti, *hogy a Galilei-transzformáció a klasszikus mechanikában összhangban van a relativitás elvével.*
Nem bizonyításként, csupán szemléltető példaként nézzük meg, hogyan teljesül ez az állítás a mechanika egy másik alapvető törvénye az lendület-megmaradási törvény esetén.
Vizsgáljunk két tömegpontot, amelyek mozgásuk során kölcsönhatásba lépnek, pl. ütköznek egymással. A testek tömege m és M, ütközés előtti sebességeik egy K rendszerben $\mathbf{v}$ és $\mathbf{V}$, ütközés utáni sebességeik ugyanitt $\mathbf{u}$ és $\mathbf{U}$. A K hoz képest $\mathbf{w}$ sebességgel mozgó K' rendszerben jelöljük ugyanezeket a sebességeket $\mathbf{v}'$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{U}'$-vel. Tegyük fel, hogy a lendület-megmaradás tétele alkalmazható a folyamatra és írjuk fel azt a K rendszerben:

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = m\mathbf{u} + M\mathbf{U}$$

Transzformáljuk át a sebességeket a Galilei-transzformáció segítségével a K' rendszerbe és írjuk be ebbe az egyenletbe. Ekkor az alábbi összefüggésre jutunk

$$m(\mathbf{v}' + \mathbf{w}) + M(\mathbf{V}' + \mathbf{w}) = m(\mathbf{u}' + \mathbf{w}) + M(\mathbf{U}' + \mathbf{w}),$$

amiből rendezés után kapjuk

$$m\mathbf{v}' + M\mathbf{V}' = m\mathbf{u}' + M\mathbf{U}'.$$

A transzformáció után tehát a lendület-megmaradás tételét a K' rendszerben valóban ugyanolyan alakban kaptuk meg, mint a K rendszerben.
Hasonló módon lehetne demonstrálni a Galilei-transzformációnak a relativitás elvével való összhangját más mechanikai törvények esetén is.

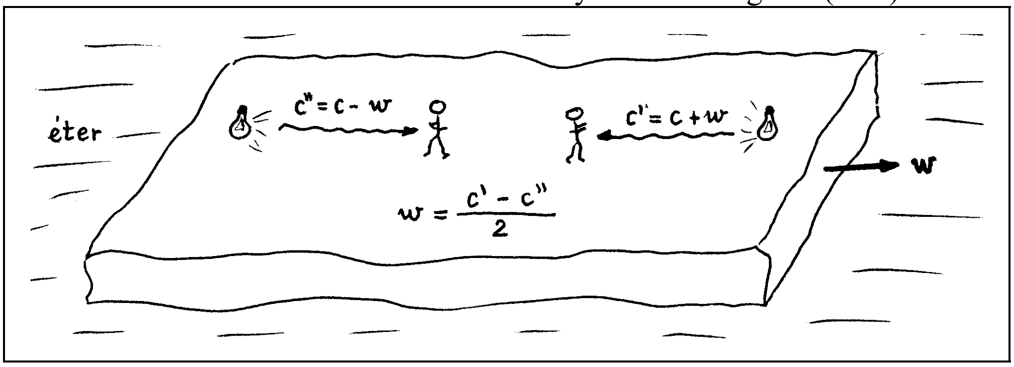
A Galilei transzformáció és a relativitás elve az elektromágnességtanban, a speciális relativitáselmélet alapgondolata

Az elektromágnességtan alapegyenletei, a Maxwell[1]-egyenletek, a fizikának ugyanolyan alapvető törvényei, mint a Newton-törvények. E törvények kidolgozása idején a fizikai jelenségeket a mechanikai szemlélet alapján próbálták értelmezni, ezért semmi kétely nem merült fel abban a vonatkozásban, hogy a mennyiségeket és törvényeket a fizikának ezen a területén is a Galilei-transzformáció segítségével kell egyik rendszerből a másikba transzformálni. Úgy gondolták, hogy létezik egy sajátos közeg, az ún. *éter*, amely mindent kitölt, és az elektromágneses jelenségek ennek a közegnek a mechanikai jellegű állapotváltozásaival függnek össze. Természetesnek tűnt, hogy a Maxwell-egyenletek az éterhez rögzített koordinátarendszerben érvényesek, és hogy a fény, mint elektromágneses hullám nem más, mint egy ebben a közegben keltett zavar tovaterjedése, ami teljesen analóg a mechanikai hullámokkal. Ennek megfelelően a fény terjedési sebességét is az éterhez viszonyított sebességnek tekintették.

A mechanikai hullám-analógia alapján az is természetesnek látszott, hogy az éterhez képest $\mathbf{w}$ sebességgel mozgó rendszerben a fény terjedési sebességét a megfigyelő a Galilei-transzformációnak megfelelő

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{w}$$

értékűnek találja ($\mathbf{c}$ a fény terjedési sebessége az éterhez viszonyítva). Ebből viszont az következik, hogy az éterhez képest mozgó rendszerben a fény terjedési sebessége függ a fény haladási irányától. A legnagyobb sebességet akkor mérhetjük, ha a fény haladási iránya ellentétes a $\mathbf{w}$ sebesség irányával (ekkor a sebesség nagysága $c'=c+w$), a legkisebb érték viszont akkor adódik, ha a fényterjedés iránya megegyezik a $\mathbf{w}$ sebességvektor irányával (ekkor a sebesség nagysága $c''=c-w$). Ha $\mathbf{w}$ irányát fénysebesség-mérésekkel kísérletileg megkeressük, akkor elvileg meghatározhatjuk a vonatkoztatási rendszerünknek az éterhez viszonyított sebességét is (ábra).



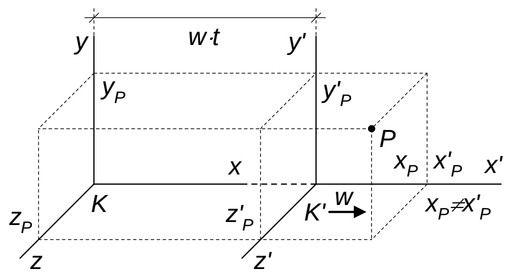
A fenti gondolatmenet alapján a múlt század végén Michelson[2] és Morley[3] végzett el egy kísérletsorozatot abból a célból, hogy meghatározzák a Földnek az éterhez viszonyított sebességét (a $\mathbf{w}$ sebességgel mozgó rendszer ekkor maga a Föld). A kísérlet kivitelezése (aminek részleteivel itt nem foglalkozunk) praktikus okokból más volt, mint a fenti gondolatkísérleté, de elvét tekintve a két eljárás azonos.

A kísérlet végeredménye úgy foglalható össze, hogy a különböző irányban haladó fénysugaraknál a fényterjedési sebességek között nem sikerült különbséget kimutatni (így természetesen a $\mathbf{w}$ sebesség meghatározása sem sikerült). Ezt az eredményt még lehetett volna úgy értelmezni, hogy a kísérlet idején a Föld az éterhez képest éppen

[1] James Clerk MAXWELL (1831-1879) skót fizikus és matematikus
[2] Albert Abraham MICHELSON (1852-1931) Nobel-díjas (1907) német származású amerikai fizikus
[3] Edward Williams MORLEY (1838-1923) amerikai kémikus, fizikus

nyugalomban volt, de a kísérletet az év különböző időpontjaiban (azaz a Föld különböző haladási irányai esetén) megismételve ugyanezt az eredményt kapták.
Ez az eredmény azt a – klasszikus fizika alapján elképzelhetetlen – következtetést sugallta, hogy a fény bármely inerciarendszerben minden irányban ugyanolyan c sebességgel terjed. Ha ez így van, akkor viszont a fény terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, ami komoly problémákat sejtet az elektromágnességtan törvényeit illetően. A fény ugyanis elektromágneses hullám, amelynek terjedését a Maxwell-egyenletek írják le. Ha terjedésére nem alkalmazható a Galilei-transzformáció, akkor várható, hogy ez a transzformáció az elektromágnességtan törvényeit sem viszi át változatlan alakban egyik inerciarendszerből a másikba. A helyzet valóban ez, vagyis *az elektromágnességtanban a Galilei-transzformáció nincs összhangban a relativitás elvével.*

A Lorentz[1]-transzformáció
A Maxwell-egyenletek matematikai elemzésével természetesen megtalálható az a transzformáció, amely változatlan alakban viszi át azokat egyik rendszerből a másikba a $c = c'$ tény figyelembevételével. Ezt a transzformációt Lorentz találta meg, és ma *Lorentz-transzformáció* néven ismerjük.
A Lorentz által megtalált transzformációs képleteket itt az egyszerűség kedvéért a két koordinátarendszer speciális választása esetén adjuk meg (ábra). A speciális választás azt jelenti, hogy a két rendszer x tengelye közös, és a K' rendszer a K hoz képest w sebességgel mozog az x tengely mentén annak pozitív irányában, továbbá az időt mindkét rendszerben attól a pillanattól mérik, amikor a két origó (O és O') azonos helyen volt (ekkor $t=t'=0$).



Először emlékeztetőül írjuk fel erre az esetre a Galilei-transzformációt:

$$x' = x - w\,t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

Az elektromágnességtan egyenleteit változatlanul hagyó – matematikai úton megtalált –Lorentz-transzformáció képletei ezzel szemben

$$x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$

A relativitás elvének teljesítése tehát megköveteli, hogy az időt is transzformáljuk, másrészt a térkoordináták közötti összefüggés a Galilei-transzformáció megfelelő összefüggésétől egy a w relatív sebességtől függő

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

faktorban különbözik.
Könnyen belátható (pl. a lendület-megmaradási törvényre való alkalmazás kapcsán), hogy a Lorentz-transzformáció a mechanika törvényeit nem viszi át változatlanul

[1] Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928) Nobel-díjas (1902) holland elméleti fizikus

egyik inerciarendszerből a másikba: vagyis ez a transzformáció a mechanikában nincs összhangban a relativitás elvével.
Az előzőekben vázolt helyzetet az alábbi táblázattal szemléltethetjük, ahol a fizika két nagy területén a két transzformációnak a relativitás elvéhez való viszonyát tüntettük fel (a "+" jel azt jelenti, hogy a transzformáció alkalmazása során a relativitás elve teljesül-, a "-" jel pedig azt, hogy nem teljesül).

	GALILEI-transzformáció	**LORENTZ-transzformáció**
MECHANIKA	+	-
ELEKTROMÁGNESSÉGTAN	-	+

Ezek után elvileg az alábbi lehetőségek között választhatunk:
a) Beletörődünk abba, hogy a különböző jellegű fizikai folyamatokban (mechanikai, elektromágneses) ugyanazok a fizikai mennyiségek különbözőképpen transzformálódnak két rendszer között, ami lényegében azt jelenti, hogy általános formájában feladjuk a relativitás elvét.
b) Fenntartjuk a relativitás elvét, és elfogadjuk a józan észnek" megfelelő Galilei-transzformációt, de ekkor hibásnak kell minősítenünk a Maxwell-egyenleteket. Az elektromágnességtan törvényeit tehát úgy kell átalakítanunk, hogy azokat a Galilei-transzformáció változatlanul hagyja.
c) Fenntartjuk a relativitás elvét, és elfogadjuk a Lorentz-transzformációt, de ekkor a mechanika törvényeit kell elvetnünk, és úgy átalakítanunk, hogy a Lorentz-transzformáció változatlanul hagyja azokat.
Miután nincs olyan tapasztalat, amely arra utalna, hogy a relativitás elve ne lenne érvényes, az *a)* lehetőséget elvethetjük. A *b)* lehetőséget azért nem választhatjuk, mert ismerünk olyan jelenséget (fény terjedése), amelyre a Galilei-transzformáció nem érvényes. Így marad a *c)* lehetőség.
A század első éveiben ehhez a következtetéshez többen is eljutottak (Lorentz, Poincaré[1], Einstein[2]), de Einstein volt az aki általános fizikai elmélet formájába öntötte a *c)* pontban megfogalmazott követelményeket. Ő vette észre, hogy a tapasztalati tényekkel egyező elmélet *két alapvető fizikai elvből* levezethető:

- A fizikai folyamatokat leíró törvények minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek. Más szóval, minden fizikai folyamatra érvényes a *relativitás elve*.
- A vákuumban terjedő *fény sebessége* minden inerciarendszerben azonos, *univerzális fizikai állandó*.

Ebből a két alapelvből levezethető a Lorentz-transzformáció, és segítségükkel elvégezhető a mechanika törvényeinek szükséges átalakítása. Az így létrejött, a fenti két elvvel összhangban álló fizikai elmélet a *speciális relativitáselmélet*. Nevében a "speciális" jelző arra utal, hogy csak speciálisan választott koordinátarendszerekben, nevezetesen *inerciarendszerekben* érvényes.
A Lorentz-transzformáció fontos tulajdonsága, hogy a fénysebességhez képest kis w relatív sebességeknél a Galilei-transzformációba megy át, vagyis nem túl nagy sebességeknél továbbra is érvényesek a klasszikus mechanika törvényei.

[1] Jules Henri POINCARÉ (1854-1912) francia matematikus, elméleti fizikus.
[2] Albert EINSTEIN (1879-1955) Nobel-díjas (1921) német származású, 1933-ban Amerikába emigrált fizikus

A fenti két alapelv elfogadása egyben azt is jelenti, hogy az "étert" nem tekinthetjük fényhordozó közegnek, hiszen a fénysebesség a mozgásállapottól független, és nem tekinthetjük valamiféle kitüntetett vonatkoztatási rendszernek sem, mivel a relativitás elve érvényes. Ezzel viszont elveszítette értelmét az éter létének feltételezése is.

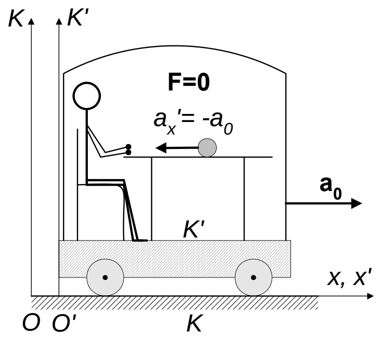
Mozgásleírás egymáshoz képest gyorsuló rendszerekből, a tehetetlenségi erők

Egymáshoz képest nem túl nagy sebességgel mozgó inerciarendszerekben a Newton törvények változatlan alakban használhatók. Mi a helyzet egy inerciarendszerhez képest gyorsuló rendszerben?

Transzformációs összefüggések egymáshoz képest gyorsuló, transzlációs mozgást végző rendszerekben

A legegyszerűbb eset az állandó gyorsulású transzlációs (haladó) mozgás.

Vegyük fel a K inerciarendszerben (pl. a terem) a koordinátatengelyeket úgy, hogy a hozzá képest transzlációs mozgást végző K' rendszer (pl. egy kocsi) a K rendszer x-tengelye mentén mozogjon, a K' rendszerbeli x'-tengely pedig essen az x-tengelyre (ábra). A K' rendszer a közös x,x'-tengely mentén a_0 állandó gyorsulással mozog a K-hoz képest.



Az általános Galilei-transzformáció szerint (most a w relatív sebesség nem állandó!):

$$x(t) = x'(t) + x_{K'}(t)$$

$$v_x(t) = w(t) + v_x'(t)$$

$$a_x(t) = a_0 + a_x'(t).$$

Eszerint egy tömegpont gyorsulása a K' rendszerben

$$a_x' = a_x - a_0,$$

vagyis a K' nem inerciarendszer, hiszen a K-ban nem gyorsuló tömegpont ($a_x = 0$) a K'-ben gyorsul ($a'_x = -a_0 \neq 0$).

A fenti egyenletből m-mel való szorzással kapjuk, hogy

$$ma_x' = ma_x - ma_0 = F_x - ma_0,$$

ahol $F_x = ma_x$ a K rendszerben a tömegpontra ható erő. Látszik, hogy K'-ben Newton II. törvénye nem érvényes ($F_x = 0$ esetén $a'_x = -a_0 \neq 0$).

Használhatóvá válik a törvény, ha feltételezzük, hogy a K'-ben a tömegpontra

$$F_x' = F_x - ma_0$$

erő hat, vagyis a K-ban működő erőt ki kell egészíteni egy

$$F_{tx} = -ma_0$$

ún. *tehetetlenségi erővel*. Ezzel az

$$F_x' = ma_x'$$

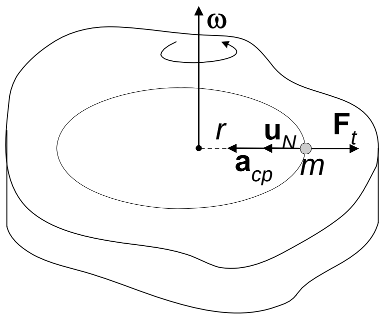
egyenletet kapjuk, amiből az $F_x = 0$ esetben a tényleges $a'_x = -a_0$ gyorsulást kapjuk.

Ha a koordinátarendszerek nem a tárgyalt speciális relatív mozgást végzik, akkor a fenti gondolatmenet mindegyik koordinátára alkalmazható, és $\mathbf{a}_0$ relatív gyorsulás és $\mathbf{F}$ erő esetén, a kapott eredmények vektori formában érvényesek:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$$
$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$$
$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0 .$$

Tehetetlenségi erők forgó rendszerben

Egy inerciarendszerhez képest egyenletesen forgó rendszerben szintén be kell vezetnünk tehetetlenségi erőket, hiszen az inerciarendszerben nyugvó tömegpont a forgó rendszerből nézve körpályán mozog, tehát akkor is gyorsul, ha nem hat rá erő.



Ezt a tehetetlenségi erőt legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, ha egy olyan tömegpontot vizsgálunk, amely a forgó testhez rögzített koordinátarendszerben nyugszik (ábra). Ennek a tömegpontnak az inerciarendszerből nézve $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{cp} = mr\omega^2\mathbf{u}_N$ gyorsulása van, tehát

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{cp} = mr\omega^2\mathbf{u}_N$$

erő hat rá. Mivel a forgó rendszerben nyugszik, itt egy ezzel ellentétes, ugyanilyen nagyságú

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_{cp} = -mr\omega^2\mathbf{u}_N$$

tehetetlenségi erőt kell feltételeznünk. A kísérletek azt mutatják, hogy forgó rendszerekben ilyen tehetetlenségi erő valóban fellép, és *centrifugális erőnek* nevezik.

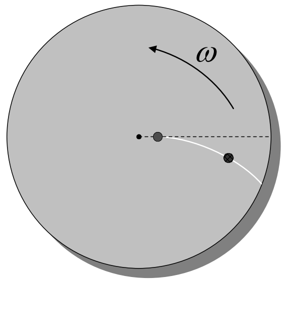
KÍSÉRLETEK:

- Rugóra függesztett, vízszintes síkban körbeforgatott golyó a tengelyt jól mérhető erővel húzza (rugós erőmérő).
- Rugalmas lemezekből készített gömb alakú test forgatáskor a tengelyre merőlegesen kidomborodik (a tengely mentén összelapul), ún. geoid alakot vesz fel (ilyen a forgó Föld alakja is).
- Vízszintes rúdra mozgathatóan felszerelt, cérnával összekötött golyókat a rúdra merőleges tengely körül ω szögsebességgel megforgatva, a golyók akkor maradnak egyensúlyban, ha a tengelytől mért távolságaik (r_1, r_2) és a tömegeik (m_1, m_2) között fennáll az $m_1r_1\omega^2 = m_2r_2\omega^2$ összefüggés.
- Vízszintes tengely körül megforgatott kerékpárlánc merev kerékként gurul, vagy megforgatott kör alakú papírlap olyan merev lesz, hogy vágni lehet vele.

A tapasztalat szerint forgó rendszerben nem csak a centrifugális erő lép fel.

KÍSÉRLETEK:

- Függőleges tengely körül forgatható, vízszintes kormozott lapra a tengelytől néhány centiméterre egy golyót rögzítünk, amit egy szerkezettel forgás közben szabaddá teszünk. A golyó a lapon nem sugárirányban kifelé mozog, hanem az ábra szerinti görbe mentén, amit a koromrétegbe be is rajzol. Itt oldalirányú erőnek is fel kell lépni.
- A forgó Földhöz rögzített hosszú inga lengési síkja lassan elfordul, ami ugyanennek a hatásnak tulajdonítható.

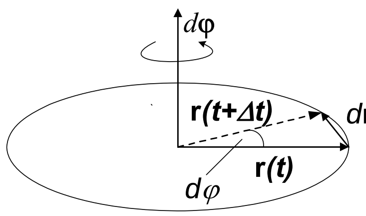


Transzformációs összefüggések egymáshoz képest forgó rendszerekben

A forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erők meghatározásához meg kell keresni a megfelelő transzformációs képleteket. Ehhez előzetesen néhány új fogalmat kell bevezetnünk.

A szögelfordulás- és szögsebesség-vektor

Először a körmozgást végző tömegpont mozgásának jellemzésére bevezetjük a pont helyvektorának egy elemi dt idő alatt bekövetkező elfordulását jellemző elemi szögelfordulás-vektort (az ábrán $d\boldsymbol{\varphi}$), amelynek nagysága a $d\varphi$ szögelfordulással egyenlő vagyis $d\varphi = \frac{dr}{r}$.



A $d\boldsymbol{\varphi}$ vektor irányát úgy definiáljuk, hogy az merőleges a körpálya síkjára (tehát $d\boldsymbol{\varphi} \perp \mathbf{r}$ és $d\boldsymbol{\varphi} \perp d\mathbf{r}$), és a az ábrán látható irányba mutat („jobbkéz-szabály”).

A fenti definíció alapján látható, hogy

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r},$$

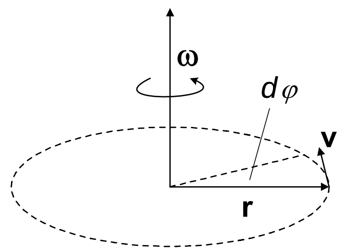
hiszen $d\mathbf{r}$ párhuzamos a $d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ vektorral, nagysága pedig éppen $dr = rd\varphi$.

A tömegpont pálya menti sebességét az elmozdulásnak az időtartammal való osztásával kapjuk:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \mathbf{r}.$$

A korábban skalárként bevezetett szögsebességet általánosítva, definiáljuk a szögsebesség-vektort az

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$



összefüggéssel. Az így kapott $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség-vektor párhuzamos a szögelfordulás-vektorral, tehát szintén merőleges a körpálya síkjára, iránya az ábrán látható.

A szögsebesség-vektor segítségével a tömegpont pálya menti sebességét a

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

összefüggés adja meg. Ez a vektor valóban a körpálya érintőjének irányába mutat, nagysága pedig valóban a körmozgásnál korábban kapott $v = \omega r$ értékkel egyenlő.

Hasonló meggondolással kapjuk, hogy a centripetális gyorsulás

$$\mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Ez a vektor valóban a kör középpontja felé mutat, és nagysága is azonos a körmozgásnál a centripetális gyorsulásra kapott értékkel

$$a_N = \omega v = r\omega^2.$$

Vektor megváltozása inerciarendszerből és forgó rendszerből nézve.

Ahhoz, hogy a transzformációs összefüggéseket megkapjuk, meg kell találnunk az általános összefüggést egy vektornak egy K inerciarendszerből és egy hozzá képest forgó K' rendszerből észlelt megváltozása között.

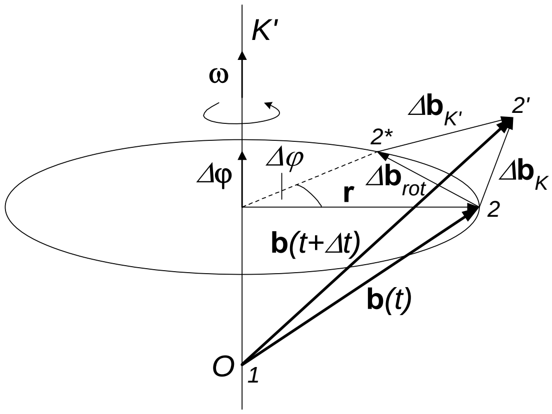
A részletes számolás eredménye az, hogy egy $\mathbf{b}$ vektornak a *K* rendszerben észlelt megváltozása és az ω szögsebességgel forgó *K'* rendszerben tapasztalt megváltozása között a

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}$$

összefüggés áll fenn. Vagyis tetszőleges $\mathbf{b}$ vektor változási sebessége a *K* rendszerből nézve úgy kapható meg, hogy a *K'* rendszerből mért változási sebességéhez hozzáadjuk a forgásból származó változási sebességet, amit az $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}$ vektor ad meg.

***************** **************** ****************

A fenti összefüggés levezetése általános esetben kissé hosszadalmas, ezért itt egy egyszerűsített esetet mutatunk be, amikor a vizsgált $\mathbf{b}$ vektor *1* kezdőpontja a *K'* rendszer *O* origójában van (ábra). A számítást ennek a $\mathbf{b}$ vektornak egy rövid Δt idő alatt bekövetkező $\mathbf{b}(t)\rightarrow\mathbf{b}(t+\Delta t)$ megváltozására végezzük el. A változás során a vektor *2* végpontja a *2'* helyzetbe kerül, tehát a vektor térbeli helyzete és hossza is módosulhat, de egyszerűsítő feltevésünk miatt a vektor *1* végpontja helyben marad.



A Δt idő alatt a *K'* rendszer $\Delta\varphi$ szöggel elfordul, amit a $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ szögelfordulás-vektorral adhatunk meg.
A *K* rendszerbeli megfigyelő szerint a $\mathbf{b}$ vektor *2* végpontjának elmozdulását – ami esetünkben a vektor megváltozásával egyenlő – az ábrán berajzolt $\Delta\mathbf{b}_K$ vektor adja meg.
A forgó *K'* rendszerbeli megfigyelő szempontjából a *2* pont, amelyhez a $\mathbf{b}$ vektor megváltozását viszonyítani tudja, a forgás következtében a *2** helyre került (ez a pont a *K'* rendszerhez van rögzítve). Emiatt a forgó rendszerbeli megfigyelő a $\mathbf{b}$ vektor végpontjainak elmozdulását a $\Delta\mathbf{b}_{K'}$ vektorral adja meg. A *K'* rendszer *2* pontjának a rendszer forgása miatt bekövetkező *2⇒2** elmozdulását az ábrán a $\Delta\mathbf{b}_{rot}$ vektor mutatja.
Az ábra alapján a $\mathbf{b}$ vektor *2* végpontjának *2⇒2*' elmozdulása – vagyis esetünkben a $\mathbf{b}$ vektor megváltozása – a *K* rendszerből nézve kifejezhető a vektor *K'* rendszerbeli megváltozásával és egy a rendszer forgásából származó járulékkal:

$$\Delta\mathbf{b}_K = \Delta\mathbf{b}_{K'} + \Delta\mathbf{b}_{rot}\,.$$

Most már csak a forgásból adódó vektort kell kifejezni a forgást jellemző szögsebességgel.
Ha a Δt időtartam kicsi, akkor ennek a vektornak a nagyságára az ábra alapján felírhatjuk, hogy

$$\Delta b_{rot} \approx r\Delta\varphi\,.$$

A Δt időtartamot egyre rövidítve, és differenciálisan kicsi mennyiségekre áttérve az összefüggést a

$$\Delta b_{rot} = r d\varphi$$

alakba írhatjuk, másrészt azt is megállapíthatjuk, hogy a $\Delta\mathbf{b}_{rot}$ vektor a Δt időtartam rövidítésével az ábrán a forgástengelyre merőleges síkban berajzolt segédkör érintőjébe megy át. Ennek alapján ezt a vektort differenciális változás esetén az alábbi módon írhatjuk fel:

$$d\mathbf{b}_{rot} = d\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}\,.$$

Ezt az összefüggést felhasználva, a $\mathbf{b}$ vektor megváltozására felírt kifejezés differenciális alakban a következőképpen alakul

$$d\mathbf{b}_K = d\mathbf{b}_{K'} + d\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{b}\,.$$

A vektor megváltozásának sebességére ebből – a dt időtartammal való osztás után – azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}\right)\times\mathbf{b}\,.$$

Itt a vektorok megváltozásának sebességénél a zárójel mellett feltüntetett index mutatja, hogy a változást melyik rendszerből vizsgáljuk.

Ha figyelembe vesszük, hogy $\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}$ a szögsebesség-vektor, akkor végül azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}\,.$$

A speciális eset kicsit hosszadalmasabb számolással általánosítható, ha – a fenti meggondolások alkalmazásával – a $\mathbf{b}$ vektor *1* végpontjának elmozdulását is figyelembe vesszük. Az általános számítás ugyanezt az eredményt adja, tehát a fenti összefüggés tetszőleges $\mathbf{b}$ vektorra érvényes.

***************** **************** ****************

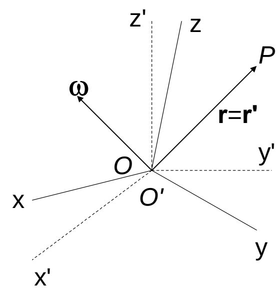
A transzformációs összefüggések

A részletes számolás eredményeként kapott

$$\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{b}$$

összefüggést felhasználva most megkeressük egy *K* inerciarendszer és a hozzá képest forgó *K'* rendszer mennyiségei közötti összefüggéseket.

A számolás során speciális esetet vizsgálunk: a két koordinátarendszer origója mindvégig egybeesik, vagyis transzlációt nem tételezünk fel (ábra). Ebből következik, hogy a *P* pont helyvektorára fennáll, hogy



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K}.$$

Alkalmazzuk a tetszőleges vektor változására kapott kifejezést az $\mathbf{r}'$ vektorra (ez az általános összefüggésben a $\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r}'$ helyettesítést jelenti):

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$$

Itt felhasználtuk azt, hogy az $\mathbf{r}'$ vektor változási sebessége a *K'* rendszerből nézve $\mathbf{v}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K'}$.

Mivel speciális esetünkben a tömegpont *K* rendszerbeli $\mathbf{v}$ sebességére fennáll, hogy $\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K}$, a *K*- és K' rendszerbeli sebességek közötti összefüggésre azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\,.$$

A *K* rendszerbeli gyorsulást a sebesség differenciálásával kapjuk meg:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{|K} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{|K} + \left(\frac{d(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')}{dt}\right)_{|K}.$$

Ismét felhasználva a vektor változására kapott általános kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{|K} \times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K},$$

illetve

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{|K} \times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left[\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{|K'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right].$$

A kifejezést tovább alakítva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{|K} \times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left[\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right] = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{|K} \times\mathbf{r}'.$$

Ha a forgó rendszer szögsebessége állandó, akkor az utolsó, ún. Euler[1]-féle gyorsulás nulla, és az

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$

összefüggést kapjuk. Az utolsó tag nem más, mint a korábban felírt centripetális gyorsulás, a második tag neve pedig *Coriolis*[2]*-gyorsulás*:

$$\mathbf{a}_{cp} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{a}_{C} = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'.$$

Tehetetlenségi erők forgó rendszerben, a centrifugális- és a Coriolis-erő

Láttuk, hogy egy tömegpont gyorsulása egy K inerciarendszerben ($\mathbf{a}$) és egy hozzá képest állandó $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó K' rendszerben ($\mathbf{a}'$) más. A két mennyiség közötti összefüggést átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}').$$

Ennek megfelelően, ha a K' rendszerben a Newton-féle mozgásegyenletet használni akarjuk, akkor az

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') = \mathbf{F} - m2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$

összefüggés alapján a forgó K' rendszerben be kell vezetnünk az

$$\mathbf{F}_t = -2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$

tehetetlenségi erőt. Ennek első tagja az

$$\mathbf{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')$$

Coriolis-erő, amely merőleges a mozgó tömegpont K' rendszerbeli sebességére, második tagja pedig az

$$\mathbf{F}_{cf} = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$

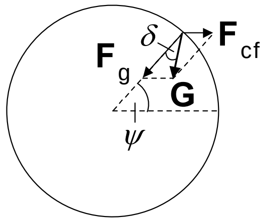
centrifugális erő, amely sugárirányban kifelé mutat.

A centrifugális erőt a hétköznapi tapasztalatból is ismerjük (kanyarodó jármű), de hatását számos egyszerű kísérlet és tudományos tapasztalat is mutatja. Néhány ilyen kísérlet és értelmezése a *forgó rendszerben* a következő:

- Rugóra függesztett, vízszintes síkban körbeforgatott golyó által megnyújtott rugó a centrifugális erőt mutatja.
- A körbeforgatott hajlékony abroncs geoid alakját a forgó rendszerben úgy értelmezhetjük, hogy a centrifugális erő a tengelytől kifelé viszi az abroncs részecskéit, egészen addig, amíg a deformációval növekvő rugalmas erők egyensúlyt nem tartanak vele.

[1] Leonhard EULER (1707-1783) svájci matematikus, fizikus
[2] Gustave CORIOLIS (1792-1843) francia gépészmérnök, matematikus

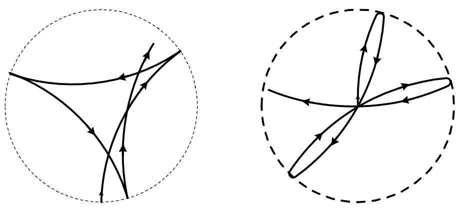
- A Földről nézve a centrifugális erő az oka annak, hogy a Föld nem gömb alakú, hanem a sarkokon kissé belapult, ún. geoid.
- A Földön mért g "nehézségi" gyorsulás a gravitációs- és a centrifugális erő együttes fellépésének eredménye. Mivel azonos szögsebességnél a kerületi sebesség a sugár függvénye, a centrifugális erő a forgástengelytől mért távolságtól, vagyis az ábrán a ψ szögtől függ: $F_{cf} = mr\omega^2 = mR\omega^2 \cos\psi$ (R a Föld sugara). Emiatt változik a Földön mért g "nehézségi" gyorsulás, ha észak-déli irányban haladunk: $g = \dfrac{G}{m} = g_s \dfrac{\sin\psi}{\sin(\delta+\psi)}$, ahol $g_s = \dfrac{F_g}{m}$.



- A centrifugális erő fellépésével magyarázható a centrifuga működése is (ha benne ülünk). A centrifugába tett részecskékre fellép a centrifugális erő, amely nagy fordulatszámnál a nehézségi erőnél sokkal nagyobb. Mivel ez – a nehézségi erőhöz hasonlóan – a tömeggel arányos erő, hatása a forgástengelyre merőleges irányban ugyanaz, mint a nehézségi erőé függőlegesen. Ezért a nagyobb sűrűségű anyagok a tengelytől távolabb, a kisebb sűrűségűek a tengelyhez közelebb gyűlnek össze.

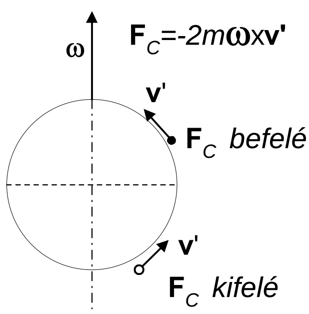
A fenti összefüggések segítségével a Coriolis-erőre vonatkozó kísérleteink és tapasztalataink a forgó rendszerből szintén értelmezhetők.

- A függőleges tengely körül forgatható, vízszintes kormozott lapon sugárirányban elinduló golyó mozgásirányának megváltozását a sebességre merőleges Coriolis-erő okozza.
- Az inga lengési síkjának elfordulása a Földön szintén az ingasúly sebességére merőleges Coriolis-erővel értelmezhető. Különböző kezdeti feltételek mellett az inga mozgása eltérő (ábra), de a lengési sík minden esetben elfordul.

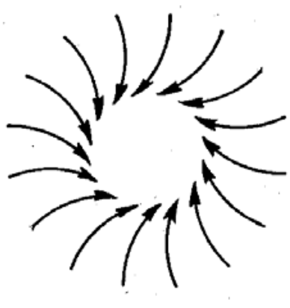


a) *b)*

- Ugyanez az oka, hogy a Földön kilőtt lövedék eredeti irányától eltér (pl. Dél–Észak irányú mozgásnál az északi féltekén jobbra, a délin balra; *l.* az ábrát).
- Hasonlóan értelmezhető, hogy a Föld felé szabadon eső test az eredeti mozgásirányától keletre tér el. Az eltérülés nem nagy: *100 m*-ről eső test esetén kb. *1,5 cm*.



- Ugyancsak a Coriolis-erő okozza, hogy a Földön Kelet–Nyugat irányban mozgó testekre lefelé ható erő lép fel (súlyuk megnő), Nyugat–Kelet irányban mozgó testekre felfelé ható erő lép fel (súlyuk lecsökken). Ez az Eötvös-effektus. A látszólagos tömegváltozás nagyságrendje: *1 m/s* sebességű, *70 kg*-os testnél kb. *1 g*.
- A Coriolis-erőnek szerepe van a légköri jelenségek alakulásában is. Egy alacsonyabb nyomású helyre minden oldalról beáramló légtömegek eredetileg sugárirányban a hely felé mozognak, de a Coriolis-erő eltéríti őket, így örvénylő mozgás jön létre (ábra).



Az Eötvös-kísérlet

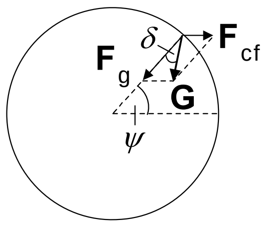
A tehetetlen- és súlyos tömeg azonosságának kérdése igen fontos elvi probléma. Az első igazán pontos vizsgálatot ezzel kapcsolatban Eötvös Loránd[1] végezte el. Az Eötvös-féle kísérlet azon alapult, hogy a Földön a testekre ható nehézségi erő (**G**) két olyan erő eredője, amelyek közül az egyik a test súlyos tömegével- (tömegvonzás: $\mathbf{F}_g$), a másik pedig a test tehetetlen tömegével (centrifugális erő: $\mathbf{F}_{cf}$) arányos:

$$F_g = m_s g_s$$

$$F_{cf} = m_t r\omega^2$$

(itt g_s az m_s súlyos tömeggel arányos, tömegvonzásból származó erő arányossági tényezője, ω a Föld forgásának szögsebessége, r pedig a vizsgált – körpályán mozgó – pont pályájának sugara).

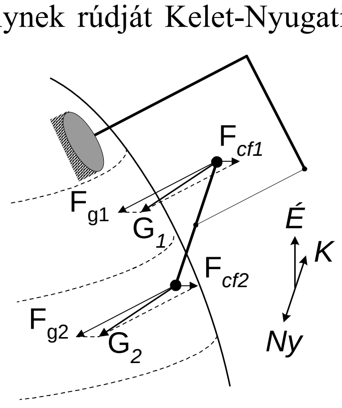
A Föld adott helyén, amelyet az ábrán látható ψ szöggel jellemezhetünk, a centrifugális erő és a tömegvonzásból származó erő hányadosa az alábbi összefüggéssel adható meg:



$$\frac{\sin\delta}{\sin(\delta+\psi)} = \frac{F_{cf}}{F_g} = \frac{m_t r\omega^2}{m_s g_s}.$$

Ebből következik, hogy adott földrajzi helyen a **G** eredő erő irányát meghatározó δ szög függ a tehetetlen- és súlyos tömeg hányadosától.

Eötvös készített egy igen érzékeny torziós mérleget, amelynek rúdját Kelet-Nyugati irányba állította (ábra). A rúd egyik végére platina súlyt, a másikra a lehető legpontosabban azonos tömegű, más anyagú testet rögzített.



Ha a két testre a súlyos és tehetetlen tömeg hányadosa nem azonos, akkor a két testre ható eredő erő ($\mathbf{G}_1$ és $\mathbf{G}_2$) iránya eltérő, ezért ezeknek az erőknek a vízszintes komponense is különböző lesz. Emiatt a torziós mérlegre egy forgatónyomaték lép fel, ami azt addig forgatja el, amíg a szálban ébredő – a szögelfordulással arányos – ellenkező irányú rugalmas forgatónyomaték ki nem kompenzálja. Ha az elfordulást megmérjük, akkor ki tudjuk számítani a forgatónyomatékot, abból pedig meghatározhatjuk a súlyos és tehetetlen tömeg hányadosának eltérését a két test esetén. A mérésnél természetesen a kiinduló egyensúlyi helyzetben nem ismerjük az elfordulás szögét, hiszen csak az egyensúlyt tudjuk megállapítani. Ezért az egyensúly beállta után az eszközt függőleges tengely körül 180°-kal el kell fordítani, és ekkor az inga rúdja a fellépő ellenkező irányú forgatónyomaték miatt az eszközhöz képest elfordul. Ezt az elfordulást már észlelni tudjuk.

Eötvös ezzel a módszerrel különböző anyagú testeket hasonlított össze az etalonként használt platina súllyal, az eszköz elfordításakor azonban egyetlen testnél sem észlelte az inga rúdjának elfordulását. Vagyis azt az eredményt kapta, hogy – a mérési hiba határain belül – a különböző testeknél a súlyos- és tehetetlen tömeg hányadosa azonos. A kísérleti eszköz egyre tökéletesebb változatával végrehajtott mérései alapján Eötvös végül (1908-ban) azt állapította meg, hogy az $\frac{m_t}{m_s}$ hányadosok egymástól illetve az

[1] EÖTVÖS Loránd (1848-1919) magyar fizikus

egységtől való eltérése legfeljebb $5\cdot 10^{-9}$ lehet (több, mint fél évszázaddal később korszerűbb eszközökkel, kissé eltérő módszerrel a mérés pontosságát Dicke[1] megjavította, és megállapította, hogy az eltérés maximális értéke kb. 10^{-11} lehet).
A súlyos- és tehetetlen tömeg azonossága az általános relativitáselmélet egyik alapvető feltételezése.

[1] Robert Henry DICKE (1916-1997) amerikai fizikus