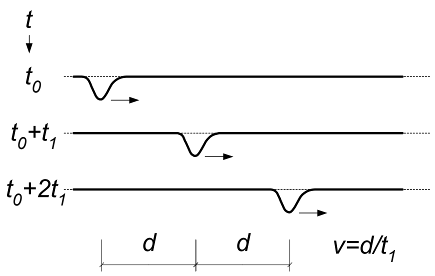
Hullámok

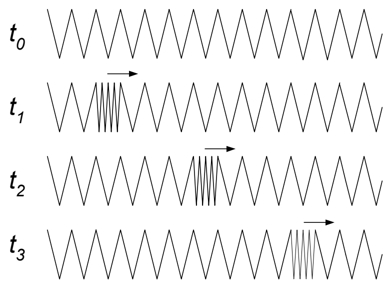
A különböző fizikai mennyiségek változása – pl. egy rezgés – igen gyakran a létrehozásának helyétől távolabb is kivált hatásokat: a létrehozott *változás* – vagy más néven *zavar* – a térben elterjed.
A különböző zavarok térbeli terjedését *hullámnak* (néha *hullámterjedésnek*)-, azt a helyet pedig, ahol a zavar létrejött, *hullámforrásnak* nevezik.
A hullám igen gyakori jelenség, és szoros kapcsolatban áll a rezgésekkel, hiszen a hullámban lényegében valamilyen rezgés terjed tova a térben.
A zavarterjedésnek számtalan példája van, ezek közül egyesek szemmel látható módon mennek végbe, és egyszerű kísérletekkel bemutathatók.

KÍSÉRLET:
Ha egy kifeszített rugalmas kötélre ráütünk egy rúddal, tehát egy egyszeri kitérést („völgyet”) hozunk létre (ábra), akkor ez a kitérés végigszalad a kötélen, vagyis a kötélnek a ráütéstől távoli pontjai is megismétlik a létrehozott kitérést[1]. Megfigyelhetjük, hogy a zavar egyenletes mozgással halad a kötélen.



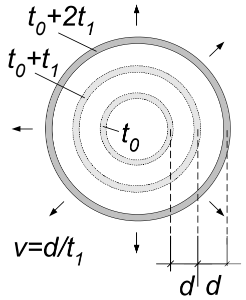
Ettől kissé eltérő jellegű zavarterjedést láthatunk egy csavarrugóban létrehozott deformációnál.

KÍSÉRLET:
Nagyobb átmérőjű, gyenge csavarrugó egyik végét egy hirtelen mozdulattal nyomjuk össze a rugó tengelyével párhuzamosan. Ez a deformáció a rugó meneteinek sűrűsödésével jár, és ez a sűrűsödés jól láthatóan végigszalad a rugón. A zavar itt is egyenletesen terjed.



Az előbbi esetekben a zavar egy dimenzióban (kötél vagy csavarrugó mentén) terjedt. Kétdimenziós zavarterjedés legegyszerűbben egy vízfelületen mutatható be, ami rugalmas hártyaként viselkedik.

KÍSÉRLET:
Vízfelület egy pontjában létrehozott kitérés a felületen egy táguló kör formájában minden irányban terjed (ábra), és a távolabbi pontok megismétlik a létrehozott kitérést. Ez világosan látszik, ha a víz felületén elhelyezünk egy parafa dugót: a dugó a zavar megérkezésekor megemelkedik és lesüllyed, de a zavar áthaladása után helyben marad. Ez azt is mutatja, hogy a kifelé szaladó körben – a látszat ellenére – nem a víz áramlik, hanem a létrehozott állapotváltozás (zavar) terjed.

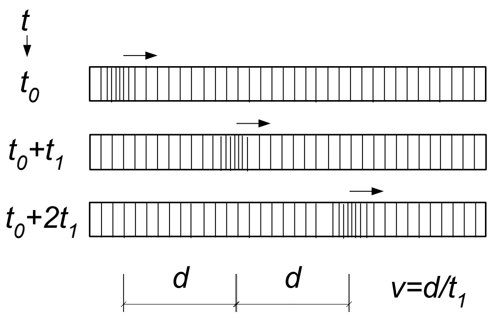


---

[1] A ráütés helyén a völgy fokozatosan megszűnik, és elvileg ellenkező irányú kitérés is létrejön. Ez azonban a legtöbb esetben a nagy csillapítás miatt alig észlelhető. A megfigyelést zavarhatja, hogy ha a zavar eléri a kötél végét, akkor elindul visszafelé (visszaverődik). A leírt egyszerű zavarterjedés csak eléggé hosszú kötélen figyelhető meg tisztán. A visszaverődés hatásaival később foglalkozunk.

A zavarterjedés más esetei nem ennyire szemléletesek, de a zavarterjedés ténye legtöbbször ilyenkor is könnyen kimutatható.

A csavarrugón bemutatott esethez hasonló – de szemmel nem látható – zavarterjedés jön létre, ha egy rugalmas rúd egyik végét a rúd tengelyével párhuzamosan megütjük. Ekkor ott a rúd összenyomódik (az ábrán ezt sűrűbb vonalkázással érzékeltettük), és ez az összenyomódás szalad végig a rúdon. Ugyanez történik egy dugattyúval lezárt edényben lévő gázoszlopban, ha a dugattyút hirtelen elmozdítva, a gázt a dugattyúnál összenyomjuk. A zavar megérkezése a rúd vagy gázoszlop másik végére megfelelő elmozdulás- vagy nyomásérzékelővel észlelhető.



A háromdimenziós hullámterjedés sem szemléltethető egyszerűen, de ezzel kapcsolatban számos hétköznapi tapasztalatunk van. Egy rezgő tárgy által létrehozott hang hullámként minden irányban terjed: egy adott helyen megszólaló hangot más helyeken is hallunk. Egy fényfelvillanás elektromágneses hullámként szintén minden irányban terjed, és a felvillanás helyétől távoli pontokban is észlelhető.

A hullámterjedés mechanizmusa függ a zavar jellegétől. Egy rugalmas közeg mechanikai deformációja az anyag részei közti rugalmas kapcsolatok miatt terjed, ezeket a rugalmas közegekben létrehozott zavarokat rugalmas hullámoknak nevezik. Ilyenek pl. a kísérletekben látott kötélhullámok vízhullámok vagy a hang. Az elektromos vagy mágneses erőtér változása miatt létrejött elektromágneses zavarok terjedése a változó mágneses- és elektromos tér egymást létrehozó hatásán alapul. Az így létrejött elektromágneses hullámok közeg nélkül is terjedhetnek. Ilyenek pl. a rádióhullámok, a fény, a röntgen- és a gamma sugárzás.

Most a *rugalmas hullámokkal* foglalkozunk. Tárgyalásunk során megismerkedünk a hullámterjedés leírására szolgáló alapvető mennyiségekkel és törvényekkel, majd foglalkozunk a rugalmas hullámokra vonatkozó speciális jelenségekkel.

Annak ellenére, hogy most kifejezetten a rugalmas hullámokról lesz szó, az itt tárgyalt anyag jól használható más hullámok tárgyalásánál is, hiszen a zavarterjedésnek vannak általános jellegzetességei, amelyeknek leírására a különböző hullámok esetén ugyanazokat a fogalmakat és módszereket alkalmazhatjuk.

Hullámtípusok és hullámfüggvények

A terjedő zavar adott helyen valamilyen mennyiség időbeli változását jelenti. A kötél esetében pl. egy *adott pontban* a zavar megérkezése után a kitérés *időben változik*. Másrészt *adott időpillanatban* a mennyiség pillanatnyi értéke *helyről-helyre más*. A kötélen haladó pulzus példájánál maradva, a kötélnek egy kiszemelt helyét megfigyelve, azt látjuk, hogy egy darabig nincs kitérés, azután a vizsgált pont kitér, majd a kitérés megszűnik. A kötélre egy adott időpillanatban ránézve pedig azt látjuk, hogy a kötél nagy része deformálatlan, de azon a helyen, ahová a zavar éppen ebben a pillanatban megérkezett, egy kitérést látunk.
A zavarterjedés tehát csak akkor írható le, ha a vizsgált mennyiség időbeli változását és térbeli eloszlását is ismerjük. Ehhez egy *helytől és időtől függő hullámfüggvény* szükséges.
Ha a zavar a ψ-vel jelölt mennyiség változásának tovaterjedésével jár, akkor a zavarterjedés leírására használt hullámfüggvény általános matematikai alakja $\psi = \psi(\mathbf{r},t)$ ($\mathbf{r}$ annak a pontnak a helyvektora, ahol a zavart vizsgáljuk, t az idő). A zavar lehet vektor-jellegű, amelynek iránya van (pl. elmozdulás), ilyenkor ψ a vektor nagyságát, vagy egyik komponensét jelöli, de lehet skaláris is (pl. nyomásváltozás).

A hullámok típusai

A hullámok változatos formái közötti eligazodás kedvéért célszerű a hullámokat csoportosítani. Ezt többféle szempont szerint tehetjük meg, amelyek közül a legfontosabbak a következők.
A hullám lehet
a terjedés térbeli viszonyai szerint:

- *egydimenziós* (pl. rugalmas kitérés kötélen)
- *kétdimenziós* (pl. zavarterjedés vízfelületen)
- *háromdimenziós* (ez a leggyakoribb, pl. hang vagy fény terjedése kiterjedt közegben).

a terjedés és a zavar irányának viszonya szerint:

- *transzverzális hullám* (a zavart jellemző vektor iránya merőleges a terjedés irányára, pl. egy rugalmas kötél mentén, a kötélre merőleges kitérés terjedése)
- *longitudinális hullám* (a zavart jellemző vektor iránya párhuzamos a terjedés irányával, pl. egy rugó hosszirányú összenyomásával keltett zavar terjedése a rugó mentén).

a zavar azonos értékeinek megfelelő (azonos fázisban lévő) pontok elhelyezkedése szerint:

- síkban terjedő hullámoknál az azonos fázisú helyek egy vonalon vannak, és a hullámokat a vonal alakja szerint is lehet csoportosítani: pl. *egyenes hullám*, *körhullám* (utóbbira példa egy vízfelületen egy pontban keltett hullámok terjedése),
- háromdimenziós hullámoknál az azonos fázisú helyek egy felületen helyezkednek el, ezeket a felületeket gyakran *hullámfelületeknek* nevezik, és a hullámfelületek alakja szerint beszélünk *síkhullámról*, *hengerhullámról*, *gömbhullámról*,
- a vonal- és síkhullám terjedése – az egydimenziós hullámokhoz hasonlóan – egyetlen (az azonos fázisú vonalakra, illetve síkokra merőleges) koordinátával leírható, bonyolultabb hullámok (pl. kör-, henger- vagy gömbhullámok) a hullámforrástól távol közelítőleg egyenes- illetve síkhullámnak tekinthetők,

– a hullám terjedése során a zavar fokozatosan újabb helyekre jut el, így az azonos fázisú felületeknek (vonalaknak) van egy speciális fajtája: ennek egyik oldalán már megjelent a zavar, a másik oldalán még nem. A hullámot tartalmazó térrészt, a *hullámteret* határoló, azonos fázisú felületet (vonalat) *hullámfrontnak* nevezik.

a terjedő zavar időfüggése szerint:

– ha a zavar időfüggését harmonikus függvény adja meg, akkor a létrejött hullámot *harmonikus hullámnak* nevezik,
– egyéb esetekben a hullám *nem harmonikus* (a nem harmonikus hullámok harmonikus hullámok összegzéseként – idegen szóval szuperpozíciójaként – foghatók fel).

Egydimenziós hullámterjedés, a síkhullám hullámfüggvénye

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk először egy olyan zavart, amely egy irányban (pl. az x tengely mentén) terjed. Egy ilyen hullám a gyakorlatban pl. úgy valósítható meg, hogy egy kifeszített, rugalmas kötélen létrehozunk egy kitérést, ami a kötél mentén terjed tovább.
Ha az $x=0$ helyen (például a zavar forrásánál) a zavar időbeli változása

$$\psi(0,t)=f(t),$$

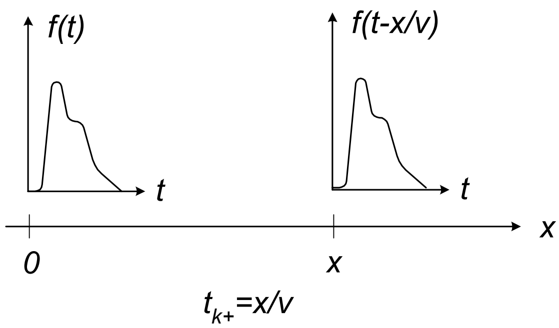
és a zavar adott c sebességgel terjed a térben, akkor a zavar egy pozitív x helyre

$$t_{k+}=\frac{x}{v}$$

egy negatív x helyre

$$t_{k-}=-\frac{x}{v}$$

késéssel érkezik meg. Ha feltételezzük, hogy a



terjedés közben a zavar nem változik meg, akkor az x helyen a zavar időbeli változását a

$$\psi(x,t)=f(t\mp\frac{x}{v})$$

hullámfüggvény írja le (a "-" jel az x-tengely pozitív-, a "+" jel az x-tengely negatív irányában terjedő hullámot jelent). Ez az egydimenziós hullámterjedést leíró hullámfüggvény általános alakja, amely konkrét zavarterjedés esetén meghatározott függvényalakot ölt.
A terjedési irányban felvett egyetlen koordinátával írható le egy *síkhullám* is, ahol a hullám terjedési irányára merőleges bármelyik síkban minden pont ugyanúgy viselkedik. Ezért a fenti – egydimenziós terjedésre felírt

$$\psi(x,t)=f(t\mp\frac{x}{v})$$

alakú függvény egyben a *síkhullám hullámfüggvénye* is.
A felületen terjedő *egyenes hullám* vagy az *egydimenziós* közegben terjedő hullám lényegében a *síkhullám speciális esete*: előbbi esetben az azonos fázisú helyek felületből egyenessé-, utóbbiban egyetlen ponttá zsugorodnak.
Mivel a továbbiakban az egy- és kétdimenziós közegben terjedő hullámokat legtöbbször az egyszerűbb szemléltetés kedvéért használjuk, a fenti hullámfüggvénnyel jellemzett hullámot gyakran akkor is síkhullámnak nevezzük, ha egy- vagy kétdimenziós terjedésről van szó.

A hullámban terjedő energia

Ahhoz, hogy egy rugalmas közegben deformációt hozzunk létre, munkát kell végeznünk. Amikor ez a deformáció zavarként megjelenik egy távolabbi helyen, akkor ott is munkavégzésre van szükség. Ez csak úgy lehetséges, hogy a hullámmal nem pusztán egy állapotváltozás terjed, hanem a hullám energiát is szállít.
A hullám által szállított energiát leggyakrabban az energiaáram nagyságával (Φ) jellemzik, amely egy adott helyen a hullámmal átáramló ΔE energia és az áthaladás Δt idejének hányadosa:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} .$$

Az energiaáram az energiaterjedést globálisan jellemzi, mert egy teljes felületen áthaladó összes energiát adja meg. Előfordulhat azonban, hogy az energiaáram erőssége egy nagyobb felületen nem egyenletesen oszlik el, hanem helyről helyre változik. Az energiaáramlás helyi (lokális) jellemzésére vezették be az energia-áramsűrűséget. Ha a hullám terjedésére merőleges ΔS nagyságú felületelemen $\Delta\Phi$ energiaáram halad át, akkor az energia-áramsűrűség (amit a hullámtanban rendszerint I-vel jelölnek):

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} .$$

Ezt a mennyiséget a hullám *intenzitásának* nevezik.
Ha egy nagyobb S felületen az I intenzitás mindenütt ugyanakkora, akkor a teljes Φ energiaáram:

$$\Phi = IS .$$

A hullám intenzitását a különböző hullámok esetén később kiszámítjuk, és a terjedő hullám jellemzőivel kifejezzük, most – bizonyítás nélkül – csak annyit bocsátunk előre, hogy az intenzitás arányos a hullám amplitúdójának négyzetével, azaz

$$I = CA^2 ,$$

ahol C a hullám egyéb jellemzőitől függő mennyiség.
Ezt azért fontos tudni, mert egy gömbhullám esetén a forrásban betáplált energia egyre nagyobb felületen oszlik el, így – ha az I energiaáram nem változik – a hullámforrástól r távolságban az energia-áramsűrűség egyre kisebb lesz. Ennek az a következménye, hogy a hullám amplitúdójának is csökkenni kell, hiszen r távolságban

$$\Phi = IS = I4r^2\pi = CA^2 4r^2\pi = \acute{a}lland\acute{o} .$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $A^2 \sim \frac{1}{r^2}$, vagyis $A(r) \sim \frac{1}{r}$. A gömbhullám amplitúdója tehát a forrástól távolodva egyre csökken, akkor is, ha nincs semmilyen energiaelnyelő folyamat.

Gömbhullám hullámfüggvénye

Ha a hullám homogén, izotróp közegben terjed, vagyis a terjedése nem függ a helytől és az iránytól, akkor egy pontban keltett zavar minden irányban ugyanolyan sebességgel terjed. Ennek következtében pontszerű hullámforrás esetén az azonos fázisú helyek egy gömbfelületen (felületi hullámoknál egy körön) helyezkednek el, vagyis gömbhullám (körhullám) jön létre.
A síkhullámra vonatkozó meggondolásaink alapján megpróbálhatjuk felírni a gömbhullám hullámfüggvényének általános alakját, hiszen első pillantásra úgy látszik, hogy csak az x koordinátát kell helyettesíteni a pontforrástól mért r távolsággal. Ezzel a feltevéssel az alábbi hullámfüggvényt kapjuk:

$$\psi(r,t) = f(t \mp \frac{r}{v}) .$$

A „-” jel a forrástól távolodó, a „+” jel a forrás felé haladó hullámra vonatkozik.
A helyzet sajnos ennél bonyolultabb, mert láttuk, hogy a gömbhullám amplitúdója a forrástól távolodva csökken, ezért helyesebb a *gömbhullám hullámfüggvényét* a

$$\psi(r,t) = \frac{A_0}{r} f(t \mp \frac{r}{v})$$

alakban felírni, ahol A_0 az amplitúdó a forrásban.
Ha a gömbhullámot nagyon kis térrészben, vagy a forrástól nagy távolságban vizsgáljuk, akkor közelítőleg síkhullámnak tekinthetjük. Ilyenkor – ha energiaveszteségek nincsenek – az amplitúdó helyfüggése elhanyagolható.

Egydimenziós, harmonikus síkhullám

Ha a zavar időbeli változása szinusz vagy koszinusz függvénnyel írható le, vagyis a zavar például

$$f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

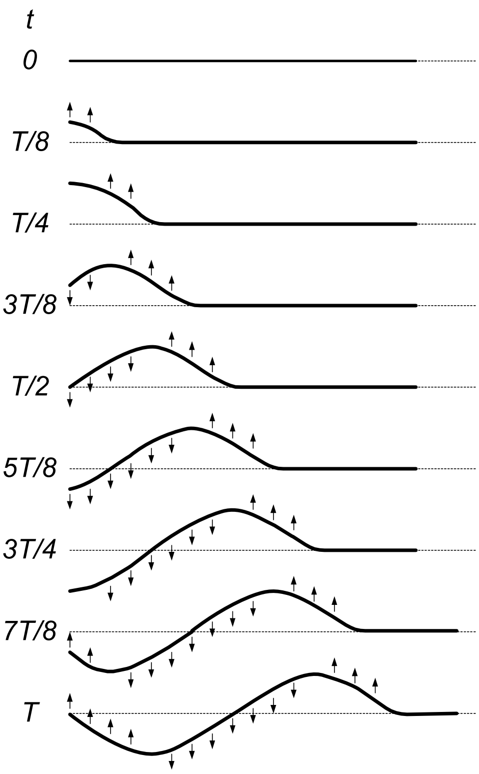
alakú harmonikus rezgés, akkor a zavarterjedést leíró függvény is ilyen lesz.
Ha a zavar egy vonalszerű közegben vagy egy kiterjedt közegben síkhullámként v sebességgel terjed az x-tengely mentén, akkor a

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega(t \mp \frac{x}{v}) + \alpha\right]$$

hullámfüggvénnyel írható le, ahol α fázisállandó. Az ilyen állandó amplitúdójú hullámot *harmonikus síkhullámnak* nevezik.
A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a síkhullám tárgyalásánál általában a pozitív x-tengely irányában terjedő hullám hullámfüggvényét írjuk fel, vagyis a

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right]$$

alakot használjuk. Az így kapott összefüggésekből előjelváltással mindig megkapható az ellenkező terjedési iránynak megfelelő eredmény is.
Természetesen a harmonikus hullám szinusz függvénnyel is leírható, mi a továbbiakban általában a koszinusz alakot használjuk.



*************** ***************

Ahogy a harmonikus rezgést megadó függvény, úgy a harmonikus síkhullám hullámfüggvénye is felírható komplex alakban. Trigonometrikus formában ekkor a hullámfüggvény:

$$\psi(x,t) = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right) + iA\sin\left(\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right).$$

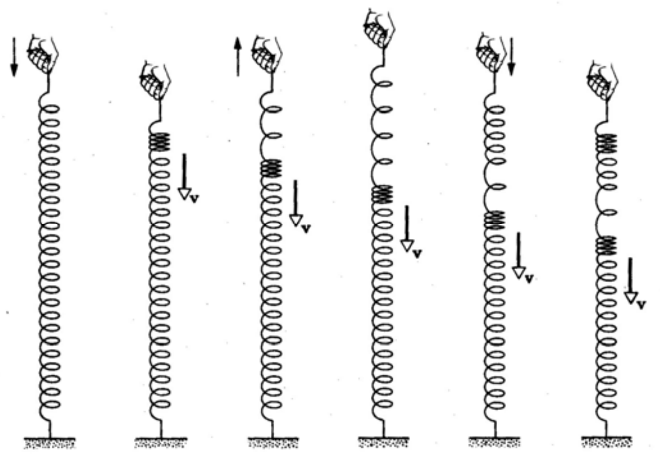
Ugyanez exponenciális alakban:

$$\psi(x,t) = Ae^{i\left(\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right)} .$$

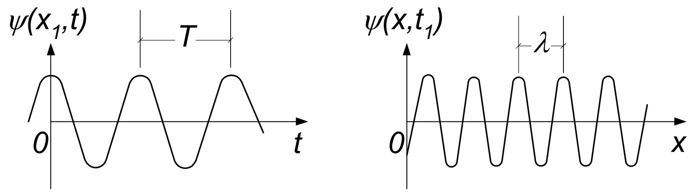
*************** ***************

Rugalmas kötélen terjedő transzverzális, harmonikus hullám kialakulását mutatja sematikusan a jobboldali ábra. Itt a kötél alakját mutatjuk be a forrásban lezajló rezgés egy teljes periódusának (T) különböző időpillanataiban. A „pillanatképek” egyenlő, $\frac{T}{8}$ időközökben készültek. Az ábrán feltüntettük a kötél egyes részeinek pillanatnyi mozgásirányát is.

Hasonló módon kaphatjuk meg egy csavarrugóban terjedő longitudinális, harmonikus hullám terjedésének pillanatképeit is, csak ott a kitérések a terjedés irányával párhuzamosak. A mellékelt ábrán a rugó deformációjában bekövetkező változások láthatók, amelyeket $\frac{T}{4}$ időközönként ábrázoltunk.

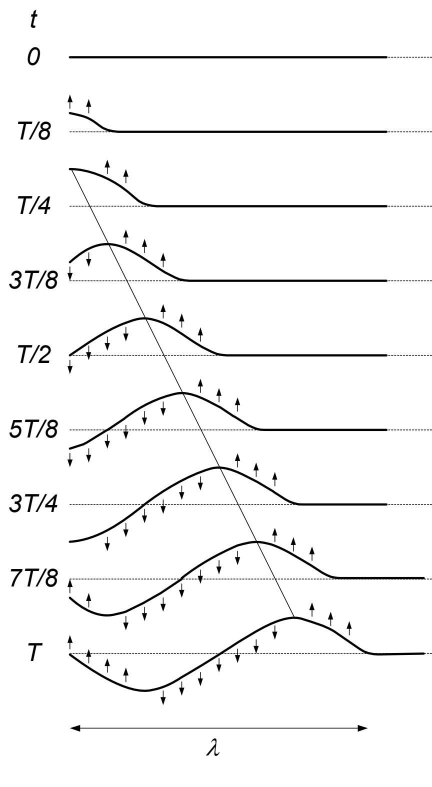


Korábban már volt szó arról, hogy a hullámfüggvény adott helyen megadja a zavar időbeli változását, adott időpillanatban pedig megadja a zavar térbeli eloszlását. Ezt mutatja egy harmonikus síkhullám esetén a mellékelt ábra, amelyen a $\psi(x_1,t)$ függvény megadja a vizsgált mennyiség időbeli változását az x_1 helyen, a $\psi(x,t_1)$ függvény pedig a vizsgált mennyiség térbeli eloszlását a t_1 időpillanatban).



A harmonikus hullám a definíció szerint egy végtelen hosszú, csillapítatlan hullámvonulat, hiszen változó amplitúdójú vagy véges hosszúságú hullámvonulat nem írható le egyetlen harmonikus függvénnyel. A gyakorlatban a harmonikus hullám közelítő megvalósítása egy nagyon kis csillapodású, igen hosszú hullámvonulat.

A hullámok vizsgálatánál a harmonikus hullám ugyanolyan fontos szerepet tölt be, mint a rezgéseknél a harmonikus rezgés. Itt is érvényes ugyanis, hogy tetszőleges hullám felfogható harmonikus hullámok szuperpozíciójaként.



A fázissebesség

A rugalmas kötélen terjedő harmonikus hullám kialakulását bemutató, korábbi ábrát itt kiegészítve látjuk. Bejelöltük azt a λ távolságot, ameddig a zavar a T rezgésidő alatt eljut, és egy vonallal összekötöttük a zavar maximális értékének helyét különböző időpillanatokban megadó pontokat. Látható, hogy az idő és a befutott távolság egymással arányos, vagyis a maximumhely egyenletes sebességgel halad a terjedés irányában, és az ábrán látható esetben $\frac{3}{4}T$ idő alatt $\frac{3}{4}\lambda$ távolságra jutott el. Ha a λ távolságot ismerjük, akkor kiszámíthatjuk a

maximumhely mozgásának v_f sebességét is: $v_f = \frac{\lambda}{T}$. Bármilyen más fázisban lévő pont mozgását vizsgáljuk, ugyanezt a mozgási sebességet kapjuk, ez a *fázissebesség*.
Nézzük meg most egy pozitív x-tengely irányában haladó síkhullámban, hogy milyen összefüggés van a hullámfüggvényben korábban zavarterjedési sebességként bevezetett v sebesség és a v_f fázissebesség között. Ehhez felhasználjuk azt, hogy adott φ fázisú hely adott t időpillanatban olyan x koordinátájú helyen van, amelyre

$$\varphi = \omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha = \text{állandó}.$$

Az összetartozó x-t értékpárokra ebből azt kapjuk, hogy

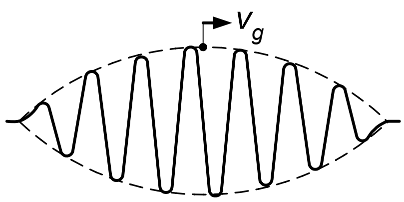
$$x = vt - \frac{v(\varphi - \alpha)}{\omega}.$$

Eszerint a pozitív x-irányban haladó harmonikus síkhullámban az azonos fázisú helyek sebessége

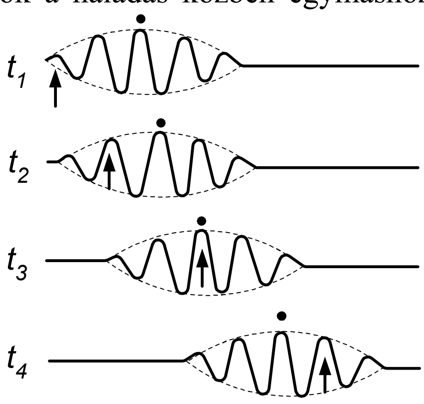
$$v_f = \frac{dx}{dt} = v.$$

A negatív x-irányban haladó síkhullámra természetesen azt kapjuk, hogy $v_f = -v$.
A fázissebesség tehát azonos a korábban "zavarterjedési sebesség"-ként bevezetett mennyiséggel.
A továbbiakban a fázissebességet index nélküli „v”-vel jelöljük.

Nem harmonikus hullám terjedése, a csoportsebesség
Nem harmonikus hullám terjedése esetén a terjedési sebesség fogalmát pontosítanunk kell. Ennek az az oka, hogy egy ilyen hullám különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciójának tekinthető, vagyis benne különböző frekvenciájú harmonikus hullámok terjednek. Az ilyen hullámok tipikus példája az ábrán látható rövid hullámvonulat, amelyet – éppen összetett volta miatt – *hullámcsoportnak* vagy *hullámcsomagnak* neveznek.



A terjedési sebességgel kapcsolatban akkor lép fel probléma, ha – mint az gyakran előfordul – a harmonikus hullám v fázissebessége függ a frekvenciától, $v = v(\omega)$, így a hullámcsomagot alkotó, különböző frekvenciájú harmonikus hullámok fázissebessége eltérő. Ez a jelenség a hullámok *diszperziója*.
Diszperzió esetén az összetevő harmonikus hullámok a haladás közben egymáshoz képest eltolódnak, emiatt az összegük, és így általában a hullámcsomag alakját meghatározó burkológörbe (az ábrán szaggatott vonallal jelölve) alakja is változik. A csomag sebességét ilyenkor a burkológörbe maximumának (az ábrán fekete pont) mozgási sebességével, a *csoportsebességgel* (v_g) adhatjuk meg.



Egy hullámcsomag különböző időpillanatokban készített pillanatfelvételeinek sematikus képét látjuk a következő ábrán. A szaggatottan berajzolt burkológörbe maximumának helyét fekete pont-, az eredő hullám egy kiszemelt maximumának mindenkori helyét pedig nyíl jelöli.

Ebben az esetben a fázissebesség nagyobb, mint a csoportsebesség: az eredő hullám kiszemelt maximumhelye (nyíl) lehagyja a csomag maximumhelyét (pont). Ez egyben azt is mutatja, hogy az eredő hullám a burkológörbe belsejében mozog.
A diszperzió megfigyelhető vízhullámok esetén és valamilyen közegben terjedő elektromágneses hullámoknál. Utóbbi eset igen fontos szerepet játszik pl. az optikában.

A hullámhossz és a hullámszám

A harmonikus hullám kialakulását szemléltető ábrán λ-val jelöltük azt a távolságot, amelyre a zavar a T rezgésidő alatt eljut. Ezt a távolságot *hullámhossznak* nevezik.
Elnevezése érthetőbbé válik, ha egy másik definícióját használjuk, amely szerint a λ hullámhossz egy tetszőleges t időpillanatban azonos fázisban lévő, *szomszédos* pontok távolsága (vagyis a hullám helyfüggését megadó harmonikus függvény egy teljes periódusának hossza, amint az a fenti ábrán látható). Ezt a távolságot annak felhasználásával kaphatjuk meg, hogy az azonos fázisban lévő helyeken a hullámfüggvény értéke azonos:

$$\psi(x,t)=\psi(x+\lambda,t)\ .$$

Ez a harmonikus síkhullámban a koszinusz (vagy szinusz) függvény argumentumára vonatkozóan azt jelenti, hogy

$$\omega(t-\frac{x+\lambda}{v})+\alpha-\omega(t-\frac{x}{v})-\alpha=2\pi\ .$$

Ebből – a korábbi definícióval összhangban – azt kapjuk, hogy

$$\lambda=\frac{2\pi v}{\omega}=vT\ .$$

A hullámhosszal összefüggő, gyakran használt mennyiség a *hullámszám* (k), aminek definíciója:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$$

Ezzel a harmonikus síkhullám egyenlete átírható az alábbi alakba:

$$\psi(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\alpha)\ .$$

*************** *************** ***************

Ugyanez a hullámfüggvény komplex alakban: $\tilde{\psi}(x,t)=Ae^{i(\omega t-kx+\alpha)}$.

*************** *************** ***************

Síkhullám térbeli terjedésének leírása

Ha egy síkhullám az x-tengely mentén terjed, akkor leírására a

$$\psi(x,t)=f\left(t\mp\frac{x}{c}\right)$$

hullámfüggvényt használhatjuk. Speciálisan harmonikus síkhullám esetén a hullámfüggvény:

$$\psi(x,t)=A\cos\left(\omega(t\mp\frac{x}{c})+\alpha\right)=A\cos(\omega t\mp kx+\alpha)$$

Ez a koordináta-választás azonban nem mindig lehetséges, ezért most megvizsgáljuk, hogy milyen hullámfüggvényt használhatunk, ha a síkhullám nem valamelyik koordinátatengely mentén terjed.
Az ábrán feltüntettük az azonos fázisban lévő helyek síkjait. A hullám ezekre merőlegesen terjed, terjedési irányát az $\mathbf{u}$ egységvektor mutatja.
Egy tetszőleges $\mathbf{r}$ helyvektorú pontban, a t időpillanatban a hullámfüggvényt úgy kaphatjuk meg, hogy kiszámítjuk a $t=0$ időponthoz tartozó illetve az $\mathbf{r}$ helyvektorú ponton átmenő (a t időpillanathoz tartozó) két

azonos fázisú sík közötti távolságot, amelyet az ábrán d-vel jelöltünk. A hullámfüggvény argumentumába ugyanis most a $t \mp \frac{d}{v}$ mennyiség kerül.

Az $\mathbf{r}$ helyvektortól függő – az előjelet is tartalmazó – d távolság az ábra jelöléseivel:

$$d(\mathbf{r}) = \mathbf{ru},$$

ezért a hullámfüggvény az $\mathbf{r}$ helyvektorú pontban

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi\big(d(\mathbf{r}),t\big) = f\left(t - \frac{d(\mathbf{r})}{v}\right) = f\left(t - \frac{\mathbf{ru}}{v}\right)$$

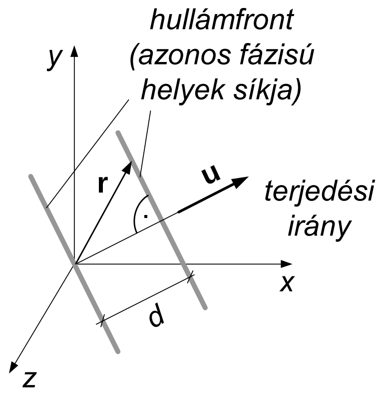
Harmonikus síkhullámnál:

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos\left(\omega(t - \frac{\mathbf{ru}}{v}) + \alpha\right)$$

vagy

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - k\mathbf{ur} + \alpha)$$

Vezessük be a $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ hullámszám-vektort, amely a terjedési irányt mutatja, és nagysága $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Ezzel a koordinátarendszerhez képest tetszőleges irányban haladó harmonikus hullám hullámfüggvénye:



$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha).$$

Általános irányú terjedésnél $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$.

Olyan gömbhullámoknál (vagy kétdimenziós esetben körhullámoknál), amelyeknek forrása az origóban van, érvényes, hogy $\mathbf{r} \| \mathbf{u}$, ezért $d(\mathbf{r}) = \mathbf{ru} = r$. A gömbhullámoknál (körhullámoknál) tehát a hullámfüggvény

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{A_0}{r}\cos\big(\omega t - kr + \alpha\big).$$

Ilyenkor az azonos fázisú helyek az $\mathbf{ru} = \acute{a}lland\acute{o}$, vagyis az $r = \acute{a}lland\acute{o}$ összefüggéssel megadott gömbfelületen (síkbeli terjedésnél körön) helyezkednek el.

*************** *************** ***************

A sík- és gömbhullám fenti hullámfüggvényei komplex formában a

$$\tilde{\psi}(x,t) = Ae^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)}$$

illetve

$$\tilde{\psi}(x,t) = \frac{A_0}{r}e^{i(\omega t - kr + \alpha)}$$

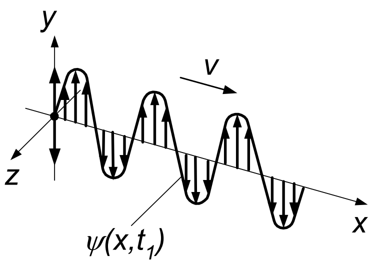
alakot öltik.

*************** *************** ***************

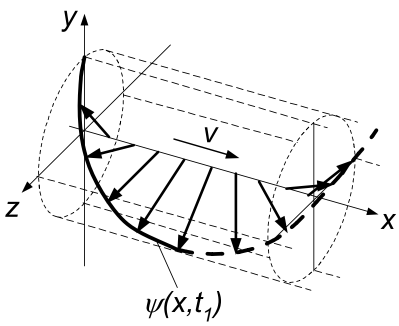
Hullámok polarizációja

Ha a hullámban terjedő zavarnak iránya van (pl. egy kitérés), akkor a hullám lehet longitudinális vagy transzverzális, attól függően, hogy a zavar iránya párhuzamos a terjedési iránnyal vagy arra merőleges.
Longitudinális hullámban egyetlen kitüntetett irány van, a zavar- és a zavarterjedés közös iránya, a transzverzális hullámban viszont a zavar- és a zavarterjedés iránya szétválik („polarizálódik”), ezért két kitüntetett irány van.
Ha a hullámforrásban a transzverzális zavar iránya időben állandó, akkor homogén, izotróp terjedés esetén a zavar iránya a hullámban sem változik meg. Ez azt jelenti, hogy a hullám terjedési iránya és a zavar iránya minden pillanatban és minden helyen ugyanabban a síkban van.

KÍSÉRLET:
Ilyen hullámot kapunk például, ha egy rugalmas kötél egyik végét mindig ugyanazon egyenes mentén mozgatjuk. Az ábrán az így kapott hullám pillanatképét (a t_1 időpillanatban) derékszögű koordinátarendszerben mutatjuk be: a hullám az *x*-tengely mentén mozog, a kitérés mindenütt *y*-irányú, a két kitüntetett irány és így a zavar térbeli eloszlását megadó görbe is az *xy*-síkban van.



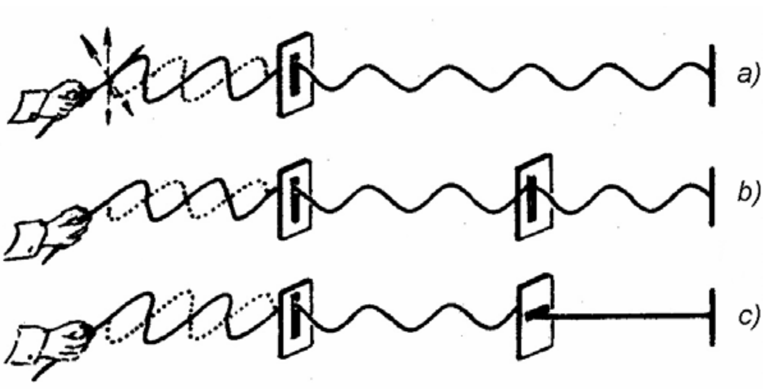
Az ilyen hullámot *síkban poláros* vagy *lineárisan poláros hullámnak*-, a két kitüntetett irány által megadott síkot pedig a hullám *rezgési síkjának* nevezik.
A hullám keltésénél azonban nem mindig teljesül a fenti feltétel, a hullámforrásban a transzverzális zavar iránya változhat, és ennek megfelelően változik a hullám rezgési síkjának helyzete is. A zavar irányának változása lehet véletlenszerű, de követhet valamilyen szabályszerűséget is.
Szabályszerű változásról beszélhetünk például akkor, ha a rugalmas kötél végét egy kör mentén mozgatjuk (ábra). Ekkor a kötél többi pontja is körmozgást végez, a forrástól mért távolságnak megfelelő fáziskéséssel. Az ilyen hullámot *cirkulárisan poláros hullámnak* nevezik.



Az ábrán látható cirkulárisan poláros hullám forrásában a zavart jellemző vektor állandó szögsebességgel körbeforog. Ez a forgó vektor minden pillanatban felbontható egy-egy változó hosszúságú *y*- és *z*-irányú vektorra, ezért a cirkulárisan poláros hullám felbontható két egymásra merőleges rezgési síkú, azonos amplitúdójú, lineárisan poláros hullámra. Az összetevő hullámok amplitúdója ekkor az említett kör sugarával egyenlő.
Ha a forrásban a zavart jellemző vektor végpontja egy ellipszis mentén mozog, akkor a keletkező hullámot *elliptikusan poláros hullámnak* nevezik. Ez a hullám mindig felbontható két egymásra merőleges rezgési síkú, különböző amplitúdójú, lineárisan poláros hullámra. Az összetevő hullámok amplitúdója ekkor az ellipszis két féltengelyének hosszával egyenlő. A cirkulárisan poláros hullám tulajdonképpen az elliptikusan poláros hullám speciális esete (a kör olyan ellipszis, amelynek két féltengelye azonos hosszúságú).
A szabálytalanul változó rezgési síkú transzverzális hullámoktól való megkülönböztetés érdekében a lineárisan-, cirkulárisan- vagy elliptikusan poláros hullámokat összefoglaló néven *poláros hullámoknak* nevezik.
Nem lineárisan poláros, transzverzális hullámból megfelelő módszerrel kiválasztható a hullámnak egy tetszőleges síkú lineárisan poláros összetevője. Ez jól szemléltethető egy rugalmas kötélen létrehozott transzverzális hullám esetében.

KÍSÉRLET:
Rugalmas kötél végét körbeforgatva, létrehozunk egy nagyjából cirkulárisan poláros hullámot (*a*) ábra), majd a kötél középpontja közelében a kötelet egy összecsukható fakerettel vesszük körül. Ezáltal a hullám egy keskeny, függőleges irányú résen kénytelen áthaladni. A rés csak a hullám függőleges összetevőjét engedi át, így tehát egy lineárisan poláros hullámot kapunk.
Ha a rést függőleges tengely körül elforgatjuk, akkor mindig az új iránnyal párhuzamos rezgési síkú lineárisan poláros hullám jön létre, vagyis ezzel a módszerrel a nem poláros hullámból tetszőleges rezgési síkú lineárisan poláros hullámot ki tudunk választani.

Az ilyen eszközöket, amelyekkel nem lineárisan poláros hullámból lineárisan poláros hullámot állíthatunk elő, *polarizátoroknak*-, azt a rezgési síkot pedig, amelyet a polarizátor átenged, a *polarizátor rezgési síkjának* nevezik. Polarizátorként a különböző hullámterjedési mechanizmusoknál más és más eszközöket alkalmaznak. Rugalmas kötélhullámok esetén a kísérletben használt rést használhatjuk, az elektromágneses hullámoknál használt eszközökről később lesz szó.



KÍSÉRLET:
Ha az előző kísérletben alkalmazott polarizátor mellett egy másik polarizátort is alkalmazunk, akkor a két polarizátor után megjelenő hullám jellege attól függ, hogy a két polarizátor rezgési síkja egymással milyen szöget zár be.
Ha a második polarizátor rezgési síkja párhuzamos az elsőével, akkor a lineárisan poláros hullám változatlanul halad át a második polarizátoron is (*b)* ábra).
Ha most a második polarizátort vízszintes tengely körül elkezdjük körbeforgatni, akkor a második polarizátor után megjelenő lineárisan poláros hullám rezgési síkja a polarizátorral együtt elfordul, és amplitúdója fokozatosan csökken.
Ha a két polarizátor rezgési síkja egymásra merőleges, akkor a második polarizátor után nincs hullám (*c)* ábra), vagyis a lineárisan poláros hullámot a rezgési síkjára merőleges polarizátor kioltja.

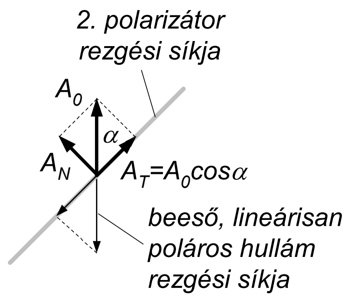
Mivel a kísérlet tanúsága szerint a polarizátor kioltja a rá merőleges rezgési síkú lineárisan poláros hullámot, a polarizátor forgatásakor bekövetkező amplitúdó- és intenzitáscsökkenés a következőképpen is felfogható.
A hullám az első polarizátor által meghatározott rezgési síkkal érkezik a második polarizátorhoz, amelynek rezgési síkja α szöget zár be az első polarizátorral illetve a beeső hullám rezgési síkjával. Ha a beeső lineárisan poláros hullámot (az ábrán A_0) felbontjuk a második polarizátorral párhuzamos (A_N)- és arra merőleges rezgési síkú (A_T) lineárisan poláros hullámokra, akkor a második polarizátor a merőleges összetevőt kioltja, és az eredeti amplitúdónak csak a második polarizátor síkjával párhuzamos összetevője halad tovább.
Az átmenő hullám amplitúdójának a két polarizátor egymással bezárt szögétől való függését az

$$A = A_T = A_0 \cos\alpha$$

összefüggés adja meg.
Mivel a hullám intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével, a második polarizátorra eső I_0 intenzitásból az átjutott I intenzitás az

$$I = I_0 \cos^2\alpha$$

összefüggésből kapható meg. Ebből visszakapjuk a tapasztalatból már ismert eredményt: ha a két polarizátor egymásra merőleges, vagyis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor $A = I = 0$, tehát nincs átmenő hullám.



Mivel a kísérletben alkalmazott második polarizátor segítségével a beérkező hullám rezgési síkját meg lehet találni, a fenti elrendezésben a második polarizátort *analizátornak* is nevezik. Ha a polarizátor és az analizátor rezgési síkja egymásra merőleges, akkor *keresztezett polarizátorokról* beszélünk. Ezzel a kifejezéssel élve, azt mondhatjuk, hogy a keresztezett polarizátorok a transzverzális hullámot kioltják, ezért alkalmazásukkal eldönthető, hogy egy hullám transzverzális vagy nem.
Mint láttuk, a polarizátor-analizátor pár az analizátor forgatásával alkalmas arra, hogy az átmenő hullám intenzitását szabályozni tudjuk. Ennek különösen az optikában van nagy jelentősége.

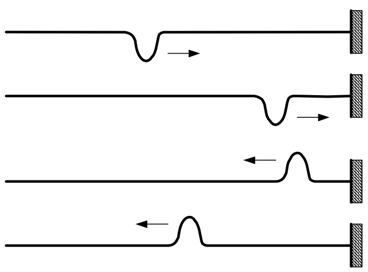
Hullámok visszaverődése és törése

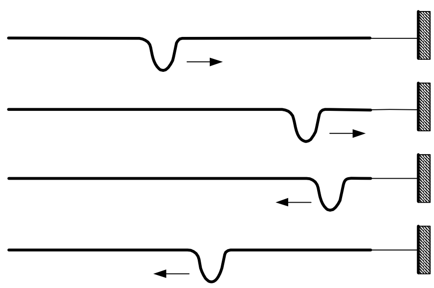
A hullámterjedés vizsgálatánál eddig azt tételeztük fel, hogy a hullám homogén közegben, állandó sebességgel terjed. Ha a hullám egy közeg határához ér, akkor a tapasztalat szerint onnan részben visszaverődik, részben pedig behatol a szomszédos közegbe, és terjedésében mindkét esetben változások állhatnak be.
Visszaverődésnél például megváltozhat a hullám fázisa, új közegbe történő behatolásnál pedig általában megváltozik a hullám terjedési sebessége, és ezzel együtt a hullámhossza, elektromágneses hullámoknál mindkét esetben megváltozhat a hullám polarizációs állapota is.
A visszaverődés és törés során a különböző típusú (rugalmas, elektromágneses) hullámok különbözőképpen viselkednek, de vannak olyan jelenségek, amelyek mindenféle hullám esetén fellépnek. Itt elsősorban ezekkel a közös jelenségekkel foglalkozunk, az egyes hullámfajtákra jellemző speciális problémákat a megfelelő helyen tárgyaljuk.

A visszaverődés és törés alapjelenségeinek bemutatására – szemléletességük miatt – elsősorban kifeszített, rugalmas kötélen-, illetve vízfelületen terjedő rugalmas hullámokat használunk.

Először végezzünk el két kísérletet rugalmas kötélen terjedő hullámokkal.

KÍSÉRLETEK:
Rugalmas kötél egyik végét rögzítsük a falhoz, úgy hogy ne tudjon elmozdulni, feszítsük ki, és a másik végéről indítsunk el egy pulzust (baloldali ábra). Jól megfigyelhető, hogy amikor a pulzus a kötél és a fal határához érkezik, onnan visszaverődik, de a kitérés iránya ellenkezőre változik. Ez azt jelenti, hogy a rögzített végről történő visszaverődésnél a hullám fázisában π nagyságú ugrás következik be.
Módosítsuk a kötél végének rögzítését úgy, hogy szabadon elmozdulhasson. Ezt – amint a jobboldali ábrán is látszik – a fal és a rugalmas kötél közé beiktatott vékony, rugalmatlan zsinórral érhetjük el. Most a kétféle kötél határáról történő visszaverődés közben a zavar iránya nem változik meg, a szabad végről történő visszaverődésnél nincs fázisugrás.



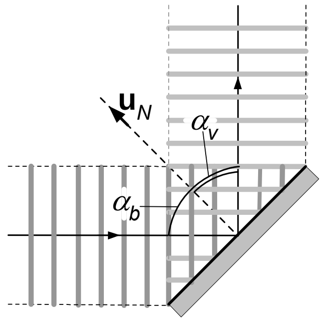


A rögzített végen bekövetkező fázisugrás oka az, hogy a falhoz érkező zavarnak a falnál el kell tűnnie, és ez csak úgy lehetséges, hogy a falnál elinduló ellentétes kitérés kompenzálja az eredeti kitérést.

Visszaverődésnél nem csak rugalmas hullámoknál léphet fel fázisugrás. A jelenség a elektromágneses hullámok esetén is megfigyelhető.

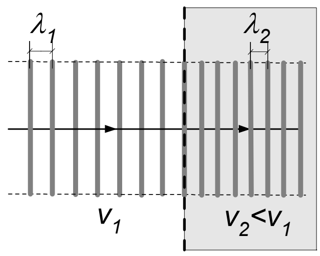
Kétdimenziós terjedésnél bekövetkező törési és visszaverődési jelenségek jól demonstrálhatók vízhullámokkal.

KÍSÉRLET:
Vízfelületet egy egyenes pálcával periodikusan ütögetve, egyenes hullámot hozunk létre, és a hullám útjába ferdén elhelyezünk egy egyenes akadályt, amelyen a hullám nem tud áthatolni (ábra). A hullám az akadályról jól láthatóan visszaverődik, mégpedig úgy, hogy az ábrán bejelölt α_b *beesési szög* megegyezik az α_v *visszaverődési szöggel* (az $\mathbf{u}_N$ vektor az akadályra merőleges irányt, a *beesési merőlegest* jelöli).

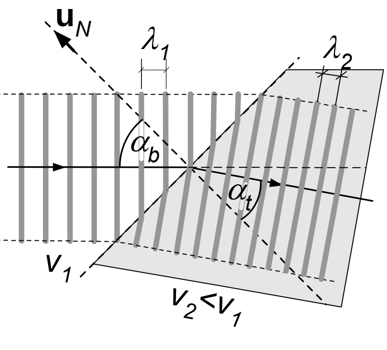


Ha az előző kísérletnél a hullám útjába a terjedésére merőleges akadályt helyezünk el, a hullám akkor is visszaverődik. Ennek tiszta szemléltetése azonban vízhullámokkal nehéz, mert a visszaverődő hullámok összetalálkoznak a beeső hullámokkal, és kölcsönhatásuk miatt a kialakult kép bonyolulttá válik (a hullámok találkozásánál fellépő jelenségekkel később foglalkozunk). A problémát úgy lehet kiküszöbölni, hogy csak egyetlen rövid pulzus terjedését vizsgáljuk.
Vízhullámokkal modellezhető az az eset is, amikor a hullám egyik közegből a másikba megy át. Ezt az teszi lehetővé, hogy a vízhullámok terjedési sebessége függ a víz mélységétől. Ha a hullámkád egyik részének aljára üveglapot teszünk, és ezzel a vízmélységet lecsökkentjük, akkor ez a rész a hullámok számára más terjedési sebességet, tehát egy „másik közeget” jelent.
A tapasztalat szerint a sekélyebb vízben a sebesség-, és ennek megfelelően a hullámhossz is kisebb (a rezgésidő a közegtől nem függ, így a $\lambda = vT$ összefüggés szerint a terjedési sebesség és a hullámhossz egymással arányos).

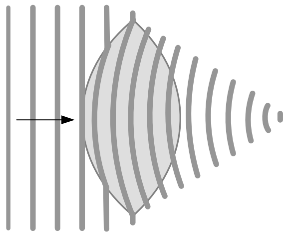
KÍSÉRLET:
Hullámkád egyik felében (az ábrán a jobboldali rész) a vízmélységet lecsökkentjük, így két különböző közeget hozunk létre, amelyeket egyenes határvonal választ el. A közeghatárra merőlegesen beeső egyenes hullám iránya a határvonalon való áthaladásnál nem változik meg, de a hullámhossz lecsökken.



KÍSÉRLET:
Az előző kísérletet végezzük el úgy, hogy a hullám terjedési iránya nem merőleges a közeghatárra (ábra). Az új közegbe való belépésnél most is megváltozik a hullámhossz, de emellett az azonos fázisú helyeket megadó egyenesek helyzete is módosul (és ennek megfelelően az erre merőleges terjedési irány is más lesz). A vizsgált esetben az α_t *törési szög* kisebb, mint az α_b *beesési szög*.



KÍSÉRLET:
Ha a hullámkád aljába egy domború lencse alakú üveglapot teszünk (ábra), akkor az így létrehozott „lencse” a ráeső síkhullámot egy pontban (a fókuszpontban) gyűjti össze. Ez a kísérlet lényegében az optikából ismert gyűjtőlencse vízhullám-modellje.

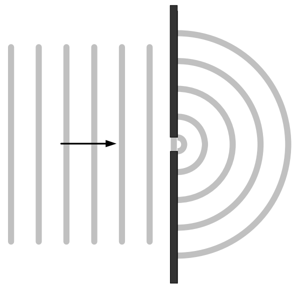


Nehezebben valósítható meg az a kísérlet, amivel az optikából ismert gömbtükör modellezhető, mert a hengeres akadályról visszaverődő hullámok összetalálkoznak a beérkező hullámokkal, és ez a képet bonyolulttá teszi. Itt is segít, ha csak egyetlen pulzust vizsgálunk.

A Huygens-elv, a törés és visszaverődés értelmezése

A visszaverődésnél és törésnél bekövetkező jelenségek megmagyarázhatók egy egyszerű modell- és a belőle következő szerkesztés segítségével, amelyet Huygens[1] dolgozott ki. A modell alapötletét az a tény adta, hogy egy pontszerű zavar gömbhullám (két dimenzióban körhullám) alakjában terjed. Mivel pedig egy hullámfront minden pontjában ugyanaz a zavar jön létre, mint a hullámforrásban, a hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok forrásaként fogható fel. Ezt a feltevést megerősíti az alábbi kísérlet.

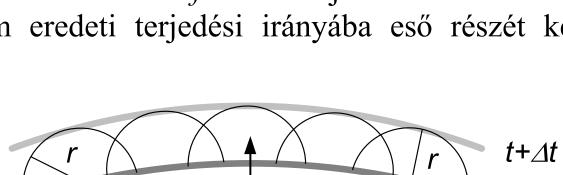
KÍSÉRLET:
Vízfelületen létrehozott egyenes hullámok útjába olyan akadályt teszünk amelyen egy – a hullámhosszhoz képest – kis rés van, és a hullám csak ezen tud áthaladni. Az akadály túloldalán ekkor a résből kiinduló körhullámot látunk (ábra).



Ez a kísérlet azt mutatja, hogy a hullámfront kellően kicsi (pontszerű) szakasza valóban elemi gömbhullámot (a kísérletben körhullámot) kelt. Fontos megfigyelni, hogy a körhullám csak a hullámterjedés irányában jön létre, visszafelé induló körhullámot nem látunk.

A hullámterjedésnek ezen a tapasztalaton alapuló modelljét a *Huygens-elv* foglalja össze, amely szerint egy hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, és a mindenkori új hullámfrontot *az elemi gömbhullámok burkolófelülete* adja. A burkolófelület megrajzolásánál a gömbfelületeknek a hullám eredeti terjedési irányába eső részét kell figyelembe venni.

A mellékelt ábrán az látható, hogy a t időpillanatban érvényes hullámfrontból hogyan lehet az elemi gömbhullámok (körhullámok) segítségével megszerkeszteni a $t+\Delta t$ időpillanatban érvényes hullámfrontot.



Példaként nézzük meg, hogy a Huygens-elv segítségével hogyan lehet számszerűen leírni a visszaverődés és törés szabályszerűségeit, amelyeket a fenti kísérletekben tapasztaltunk.

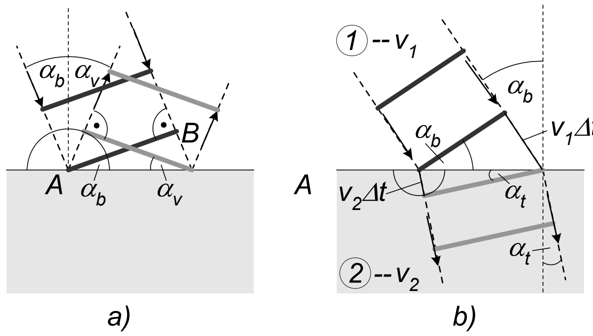
A visszaverődést az alábbi ábra *a)* részén láthatjuk, ahol egy felületre, a felület normálisával α_b szöget bezáró irányban egy síkhullám érkezik. Ezt abban a pillanatban ábrázoltuk, amikor a hullámfront egy pontja (A) éppen eléri a felületet. Az ábrán Δt idő múlva (amikor a hullámfront B pontja is elérte a felületet) megszerkesztettük a visszavert hullám

[1] Christiaan HUYGENS (1629-1695) holland fizikus.

hullámfrontját a Huygens-elv segítségével. A hullám haladási iránya a visszaverődés után a felület normálisával α_v szöget zár be. Az ábráról leolvasható, hogy a beeső és visszavert hullám haladási iránya szimmetrikus a beesési merőlegesre, vagyis

$$\alpha_b = \alpha_v .$$

A visszaverődés itt tárgyalt törvényén alapul az optikában használt tükrök működése.



a) b)

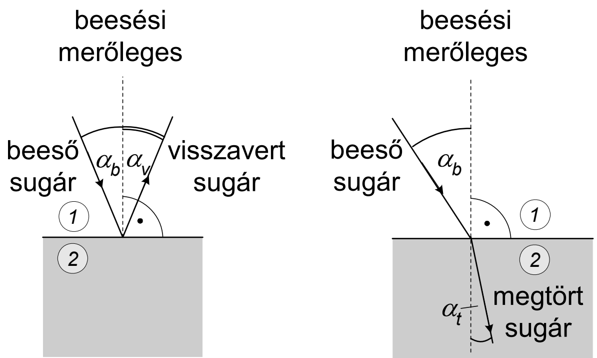
A *b)* ábrán az *1* közegben a felületre beeső hullám átmegy a *2* közegbe, ahol haladási irányát a felület normálisával bezárt α_t *törési szöggel* adjuk meg. A két közegben a hullám terjedési sebessége eltérő: v_1 és v_2. Az új hullámfrontot most a *2* közegben szerkesztettük meg. Az ábrából kiderül, hogy az új közegbe behatoló (a határfelületen átmenő) hullám törésére érvényes a

$$\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_t} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

összefüggés. Az így bevezetett n_{21} mennyiség a *2* közegnek az *1* közegre vonatkozó törésmutatója. Ezen a törvényen alapul számos optikai eszköz (pl. lencsék, prizma) működése.

A visszaverődés és törés törvényeinek megfogalmazásánál hasznos a hullám haladási irányát jellemző *sugarak* bevezetése. A sugár az a vonal amely mentén a hullám által szállított energia terjed. Ez izotróp közegben az azonos fázisú síkokra merőleges vonal, amely homogén közegben egyenes, inhomogén közegben megtört vagy görbe vonal. Így például homogén, izotróp közegben terjedő síkhullámban a sugarak az azonos fázisú síkokra merőleges, egymással párhuzamos egyenesek, gömbhullámban pedig a forrásból kiinduló sugárirányú egyenesek. A hullámnak egy véges felületen átmenő részét *sugárnyalábnak* nevezik (ez valóban a sugarak egy nyalábja).

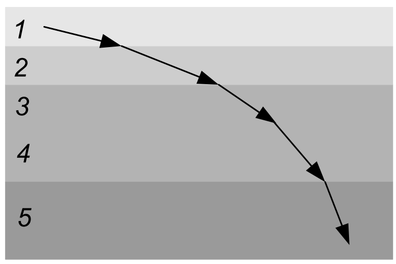
A visszaverődés és törés fent megállapított szabálya a sugarak segítségével is megfogalmazható. A visszaverődés törvénye ebben a megfogalmazásban úgy hangzik, hogy egy határoló felületre beeső sugár α_b beesési szöge (*a)* ábra) megegyezik az α_v visszaverődési szöggel, és a beesési sugár a beesési merőlegessel és a visszavert sugárral egy síkban van. A törés törvénye pedig úgy fogalmazható meg, hogy a határfelületre beeső sugár α_b beesési szöge (*b)* ábra) és a határfelületen átmenő sugár α_t törési szöge között a



a) b)

már tárgyalt $\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_t} = n_{21}$ összefüggés áll fenn, a beesési sugár a beesési merőlegessel és a megtört sugárral egy síkban van.

Ezek a törvények nagy mértékben megkönnyítik a törésen és visszaverődésen alapuló optikai eszközök (pl. prizmák, tükrök, lencsék) működésének megértését és tervezését.



Ha a közeg inhomogén, akkor a törésmutató változása miatt a sugarak iránya változik. Réteges közegben az irányváltozás többszörösen megtört sugarakat eredményez (ábra), folytonosan változó közegben a sugarak folyamatosan görbülő vonalak.

Hullámok találkozása, interferencia

Ha a tér egy pontjában két hullám van jelen, akkor hatásuk ott valamilyen módon összegződik. A hullámok összeadódását *interferenciának* nevezik.
Ha a szuperpozíció elve érvényes (és szélsőséges esetektől eltekintve általában érvényes), akkor adott helyen (**r**), a hullámok által okozott változás minden időpillanatban (t) a két hullám által külön-külön okozott változások összege, vagyis a két hullámfüggvény egyszerűen összeadható:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_1(\mathbf{r},t) + \psi_2(\mathbf{r},t).$$

Ezt a feltevést elfogadva, most az interferencia néhány egyszerű esetével foglalkozunk: megvizsgáljuk pontszerű forrásokban keltett gömbhullámok (két dimenzióban körhullámok)- és rugalmas kötélen terjedő, egydimenziós hullámok interferenciáját.

Egy-egy pontforrásban keltett két gömbhullám interferenciája

Általános következtetések levonására is alkalmas példaként vizsgáljuk meg két pontforrásból induló, azonos ω körfrekvenciájú, harmonikus gömbhullám (vagy körhullám) interferenciáját.

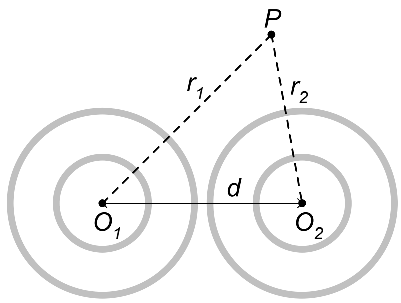
Az amplitúdó térbeli eloszlása, az interferenciakép

Tegyük fel, hogy az ábrán látható O_1 és O_2 forrásokban létrehozott két rezgés amplitúdója különböző, és köztük φ fáziskülönbség van, így a rezgések időfüggését az

$$f_1(t) = A_1 \cos \omega t$$

$$f_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

függvényekkel adhatjuk meg.



Ha feltételezzük, hogy a vizsgált térrészben a hullámok amplitúdójának csökkenése még nem számottevő, akkor a két hullám hullámfüggvénye

$$\psi_1(r_1,t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1)$$

$$\psi_2(r_2,t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi)$$

alakban írható fel. Az interferencia eredményét egy tetszőlegesen választott P pontban számítjuk ki.
Az eredő hullám a P pontban a szuperpozíció elve szerint:

$$\psi(P,t) = \psi_1(r_1,t) + \psi_2(r_2,t).$$

Ez áttekinthetőbb alakban írható fel, ha felhasználjuk a rezgések összegzésénél a forgóvektoros módszerrel kapott összefüggést:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$tg\, \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Most az $\alpha_1 = -kr_1$ és $\alpha_2 = -kr_2 + \varphi$ fázisszögek adott helyen állandók, így α is az.
Ezzel az eredő hullám:

$$\psi(P,t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

A P pontban tehát ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés jön létre (a kifejezés második tényezője), amelynek amplitúdója (az első tényező) a helytől függ:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} = A(P) = A(r_1, r_2).$$

Az amplitúdó maximális lesz akkor, ha a négyzetgyök alatti kifejezés maximális, vagyis ha $\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi) = +1$. Ekkor $A_{max} = A_1 + A_2$, vagyis a két hullám amplitúdója összeadódik. A koszinusz függvény tulajdonságaiból következik, hogy maximális amplitúdó ott alakul ki, ahol

$$kr_1 - kr_2 + \varphi = \pm n2\pi ,$$

vagyis a két hullám által a találkozásukig megtett utak $\Delta s_{max} = r_1 - r_2$ különbsége:

$$\Delta s_{max} = \pm n\lambda - \frac{\varphi}{2\pi}\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

Hasonlóan belátható, hogy a minimális amplitúdó $A_{min} = A_1 - A_2$, amely azokon a helyeken jön létre, ahol a hullámok közötti útkülönbség

$$\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\pi}\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

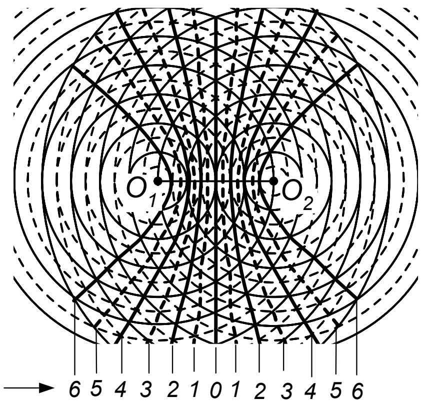
Ha a hullámok között nincs fáziskülönbség (φ=0), akkor a két feltétel egyszerűbben megfogalmazható:

maximális amplitúdó ott jön létre, ahol a két hullám Δs útkülönbsége a *hullámhossz* egész számú többszöröse: $\Delta s_{max} = \pm n\lambda$

minimális amplitúdó pedig ott, ahol az útkülönbség a *félhullámhossz* páratlan számú többszöröse: $\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$.

Ha a φ fáziskülönbség időben állandó, akkor a fenti egyenletekből azt kapjuk, hogy a maximális és minimális amplitúdójú (intenzitású) helyek síkban terjedő hullámoknál egy-egy időben állandó helyzetű hiperbola-seregen helyezkednek el, hiszen az $r_1 - r_2 = állandó$ összefüggés hiperbola egyenlete.

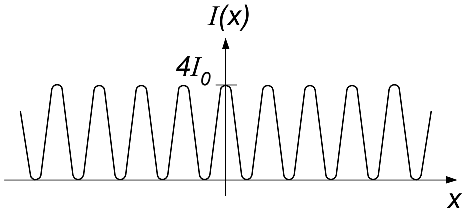
Az ábrán a $\varphi = 0$ eset látható. A két forrásból kiinduló körhullámok maximális amplitúdójú vonalait folytonos körök, a minimális amplitúdójú helyeket szaggatott vonallal rajzolt körök mutatják. Vastag vonalak jelzik az $|r_1 - r_2| = m\frac{\lambda}{2}$ feltételnek megfelelő hiperbolákat. A maximális amplitúdójú helyek az $m = 0, 2, 4, 6$ értékeknek megfelelő folytonos vonalakon találhatók. A két hullám útkülönbsége ezeken a helyeken a hullámhossz egész számú többszöröse. A minimális amplitúdójú helyek az $m = 1, 3, 5$ értékeknek megfelelő szaggatott vonalakon helyezkednek el. Itt az útkülönbség a félhullámhossz páratlan számú többszöröse.



Ha $\varphi \neq 0$, de állandó, akkor is hiperbolákat kapunk, csak ezek az ábrán látható hiperbolákhoz képest eltolt helyzetűek lesznek.

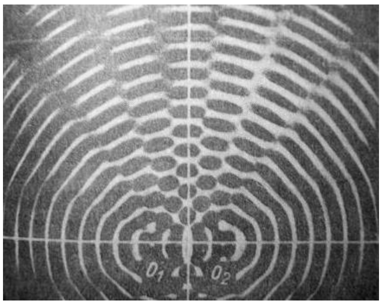
Térbeli terjedés (gömbhullámok) estén a maximális és minimális amplitúdójú helyek forgási hiperboloidokon helyezkednek el, amelyeket a fenti hiperboláknak az $O_1 - O_2$ egyenes körül történő forgatásával kapunk meg.

Kimutatható, hogy a pontforrásoktól nagy távolságban, a forrásokat összekötő egyenessel párhuzamos egyenes (az ábrán az x-tengely) mentén az intenzitás jellegzetes – maximumok és minimumok sorozatából álló – periodikus helyfüggést mutat.



A két pontforrásból induló körhullámok interferenciája vízhullám kísérletekkel jól szemléltethető.

KÍSÉRLET:
Vízfelület két pontjában egyidejűleg azonos fázisú rezgéseket keltünk, és megfigyeljük a keletkező körhullámok interferenciáját (ábra). Az interferenciaképen jól láthatók azok a vonalak, amelyeken a maximális- és minimális amplitúdójú helyek találhatók (a középre berajzolt függőleges vonal maximumhelyeket jelöl ki).



A hullámok interferenciájánál kialakuló jellegzetes, állandósult amplitúdó-helyfüggést *interferenciaképnek* nevezik. Állandósult interferenciakép azonban csak akkor alakul ki, ha a hullámok közötti fáziskülönbség időben nem változik. Az állandó fáziskülönbségű – tehát állandósult interferenciaképet létrehozó – hullámokat *koherens hullámoknak* nevezik. Interferencia természetesen akkor is létrejön, ha az interferáló hullámok fáziskülönbsége nem állandó, de ekkor többnyire az interferenciakép is olyan gyorsan változik, hogy nem figyelhető meg.
Az eredő hullám amplitúdójának helyfüggésére vonatkozó egyenletet négyzetre emelve, az $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)$ összefüggést kapjuk. Korábban már volt róla szó, hogy a hullám által szállított energia áramsűrűsége, az I intenzitás, az amplitúdó négyzetével arányos, vagyis a találkozó hullámokra és az eredő hullámra fennállnak az alábbi összefüggések:

$$I_1 = CA_1^2, \qquad I_2 = CA_2^2, \qquad I = CA^2.$$

Ezeket az összefüggéseket figyelembe véve, az amplitúdóra vonatkozó egyenletből az intenzitásokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi).$$

Az interferenciánál tehát az eredő hullám I intenzitása nem egyszerűen az interferáló hullámok I_1 és I_2 intenzitásainak összege, hanem megjelenik egy – a helytől és a hullámok fáziskülönbségétől függő –*interferencia-tag*.

Ha a φ fáziskülönbség időben változik, azaz $\varphi = \varphi(t)$, akkor adott helyen (r_1, r_2) a találkozó hullámok eredő intenzitása is függni fog az időtől

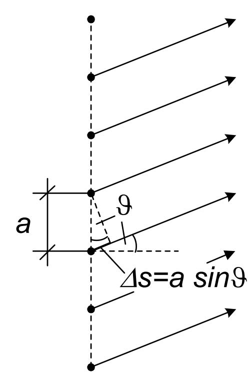
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\left(kr_1 - kr_2 + \varphi(t)\right) = I(r_1, r_2, t).$$

Ha tehát a hullámok nem koherensek, akkor az intenzitás-eloszlás időben változó lesz, vagyis nem alakul ki állandósult interferenciakép.
Ha a fáziskülönbség minden szabályszerűség nélkül, véletlenszerűen, és a megfigyelő (vagy a mérőeszköz) reakcióidejéhez képest gyorsan változik, akkor a megfigyelő az átlagos intenzitást észleli. Mivel ekkor az interferencia-tagban szereplő

$cos(kr_1 - kr_2 + \varphi(t))$ időbeli átlaga nulla, a megfigyelt intenzitás a két hullám intenzitásának összege lesz: $I = I_1 + I_2$. Ilyenkor interferenciakép helyett egyenletes intenzitás-eloszlást észlelünk. (Ez az oka annak, hogy két közönséges lámpa fényének interferenciáját nem észleljük: a lámpák fényében a hullámok fáziskülönbsége véletlenszerűen változik, két ilyen lámpa nem koherens fényforrás.)

Pontforrás-sor által keltett hullámok interferenciája

Sok pontforrásból induló, azonos frekvenciájú és amplitúdójú gömbhullámok interferenciáját abban az egyszerű esetben vizsgáljuk, amikor a pontforrások egy egyenes mentén egymástól azonos a távolságban helyezkednek el (ábra), nincs közöttük fáziskülönbség, és az interferenciát a forrásoktól nagyon nagy (elvileg végtelen) távolságban vizsgáljuk.



Ilyenkor az egyes pontokból kiinduló hullámok akkor erősítik egymást, ha az útkülönbségük a hullámhossz egész számú többszöröse. Az ábrából látható, hogy ez olyan irányokban teljesül, amelyekre fennáll, hogy

$$\Delta s_n = a\, sin\,\vartheta_n = n\lambda ,$$

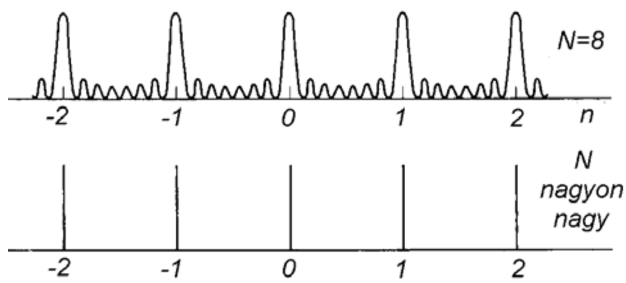
Azaz
$$sin\,\vartheta_n = n\frac{\lambda}{a} .$$

Mivel a hullámok amplitúdója azonos, a maximális amplitúdó – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az egyes amplitúdók összege lesz. Ha N számú, A amplitúdójú pontforrás van, akkor $A_{max} = NA$ (Ennek megfelelően a maximális amplitúdójú irányokban az intenzitás $I_{max} = N^2 I$ ahol I az egyes forrásokból érkező hullámok intenzitása).

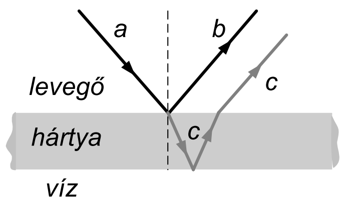
A maximális amplitúdójú irányok között minimális (esetünkben nulla) amplitúdójú irányok találhatók, így a pontforrásokat összekötő egyenessel párhuzamosan haladva – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az amplitúdó periodikus térbeli változását tapasztaljuk.

A mellékelt ábrán a különböző $n = \dfrac{a\, sin\,\vartheta}{\lambda}$ értékekhez tartozó maximális intenzitások láthatók különböző számú (N) pontforrás esetén.

Az $N=8$-nak megfelelő ábra a fenti számítással nem egyezik. Ennek az az oka, hogy az eredő hullám amplitúdóját nem számítottuk ki, így csak a *főmaximumok* helyét tudtuk meghatározni. Ha a hullámokat valóban összegezzük (pl. a forgóvektoros módszerrel), akkor kiderül, hogy a főmaximumok között jóval kisebb amplitúdójú mellékmaximumok is vannak. Ezek intenzitása a források számának növelésével csökken: igen nagy számú forrás esetén a fenti ábra alsó részén látható, mellékmaximumok nélküli eloszlást kapjuk.



Az interferencia látványos megnyilvánulása az, hogy vékony hártyákról (pl. olajréteg a víz felületén) visszaverődő fényben színes csíkokat látunk. Ezt a hártya két oldaláról visszaverődő fényhullámok interferenciája okozza (ábra): a hártyáról a szemünkbe érkező b és c fényhullámok között útkülönbség van, ami függ attól, hogy milyen szög alatt nézünk a hártyára. Egy adott szög esetén az erősítés feltétele (az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse) csak egy bizonyos hullámhosszra (színre) teljesül, így ebből az irányból ezt a színt látjuk. A hártya különböző pontjairól – tehát különböző szög alatt – a szemünkbe érkező fénynél az erősítés feltétele különböző hullámhosszakra teljesül, ezért látunk különböző színű sávokat.

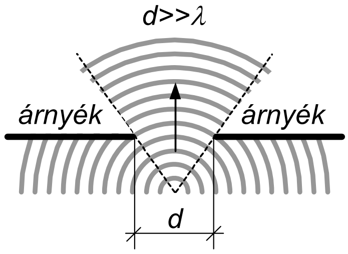


Hullámok elhajlása (diffrakció), a Huygens–Fresnel-elv

A hullámok terjedését eddig olyan esetekben vizsgáltuk, amikor a terjedést korlátozó, vagy módosító felületek (közeghatárok) nagyméretűek voltak, a közegekben pedig – a határoktól eltekintve – a hullámterjedés homogén és izotróp volt. A hullámok terjedését azonban lényegesen befolyásolja, ha az útjukba véges méretű akadályok vagy rések kerülnek.

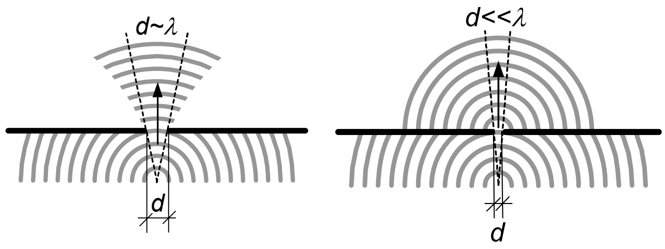
Ha ezeknek a mérete sokkal nagyobb, mint a hullámhossz, akkor még nincs jelentős változás. Ezt szemlélteti a következő kísérlet.

KÍSÉRLET:
Hullámkád egy pontjában létrehozunk egy körhullámot, és egy – a hullámhosszhoz képest – nagyméretű résen bocsátjuk át. A rés után nagyjából az ábrán látható hullámképet látjuk. Ebben az esetben tehát szabályos árnyék keletkezik, a hullám jó közelítéssel egyenes vonalban terjed, az egyenesekkel határolt, geometriai árnyéktérbe nem – vagy alig – hatol be.



A hullámok egyenes vonalú terjedése teszi lehetővé, hogy a hullámterjedést a sugarak bevezetésével sok esetben egyszerű geometriai szerkesztésekkel tudjuk nyomon követni, és egyszerű magyarázatot adjunk számos optikai eszköz működésére (ezzel a geometriai optika foglalkozik).
Vannak azonban olyan esetek, amikor a hullám lényegesen eltér az egyenes vonalú terjedéstől. Ez történik pl. akkor, ha az előbbi kísérletben a rés méretét lecsökkentjük.

KÍSÉRLET:
Az előbbi kísérletben csökkentsük a rés méretét. Amikor a rés mérete közel azonos a hullámhosszal (*a)* ábra), akkor a hullám jelentősen behatol az árnyéktérbe, az egyenes terjedéshez képest „elhajlik”.
Még jelentősebb eltérés következik be, ha a rés mérete sokkal kisebb a hullámhossznál (*b)* ábra), hiszen ekkor – mint azt korábban már láttuk – a rés pontforrásként viselkedik.



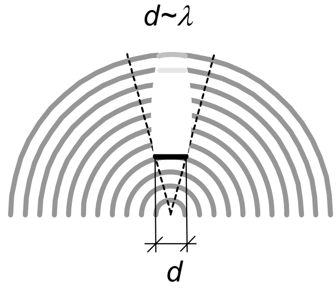
a) b)

Már a nagyméretű rés esetén is utaltunk arra, hogy az egyenes vonalú terjedés csak jó közelítéssel valósul meg. Pontosabb megfigyelések azt is megmutatják, hogy bármilyen akadály szélénél is bekövetkeznek az egyenes vonalú terjedéstől eltérő jelenségek.

KÍSÉRLET:
Ezt megfigyelhetjük egy hullámkádban, ha egy nagyobb hullámhosszú hullám egy akadály széle mellett halad el (ábra).

Kis méretű akadály esetén a hullám az akadály mindlét szélén behatol az árnyéktérbe.

KÍSÉRLET:
Hullámkádban keltett körhullám útjába a hullámhosszal összemérhető akadályt helyezünk el. A hullámok jól láthatóan behatolnak az akadály mögötti geometriai árnyéktérbe.



További vizsgálatok – amelyekről részletesebben a fényhullámoknál lesz szó – azt mutatják, hogy a hullám intenzitáseloszlása nem olyan egyszerű, mint amiről eddig szó volt. Ez legjobban fényhullámokkal mutatható be, de a jelenség hullámkádban is megfigyelhető.

KÍSÉRLET:
Vízfelületen létrehozott hullám útjába kis méretű rést helyezünk el. Ha résméretet és a hullámhosszt megfelelően választjuk meg, akkor a rés túloldalán a pontforrások interferenciájához hasonló hullámalakzatot látunk. Itt az egyenes terjedéstől való eltérés mellett a résen áthaladt hullámban maximális és minimális amplitúdójú helyeket mutató vonalak figyelhetők meg.

Ehhez hasonló képet kapunk akkor is, ha a hullám egymás mellett elhelyezett rések sorozatán (rácson) halad át.

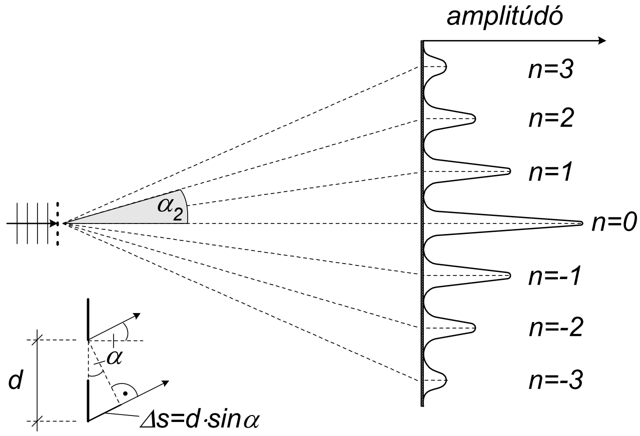
Az itt bemutatott eseteken kívül is számos tapasztalat mutatja, hogy ha a hullám réseken halad át, vagy véges méretű akadályokba ütközik, akkor az egyenes vonalú terjedéstől jelentős eltérések figyelhetők meg. A hullámnak az egyenes vonalú terjedéstől való eltérését *hullámelhajlásnak* vagy *diffrakciónak*-, az ezzel kapcsolatos jelenségeket *elhajlásjelenségeknek*-, a létrejött hullámalakzatot pedig *elhajlási képnek* vagy *diffrakciós képnek* nevezik.

Az elhajlásjelenségek a Huygens-elvvel már nem értelmezhetők. Ennek alapvető oka az, hogy a Huygens-elv nem veszi figyelembe a terjedő hullám intenzitásviszonyait, így nem tudja értelmezni sem az árnyékjelenséget, sem pedig azt, hogy a hullám részlegesen behatol az árnyéktérbe. Ezt a problémát oldja meg a *Fresnel*[1] által javasolt módosítás, amely szerint az új hullámfrontot nem az elemi hullámok burkolófelületeként értelmezzük, hanem az *elemi hullámok interferenciájából* számítjuk ki. Ez a *Huygens–Fresnel-elv*.
A Huygens–Fresnel-elv tehát nem egyszerűen a geometriai terjedési szabályokat veszi figyelembe, hanem azt is, hogy az interferencia miatt az elemi hullámok a hullámtér egyes tartományaiban egymást erősíthetik vagy gyengíthetik (esetleg kioltják) egymást, vagyis intenzitásváltozások következhetnek be.
A Huygens–Fresnel-elv alapján elvégzett számításokból derül ki, hogy az árnyékjelenség oka az, hogy az elemi hullámok a rés túloldalán, az "árnyéktérben" – a rés méretétől függő

[1] Augustin Jean FRESNEL (1788-1827) francia fizikus.

mértékben – kioltják egymást. Ezzel egyúttal az árnyéktérbe való behatolás különböző esetei is értelmezhetők.
Az is megmagyarázható, hogy miért jelennek meg az interferenciára jellemző hullámalakzatok. A Huygens–Fresnel-elv szerint ugyanis a hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, és a hullámtér egy adott pontjában az amplitúdót ezek interferenciája adja meg. Egy rés mögött tehát olyan interferenciakép jelenik meg, amely a résben elképzelt végtelen sok pontforrásból kiinduló, koherens hullámok interferenciájának felel meg.

A diffrakció különösen fontos szerepet játszik az optikában, ahol ezt a jelenséget *fényelhajlásnak* nevezik. Gyakorlatilag is fontos eset az, amikor a hullám rések sorozatán – ún. *rácson* – halad át. Ilyenkor a rések különböző pontjaiból kiinduló elemi hullámok bizonyos irányokban erősítik, más irányokban gyengítik egymást, és a rács mögött a ráccsal párhuzamos irányban haladva az amplitúdó (és a hullám intenzitása, ami arányos az amplitúdó négyzetével, *l.* alább) maximumokon és minimumokon megy át (ábra). Az intenzitáseloszlás abban különbözik a pontforrás-sor interferenciánál kapott eloszlástól, hogy a diffrakció következtében a maximumok magassága a középvonaltól kifelé haladva csökken.



A maximumok α_n irányai úgy kaphatók meg, hogy ezekben az irányokban a rések azonos helyeiről (pl. a rések tetejéről) kiinduló hullámok páronként erősítik egymást, tehát a $\Delta s = d\, sin\, \alpha_n$ útkülönbségükre érvényes, hogy $\Delta s = n\lambda$. Ezért a maximumok irányaira azt kapjuk, hogy

$$d\, sin\, \alpha_n = n\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Az összefüggésből a rácsállandó (d) ismeretében a hullámhossz meghatározható.
A rácson való elhajlás a hullámok jellegzetes viselkedése.

A hullámterjedést leíró alaptörvény: a hullámegyenlet

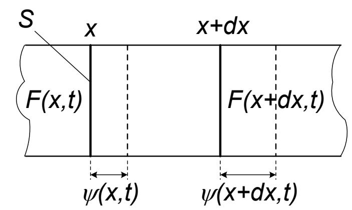
A hullám leírása akkor teljes, ha a hullámfüggvényt a hullámot létrehozó hatások és a terjedését befolyásoló határfeltételek ismeretében meg tudjuk határozni, vagyis ismerjük a hullámfüggvény meghatározására szolgáló fizikai egyenletet. Emellett a hullám által szállított energia meghatározása is fontos feladat.
Ezeknek a problémáknak a megoldásához a különböző zavarterjedési mechanizmusok esetén más és más eszközöket és alaptörvényeket kell felhasználnunk, ezért a rugalmas hullámokkal és az elektromágneses hullámokkal külön foglalkozunk. A tárgyalást a rugalmas hullámokkal kezdjük.

Hullámegyenlet rugalmas hullámokra

Első célunk az, hogy egy olyan fizikai egyenletet találjunk, amely alkalmas a hullámfüggvény meghatározására. Ezt az egyenletet *hullámegyenletnek* nevezik.
Rugalmas hullámok esetén a hullámegyenlet felírásánál abból indulhatunk ki, hogy a hullám keltésekor erőt fejtünk ki a közeg egy kis térfogatelemére, ezért a hullámegyenletet a hullámban elmozduló közeg egy kis térfogatelemére felírt mozgásegyenlet segítségével kaphatjuk meg.

Hullámegyenlet egydimenziós, longitudinális rugalmas hullámok esetén
A közeg elemi darabjára felírt mozgásegyenletben természetesen nem szerepel a hullámfüggvény, ezért a feladat az, hogy a mozgásegyenletben szereplő, helytől és időtől függő mennyiségeket a hullámfüggvénnyel fejezzük ki. Ekkor a hullámfüggvényre vonatkozó differenciálegyenletet kapunk.
Először egy S keresztmetszetű rugalmas rúdban x-irányban terjedő egydimenziós longitudinális hullámra végezzük el a számolást. A mozgásegyenlet egy dm tömegű térfogatelemre (ábra)

$$dF_x = dm \cdot a_x .$$



Ebből úgy lesz hullámegyenlet, hogy a rúd elemi darabjára ható dF_x erőt és a gyorsulást kapcsolatba hozzuk a ψ hullámfüggvénnyel.
Első lépésként alkalmazzuk a Hooke-törvényt, amely egy rugalmas test megnyújtásánál vagy összenyomásánál a testre ható F erőt összefüggésbe hozza az $\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell}$ deformációval:

$$F = SE\varepsilon$$

(E a Young-modulus).
Esetünkben a deformáció a kiválasztott térfogatelem relatív hosszváltozása, ami viszonylag egyszerűen kifejezhető a hullámfüggvénnyel. Egy adott t időpillanatban az ábrán látható térfogatelem két végének relatív elmozdulását éppen a hullámfüggvény x- és $x+dx$ helyeken felvett értékeinek a különbsége adja meg, vagyis $d\ell = \psi(x+dx,t) - \psi(x,t)$. A térfogatelem eredeti hossza $\ell = dx$. Így az elemi térfogat ε deformációját az

$$\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell} = \frac{\psi(x+dx,t) - \psi(x,t)}{dx}$$

kifejezés adja meg. Ez tulajdonképpen a $\psi(x,t)$ függvény x szerinti differenciálhányadosa. Mivel itt egy kétváltozós függvényt csak az egyik változója szerint differenciálunk (és közben a másik változót állandónak tekintjük), ezt a differenciálhányadost parciális deriváltnak nevezik, és jelölésére a szokásos „d" szimbólum helyett a „∂" szimbólumot használják. Ezzel a jelöléssel a deformáció:

$$\varepsilon = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}.$$

A Hooke-törvény szerint az erő és a deformáció arányos egymással, vagyis

$$F_x(x,t) = SE\varepsilon(x,t) = SE\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}.$$

Az elemi darabra ható erő adott t időpillanatban

$$dF_x = F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx,$$

ami az erő kifejezése alapján:

$$dF_x = SE\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dx.$$

Ezzel a mozgásegyenlet baloldalát sikerült a hullámfüggvénnyel kifejeznünk.
A gyorsulás a helykoordináta (itt a hullámfüggvény) második időderiváltja, azaz

$$a_x = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2},$$

így a mozgásegyenlet jobboldalán is megjelent a hullámfüggvény.
Fejezzük ki még a vizsgált térfogatelem tömegét a ρ sűrűséggel:

$$dm = Sdx\rho.$$

A fenti összefüggések felhasználásával $dF_x = dm \cdot a_x$ mozgásegyenlet a hullámfüggvénnyel kifejezve az

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakot ölti.
Ez a hullámterjedést leíró *hullámegyenlet* egy rugalmas *rúdban terjedő longitudinális hullám* esetén.
Mivel a rúdban terjedhet harmonikus hullám, az egyenletnek biztosan megoldása a harmonikus hullámot leíró

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

hullámfüggvény is.
Ha meg akarjuk tudni, hogy ez a függvény milyen feltételek mellett megoldás, akkor be kell helyettesítenünk a hullámegyenletbe. A deriválásokat elvégezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-\frac{E}{\rho}k^2\cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2\cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{E}{\rho}k^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t - kx + \alpha) = 0.$$

Ennek az egyenletnek bármilyen t időpillanatban érvényesnek kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, hogy az időfüggő rész együtthatója nulla:

$$\frac{E}{\rho}k^2 - \omega^2 = 0.$$

Felhasználva a $k = \frac{\omega}{v}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy a longitudinális hullám terjedési sebessége a rúdban

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

A vizsgált esetben tehát a hullámegyenlet felírható a

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakban is.

Hullámegyenlet gázoszlopban terjedő longitudinális hullám esetén

Az alapelv ugyanaz, mint a rúdban terjedő longitudinális hullámoknál, vagyis a gázoszlop egy elemi darabjára felírjuk a mozgásegyenletet, majd a gyorsulást és az erőt kifejezzük a hullámfüggvénnyel.

A mozgásegyenlet

$$dF_x = dm \cdot a_x ,$$

ahol dF_x a kiválasztott térfogatelemre ható erő, a_x a térfogatelem gyorsulása, dm pedig a tömege.

Itt az erő az x-tengely adott helyén létrejött nyomásesésből származik, amire a t időpillanatban az

$$F(x,t) = -Sdp(x,t)$$

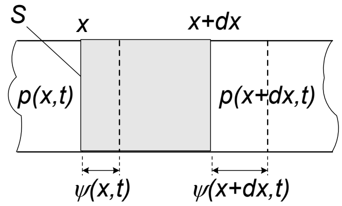
összefüggés érvényes.

A rugalmasságtanból tudjuk, hogy egy gáz összenyomására

$$dp = -K\frac{dV}{V}$$

összefüggés érvényes. Mivel $V = Sdx$, és $dV = Sd\psi = S\frac{\partial \psi}{\partial x}dx$, azt kapjuk, hogy

$$dp(x,t) = -K\frac{\partial \psi}{\partial x} .$$



Egy x helyen t időpillanatban fellépő erő ennek alapján

$$F(x,t) = SK\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Egy kiválasztott térfogatelemre ható eredő erőt az erőnek a kiválasztott hosszon történő

$$dF_x = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx = SK\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}dx$$

megváltozása adja meg.

A gyorsulás most is

$$a_x = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} ,$$

és

$$dm = Sdx\rho_0 ,$$

ahol ρ_0 a gáz átlagos sűrűsége.

A fenti összefüggésekkel a mozgásegyenlet az

$$SK\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dx = Sdx\rho_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakot ölti.
Egyszerűsítések után ebből a

$$\frac{K}{\rho_0}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenletet kapjuk.

Az egydimenziós hullámegyenlet általános alakja
Láttuk, hogy többféle hullámterjedési esetre ugyanolyan alakú hullámegyenletet kaptunk: ezek a különböző esetekben csak az egyenletek baloldalán szereplő, anyagjellemzőket és geometriai adatokat tartalmazó állandókban különböznek egymástól. Mindezek alapján sejthető, hogy itt általános törvényszerűségről van szó. Ha az egyenletek baloldalán megjelenő állandót B-vel jelöljük, akkor a hullámegyenlet a

$$B\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakba írható, ahol

rúdban terjedő longitudinális hullámnál $B = \frac{E}{\rho}$,

gázoszlopban terjedő longitudinális hullámnál $B = \frac{K}{\rho_0}$ és

Nézzük meg, hogy mi a fizikai jelentése ennek az állandónak. Ezt az egyenlet megoldásával, vagyis a hullámfüggvény meghatározásával deríthetnénk ki (ekkor az állandó feltehetőleg megjelenik a hullámfüggvényben). Az egyenletet – kellő matematikai ismeretek híján – egyelőre nem tudjuk megoldani, de tudjuk, hogy a rúdban elvileg terjedhet harmonikus síkhullám, ezért az egyenletnek biztosan megoldása a harmonikus síkhullámot leíró

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

hullámfüggvény is.
Helyettesítsük be ezt a függvényt a hullámegyenletbe, és nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lehet megoldás. A deriválásokat elvégezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-Bk^2\cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2\cos(\omega t - kx + \alpha)\,.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\left(Bk^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t - kx + \alpha) = 0\,.$$

Ennek az egyenletnek bármilyen x- és t értékek mellett érvényesnek kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, hogy a hely-és időfüggő rész együtthatója nulla:

$$Bk^2 - \omega^2 = 0\,.$$

Felhasználva a $k = \frac{\omega}{v}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy a B állandó közvetlen összefüggésben van a *hullám terjedési sebességével*:

$$v = \sqrt{B}\,.$$

Az *egydimenziós hullámegyenlet általános alakban* tehát az alábbi módon írható fel:

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} .$$

Az egyes konkrét esetekben csak annyi a különbség, hogy a terjedési sebesség kifejezése más, amit a hullámegyenlet levezetése során kapunk meg. A fentiek alapján a terjedési sebesség különböző terjedési körülmények között az alábbi összefüggésekkel adható meg:

longitudinális hullám rugalmas rúdban: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$,

longitudinális hullám (nyomás- és sűrűséghullám) gázban: $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$.

A terjedési sebességet bármilyen más esetben a fentiekhez hasonló módon, a hullámegyenlet konkrét esetre történő levezetésével kaphatnánk meg. Így például rugalmas rúdban terjedő nyírási hullámra a $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ (G a nyírási modulus), húrban terjedő transzverzális hullámra pedig a $v = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$ kifejezést kapjuk (T a húrt feszítő erő, ρ a húr anyagának sűrűsége, S a húr keresztmetszete).

Gázokban és folyadékokban gyakorlatilag csak longitudinális hullámok terjednek. Szilárd anyagokban longitudinális és transzverzális hullámok is terjednek, és terjedési sebességük eltérő: általában a longitudinális hullámok terjednek gyorsabban.

Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra

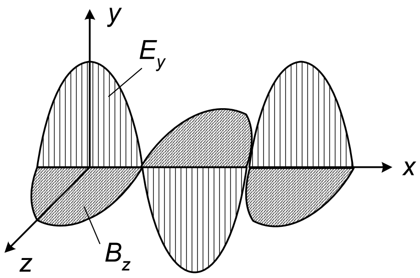
A Maxwell-egyenletekből levezethető, hogy a hullámegyenlet fenti általános alakja elektromágneses hullámok esetén is érvényes, csak ekkor ψ helyébe az elektromos térerősség (**E**) illetve a mágneses indukció (**B**) vektor megfelelő komponensei kerülnek, a c terjedési sebesség pedig a *fénysebesség*. Ebben a hullámban a mágneses- és elektromos tér egymással azonos fázisban változik, és egymásra merőlegesek. Így pl. x-irányban haladó síkhullám esetén az y-tengelyt az elektromos tér irányában felvéve, a mágneses indukció z-irányú lesz, és a hullámot leíró egyenletek:

$$c^2 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} ,$$

$$c^2 \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t^2} .$$

A levezetés során kiderül, hogy az elektromágnenses hullám terjedési sebessége

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} .$$



A fenti hullámegyenletnek megfelelő harmonikus hullámban az elektromos- és mágneses tér változásait az alábbi hullámfüggvények adják meg:

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$B_z(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx).$$

A két térmennyiség pillanatnyi értékeit az x-tengely mentén az ábra mutatja.
Mivel a hullám mind az elektromos- mind pedig a mágneses tér irányára merőlegesen terjed, a hullám terjedési irányát az $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ vektor iránya adja meg.

*************** *************** ***************

Térbeli hullámegyenlet

A hullámok az esetek döntő többségében nem egy dimenzióban, hanem térben terjednek. Ilyenkor a hullámfüggvény helyfüggését a helyzetvektorral adhatjuk meg: $\psi = \psi(\mathbf{r},t)$. A térbeli hullámegyenletet formálisan viszonylag egyszerűen megkaphatjuk egy harmonikus síkhullám

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - \mathbf{kr})$$

hullámfüggvényének segítségével.
Mivel az egydimenziós esetből tudjuk, hogy a hullámegyenletben a hullámfüggvény második parciális deriváltjai szerepelnek, számítsuk ki először a hely szerinti deriváltakat a fenti hullámfüggvény esetén. Ha figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} = -k_x^2\psi(\mathbf{r},t)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} = -k_y^2\psi(\mathbf{r},t)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2} = -k_z^2\psi(\mathbf{r},t).$$

Ezeket az egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2} = -k^2\psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\omega^2}{v^2}\psi(\mathbf{r},t)$$

(itt felhasználtuk a $k = \dfrac{\omega}{v}$ összefüggést).
Másrészt a hullámfüggvény idő szerinti második deriváltja:

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2\psi(\mathbf{r},t).$$

Az utóbbi két egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v^2\left(\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}.$$

Ha alkalmazzuk a matematikában szokásos $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \Delta$ jelölést, akkor az egyszerűbb

$$v^2\Delta\psi(\mathbf{r},t) = \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}$$

alakot kapjuk.
Kimutatható, hogy ez az egyenlet nem csak a „levezetésnél” feltételezett harmonikus hullámokra igaz, hanem ez a hullámegyenlet általánosan érvényes alakja.

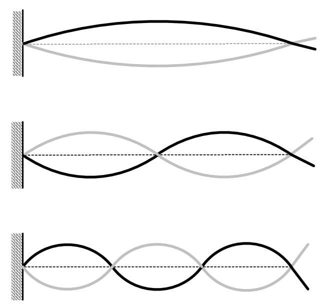
*************** *************** ***************

A hullámegyenlet alkalmazása: az állóhullámegyenlet

Eddig feltételeztük, hogy az egymással kölcsönhatásba lépő hullámok olyan nagy méretű közegben terjednek, hogy a közeghatárról való visszaverődés elhanyagolható. Ez a valóságban általában nem így van. Mivel ez elvileg és gyakorlatilag egyaránt fontos eset, most megvizsgáljuk egy határfelület felé haladó- és az onnan visszaverődő síkhullámok találkozásánál fellépő interferenciát.

A kialakuló hullámkép nagyon jól szemléltethető rugalmas kötélen terjedő hullámokkal.

KÍSÉRLET:
Rugalmas kötél egyik végét rögzítjük, másik végét megfogjuk, és lassú rezgésbe hozzuk. Ekkor a kötélvég felé haladó és onnan visszaverődő hullámok interferenciája általában rendszertelen hullámzást eredményez.
Ha a rezgetés frekvenciáját növeljük, akkor bizonyos frekvenciáknál sajátos hullámalakzatok jönnek létre. Vannak helyek amelyeknek a kitérése mindig nulla, ezek a *csomópontok*. A közöttük elhelyezkedő kötélszakaszokon mindenegyes pont ugyanolyan fázisban rezeg, de az amplitúdó a hely függvényében változik. Nincs rezgés a csomópontokban, és maximális amplitúdójú rezgés van a csomópontok közötti szakaszok felezőpontjában, ezeket *duzzadóhelyeknek* nevezik.
Az ábrán feltüntettünk néhány jellegzetes hullámalakzatot.



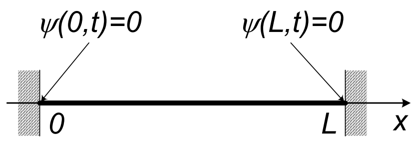
A kísérletben kialakult állandósult hullámalakzat sajátossága az, hogy – szemben a zavartalanul terjedő hullámmal – az azonos fázisú helyek nem mozognak, a kötél úgy viselkedik, mintha nem is terjedne benne hullám. Ezt a hullámalakzatot ezért *állóhullámnak* nevezik. (Az eddig tárgyalt hullámokat megkülönböztetésül gyakran *haladó hullámoknak* hívják.) Az állóhullám jellegzetessége, hogy

- a hullámtér egész tartományai azonos fázisban rezegnek,
- a rezgés amplitúdója helyről-helyre változik, és
- állóhullám alakzat csak meghatározott frekvenciákon jön létre.

Kézenfekvőnek látszik, hogy az általános hullámegyenlet a hullámok bármilyen fajtájának, így az állóhullámoknak a leírására is alkalmas. Most a hullámegyenlet egy alkalmazásaként levezetjük az egydimenziós állóhullámok alapegyenletét a hullámegyenlet általános alakjából.

Állóhullámok tulajdoságainak értelmezése, az állóhullámegyenlet

Egyszerű példaként próbáljuk megoldani a hullámegyenletet egy mindkét végén rögzített, L hosszúságú rugalmas húrban vagy kötélben (ábra) terjedő transzverzális *harmonikus hullámra*.



Ha a közeg véges, akkor az egyenlet megoldásánál ezt figyelembe kell venni, ami a határfeltételek megadásával történik. Esetünkben a határfeltételek:

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 .$$

Meg kell adni még a kezdeti feltételeket is (a húr kezdeti alakját és pontjainak kezdeti sebességét):

$$\psi(x,0) = f(x) \quad \text{és}$$
$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x).$$

Az *f* és *g* függvényeket ismertnek tételezzük fel.
Az állóhullámokra vonatkozó tapasztalatok (helyfüggő amplitúdó, helyfüggetlen időfüggés) alapján a

$$v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenlet megoldását a

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\cdot cos(\omega t + \alpha)$$

alakban keressük.
Behelyettesítve ezt a függvényt a hullámegyenletbe, a

$$v^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}cos(\omega t + \alpha) = -\varphi(x)\omega^2 cos(\omega t + \alpha)$$

összefüggést kapjuk, ami rendezéssel és a $k = \frac{\omega}{v}$ összefüggés felhasználásával a

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi(x)\right)cos(\omega t + \alpha) = 0$$

alakba írható. Az egyenletnek bármely időpillanatban teljesülni kell, ami csak úgy lehetséges, hogy

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0\,.$$

Ezt a differenciálegyenletet, amely megadja az állóhullám amplitúdójának helyfüggését, egydimenziós *állóhullám-egyenletnek* nevezik.
Mivel az egyenlet formailag teljesen azonos a harmonikus rezgőmozgás egyenletével, megoldása is ugyanaz, csak most a változó nem *t*, hanem *x*:

$$\varphi(x) = A sin(kx + \beta)\,.$$

Ezzel az állóhullám időfüggését is megadó hullámfüggvény a

$$\psi(x,t) = A sin(kx + \beta)cos(\omega t + \alpha)$$

alakot ölti.
A konkrét esetben érvényes állóhullám-megoldást akkor kapjuk meg, ha figyelembe vesszük a határfeltételeket. A két végén rögzített kötél vagy húr esetén egyrészt bármely időpillanatban fennáll, hogy $\psi(0,t) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi(0) = 0$, így a $\varphi(x) = A sin(kx + \beta)$ alakban felírt amplitúdó-függvény csak a $\beta = 0$ esetben alkalmazható, tehát csak a

$$\varphi(x) = A sin(kx)$$

alak megengedett.
Másrészt a kötél vagy húr másik vége is rögzített, tehát $\psi(L,t) = 0$, ami azt jelenti, hogy

$$\varphi(L) = A sin(kL) = 0\,,$$

illetve

$$sin(kL) = 0\,.$$

Eszerint állóhullám egy mindkét végén rögzített kötélen vagy húron csak akkor jön létre, ha a hullámszám a $kL = n\pi$ feltételnek megfelelő értékek valamelyikét veszi fel, azaz

$$k_n = n\frac{\pi}{L}$$

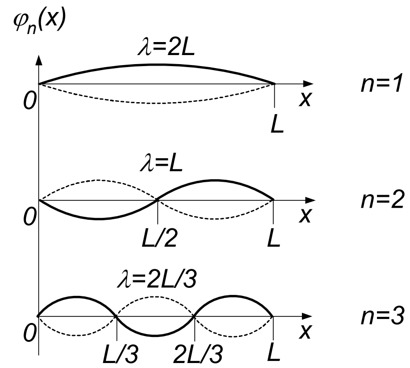
(n egész szám).

Az állóhullám-feltétel a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ összefüggés felhasználásával a hullámhosszal is kifejezhető:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,....)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy kifeszített, két végén rögzített kötélben létrehozunk egy zavart, akkor abban ilyen hullámhosszú állóhullámok alakulhatnak ki.
A feltétel még egy alakban megfogalmazható, hiszen a hullámszám (hullámhossz) a rezgés körfrekvenciájával is összefüggésbe hozható: $k = \frac{\omega}{v}$ (v a fázissebesség). Így a lehetséges frekvenciákra azt kapjuk, hogy

$$\omega_n = n\frac{\pi v}{L} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,....)\,.$$



Ha tehát az említett kísérletben a kötelet lengetjük, vagyis benne kényszerrezgést hozunk létre, akkor állandósult hullámalakzat csak olyankor jön létre, ha a kötél végét a fenti feltételnek megfelelő frekvenciával mozgatjuk. Ezzel magyarázható, hogy a kísérletben csak bizonyos frekvenciáknál alakul ki a jellegzetes állóhullám alakzat.
Az amplitúdó-függvény ennek alapján

$$\varphi_n(x,t) = A\sin(n\frac{\pi}{L}x)\,.$$

Ezt a függvényt mutatja különböző n értékek esetén a mellékelt ábra. Látható, hogy a számolásból valóban a kísérleteknek megfelelő alakzatokat kapunk.
A fenti körfrekvenciák felhasználásával felírhatjuk az állóhullámok hullámfüggvényeit:

$$\psi_n(x,t) = 2A\sin n\pi\frac{x}{L}\cos\omega_n t\,.$$

Az n=1 értékhez tartozó frekvenciát *alapfrekvenciának*, az $n>1$ értéknek megfelelő frekvenciákat *felharmonikusoknak* nevezik.
Az elmondottak értelemszerű változtatásokkal érvényesek a húros hangszerekben használt húrok transzverzális rezgéseire és a mindkét végükön zárt légoszloppal működő sípokban létrejött longitudinális hullámokra is. Az $n=1$ értéknek megfelelő frekvenciájú hangot itt *alaphangnak* nevezik.

Rugalmas kötél, húr vagy légoszlopok rezgéseinél a valóságos helyzet általában eléggé bonyolult. Egy zavart elindítva, általában az összes lehetséges frekvencián létrejön rezgés, de ezek közül az alapfrekvenciának megfelelő állóhullám marad meg a legnagyobb amplitúdóval. Emellett azonban kisebb amplitúdóval jelen vannak a felharmonikusok is. A különböző konstrukciójú húros és fúvós hangszerek hangjában más és más a felharmonikusok intenzitása, amit a fülünk hangszíneltérésként érzékel. Ezért tudjuk megkülönböztetni egymástól a különböző hangszerek hangját, még akkor is, ha azonos hangmagasságú (frekvenciájú) alaphangon szólnak.

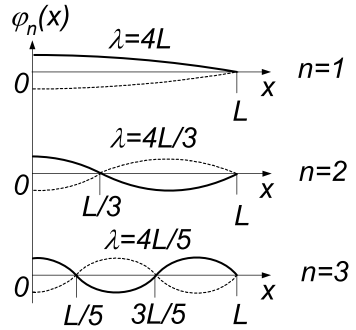
Hasonló gondolatmenettel határozhatjuk meg *egyik végén szabad* rugalmas kötél vagy pálca-, továbbá egyik végén nyitott légoszlop rezgéseinél kialakuló állóhullámokat. A lehetséges hullámszámokra, hullámhosszakra és körfrekvenciákra azt kapjuk, hogy

$$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}, \quad \lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)}, \quad \omega_n = (2n-1)\frac{v\pi}{2L}.$$

Az egyes *n* értékeknek megfelelő amplitúdó-függvények most tehát a

$$\varphi_n(x) = 2A\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,....).$$

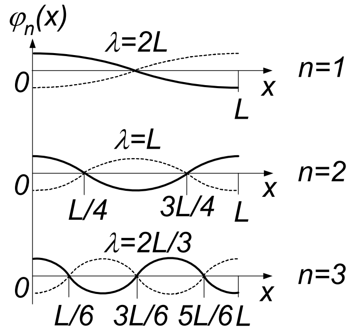
alakban adhatók meg.
Ezek a függvények láthatók a mellékelt ábrán különböző *n* értékek esetén.



Mindkét végén szabad pálca vagy mindkét végén nyitott gázoszlop esetén a lehetséges hullámhosszakra azt kapjuk, hogy

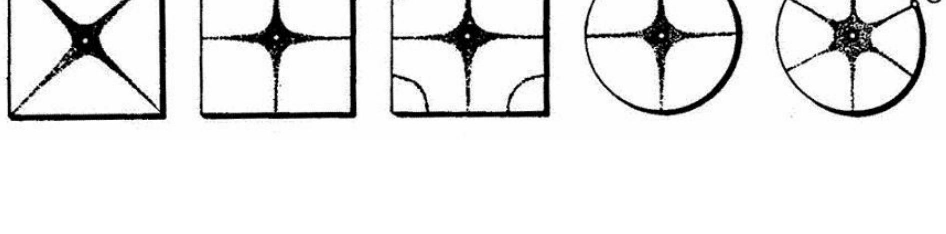
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,....).$$

Ez a feltétel megegyezik a két végén rögzített rugalmas kötélre kapott feltétellel. A kialakult állóhullám azonban különbözik a két végen rögzített esettől, mert most mindkét végen maximális az amplitúdó, amint az a mellékelt ábrán látható.



A két- vagy háromdimenziós hullámegyenlettel síkon vagy térben terjedő hullámok által létrehozott állóhullámok is tárgyalhatók. Számolásokat itt nem végzünk, de bemutatunk néhány síkbeli állóhullám képet.

KÍSÉRLET:
Közepén befogott négyzet- és kör alakú, vékony fémlemezekben (ábra) hegedűhúrral transzverzális rezgéseket hozunk létre. Ennek következtében állóhullámok alakulnak ki, amelyeknek kimutatására finom port használunk. A port a hullám gerjesztése előtt egyenletesen rászórjuk a lapokra, majd a hegedűvonót az ábrán látható *D* pontokban a lemezre merőlegesen végighúzzuk a lemezen. Közben ujjunkkal a lemez egy vagy két pontját megérintjük (az ábrán a *C*-vel jelölt helyek). A porszemcsék azokon a helyeken gyűlnek össze, ahol a legkisebb a rezgés amplitúdója, tehát kirajzolják az állóhullám csomóvonalait (az ábrán a sötét tartományok). A gerjesztés helyén mindig duzzadóhely van, az érintési helyeken csomópont. Látható hogy az érintés helyének (rögzített pont) változtatásával a csomóvonalak helyzetét változtatni tudjuk.



Energiaterjedés hullámban

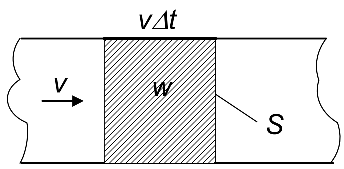
Egy hullám létrehozásához munkát kell befektetni (pl. rugalmas közeg deformálása). Az, hogy a hullám a forrástól távol ugyanolyan változást hozzon létre, mint ami a forrásban létrejött, csak úgy lehetséges, hogy a hullám energiát visz magával, és a szükséges munkát ez az energia fedezi.

Az energiaterjedés általános leírása

A hullám által szállított energiát az energiaárammal jellemezhetjük. Ha egy felületen a hullámmal Δt idő alatt ΔE energia halad át akkor az *energiaáram*:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} .$$

A hullám által szállított energiát – a fenti általános összefüggés helyett – jó lenne a hullám és a közeg jellemző mennyiségeivel kifejezni. Ehhez először a hullámban az energia térfogati sűrűségét kell meghatároznunk. Ha ugyanis a w energiasűrűséget és a hullám v terjedési sebességét ismerjük, akkor az energiaáramot az alábbi egyszerű megfontolással kaphatjuk meg.



Az ábrán látható, a hullám terjedésére merőleges S felületen, a felületre merőlegesen Δt idő alatt az az energia megy át a hullámmal, ami benne van a $v\Delta t$ magasságú, S alapterületű hasábban, vagyis a $\Delta V = Sv\Delta t$ térfogatban. Mivel az energia térfogati sűrűsége w, az áthaladt energia:

$$\Delta E = w\Delta V = wSv\Delta t .$$

A Φ energiaáram ezzel

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} = wvS .$$

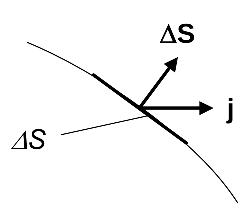
Ennek alapján az energia-áramsűrűség (amit a hullámtanban általában I-vel jelölnek)

$$I = \frac{\Phi}{S} = wv ,$$

amit a hullám *intenzitásá*nak neveznek.
Ez az összefüggés általában is igaz, tehát egy hullámban terjedő energia áramsűrűsége úgy kapható meg, hogy a térfogati energiasűrűséget megszorozzuk a terjedési sebességgel.
Mivel az áramsűrűség és a terjedési sebesség iránya azonos, az áramsűrűség (intenzitás) vektori formában az alábbi módon adható meg:

$$\mathbf{I} = w\mathbf{v} .$$

Ha egy olyan felületen átmenő energiaáramot akarunk kiszámítani, amely a terjedési sebességre nem merőleges, akkor egy elemi ΔS felületen átmenő energiaáram



$$\Delta\Phi = \mathbf{j}\Delta\mathbf{S} ,$$

ahol $\Delta\mathbf{S}$ a felületvektor. Véges S felületen átmenő energiaáram ebből integrálással (a felületelemekre történő összegzéssel) kapható meg:

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S} .$$

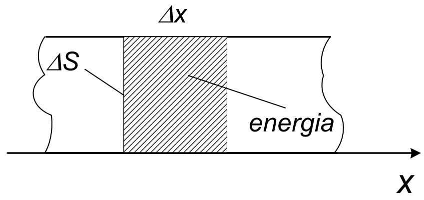
Ahhoz, hogy egy konkrét hullám intenzitását kiszámítsuk, meg kell határoznunk a hullámban az energiasűrűséget.

Rugalmas hullám energiája, a hullám intenzitása

Az energiaviszonyokat egy rugalmas rúdban vizsgáljuk, amelyben egydimenziós, longitudinális hullám terjed. A hullám által szállított energia kiszámítására az intenzitásra kapott $I = wv$ összefüggést alkalmazzuk. Ehhez meg kell határoznunk a hullámban az energia átlagos sűrűségét.

A vizsgált rúd keresztmetszete S, a rúd anyagának sűrűsége ρ, rugalmassági modulusa E.

Az energia kiszámításához a rúd egy elemi $\Delta V = \Delta x \Delta S$ térfogatát (ábra) választjuk ki. A térfogatelem mechanikai energiája a mozgási és helyzeti energia összege, ezért először ezeket az energiákat írjuk fel:



$$\Delta E_m = \tfrac{1}{2}\Delta m v_x^2 = \tfrac{1}{2}\rho \Delta x \Delta S \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 \Delta V ,$$

$$\Delta E_h = \tfrac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta x \Delta S = \tfrac{1}{2} E \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V .$$

Láttuk, hogy rúdban terjedő longitudinális rugalmas hullám terjedési sebessége anyagállandókkal is kifejezhető:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \rightarrow \qquad E = \rho v^2$$

(itt E a Young-modulus, ρ az anyag sűrűsége).

Ezt felhasználva, a helyzeti energiára azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_h = \tfrac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V .$$

Ezzel az összenergia

$$\Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h = \tfrac{1}{2}\rho \Delta V \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Az energia térfogati sűrűsége:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \tfrac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Ebből a kifejezésből konkrét végeredményt csak akkor kapunk, ha ismerjük a hullámfüggvényt.

Példaként számítsuk ki az energiasűrűséget a

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

harmonikus hullám esetén. Ha ezt a hullámfüggvényt behelyettesítjük az általános összefüggésbe, akkor az energiasűrűségre azt kapjuk, hogy

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}\rho\left[\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + v^2 k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)\right].$$

Felhasználva az $\omega = kv$ összefüggést, az energiasűrűség az egyszerűbb

$$w(x,t) = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

alakba írható. Eszerint az energiasűrűség adott helyen *időben periodikusan* változik, adott időpillanatban pedig a *helynek periodikus függvénye*.

Az időben változó energiasűrűség helyett a gyakorlatban jobban használható az energiasűrűség időbeli átlaga. A hullámban adott x helyen létrejött energiasűrűség időbeli átlaga:

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T w(x,t)dt = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 .$$

Ismerve az energia átlagos térfogati sűrűségét, mind az átlagos energiaáramot, mind pedig az átlagos intenzitást ki tudjuk számítani:

$$\Phi = wvS = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 vS$$

$$I = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v .$$

Az átlagos energia-áramsűrűség vektor ennek alapján

$$\mathbf{I} = w\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2\mathbf{v} .$$

Energia-áramsűrűség elektromágneses hullámban

A fenti általános formulák érvényesek elektromágneses hullámra is, csak ekkor az itt érvényes energiasűrűség kifejezést kell alkalmazni, ami vákuumban

$$w_{elm} = \varepsilon_0 E^2$$

(itt E az elektromos térerősség!).
Mivel

$$E^2 = c\left|\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right| ,$$

az áramsűrűség az alábbi alakba írható:

$$\mathbf{j}_{elm} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}\times\mathbf{B} .$$

Az $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ vektort, amely az energia terjedési irányát mutatja meg, *Poynting-vektornak* nevezik.

Az intenzitás- és az amplitúdó térbeli változása egyszerű esetekben

Az energia-áramsűrűség és ezzel együtt a hullám amplitúdója változhat geometriai okokból és a közegben történő energiaveszteségek (elnyelés) miatt.

Amplitúdócsökkenés gömbhullámban

Korábban már volt szó arról, hogy egy pontforrásból kiinduló hullám esetén mindig fellép egy geometriai jellegű intenzitásváltozás, aminek az az oka, hogy ugyanaz az energiaáram a terjedés során egyre nagyobb felületen oszlik el. Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, a forrástól távolodva az amplitúdónak is csökkennie kell.

A gömbhullámra elvégzett számolás eredménye az volt, hogy homogén, izotróp közegben az amplitúdónak a forrástól mért r távolsággal fordított arányban kell változnia:

$$A(r) \propto \frac{1}{r} .$$

Ugyanilyen számolás eredményeként azt kapjuk, hogy egy pontforrásból kiinduló felületi körhullámban (pl. vízhullám) az amplitúdó helyfüggése

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

jellegű.

Ezek a végeredmények csak akkor érvényesek, ha a hullám terjedése során nem lépnek fel olyan energiaelnyelő (disszipatív) folyamatok, amelyek a hullámban terjedő összenergiát csökkentik.

Amplitúdócsökkenés energiaelnyelés miatt

Az áramsűrűség változásának másik lehetséges oka, hogy a közeg a hullám energiájának egy részét elnyeli. Ilyenkor maga az energiaáram, és vele együtt az intenzitás is változik. Ha az energiaveszteség nem túl nagy, akkor egy *x*-irányban terjedő síkhullámban *dx* hosszúságú szakaszon való áthaladás közben az intenzitás változása arányos a szakasz hosszával és az eredeti intenzitással:

$$dI = I(x + dx) - I(x) = -\mu I dx \, .$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx \, ,$$

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$$

(Itt μ a közegtől függő állandó, a *csillapítási* tényező, I_0 az intenzitás az $x = 0$ helyen). Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, ez azt jelenti, hogy a hullám amplitúdója az elnyelés következtében szintén exponenciálisan csökken:

$$A(x) = A_0 \exp\left(-\frac{\mu}{2} x\right) = A_0 \exp(-\beta x) \, .$$

(Itt bevezettük a $\beta = \mu/2$ jelölést.)

Hanghullámok keletkezése és terjedése

A hanghullám valamilyen közegben terjedő rugalmas hullám. A hullám frekvenciája szerinti felosztás:
20 Hz alatt: *infrahang*
20 Hz és 16kHz között: *hallható hang*
16 kHz és 10^8 Hz között *ultrahang*
10^8 Hz felett: *hiperhang.*

Hangforrások

A hang forrása mindig rezgő test. A gyakorlatban hangforrásként legtöbbször húrt, pálcát, lemezt, gázoszlopot használnak, amelyben egy rezonanciafrekvencián állóhullámokat hoznak létre. A hullám forrásaként szolgáló mechanikai rezgést közvetlenül mechanikus úton vagy közvetett módon elektromágneses rezgés segítségével állíthatjuk elő.
Az ultrahangok előállításában és érzékelésében igen fontos szerepet játszanak az ún. piezoelektromos anyagok (pl. kvarckristály, bizonyos kerámiák). Ezekben az anyagokban külső mechanikai feszültség (deformáció) hatására elektromos polarizáció (P) jön létre. Ha egy ilyen anyagból olyan lapkát vágunk ki, amelynek nagy lapjai (A) a létrejött polarizáció irányára merőlegesek, és ezekre elektródokat viszünk fel, akkor a deformáció hatására ezeken a lapokon felületi töltés (a töltéssűrűség σ) jelenik meg. Az elektródokat áramkörbe kapcsolva, a körben mechanikai feszültség (deformáció) hatására elektromos áram jön létre:

$$\textit{mechanikai behatás} \Rightarrow \Delta P \Rightarrow \Delta\sigma \Rightarrow \Delta Q / A \Rightarrow I_P = A\frac{\Delta P}{\Delta t}.$$

A tapasztalat szerint a létrejött polarizáció – és így az elektromos áram is – arányos a mechanikai feszültséggel (deformációval). Ez a jelenség a (direkt) piezoelektromos effektus.
A jelenség megfordítása is létezik: ha egy megfelelően kivágott piezoelektromos lapkára elektromos teret (feszültséget) kapcsolunk, akkor a lapkában deformáció jön létre. Ez az ún. inverz piezoelektromos effektus. Ha a lapkára egy rezonanciafrekvenciájával azonos frekvenciájú váltakozó feszültséget kapcsolunk, akkor a lapka rezgésbe hozható, vagyis elektromos úton mechanikai rezgés kelthető. A rezonanciafrekvencia a lapka geometriai méreteitől függ.
Az ultrahangok előállítása jelenleg szinte kizárólag az inverz piezoelektromos effektus segítségével, piezoelektromos lapkák elektromos úton történő rezgetésével történik.
Az ultrahang érzékelése viszont a direkt piezoelektromos effektussal lehetséges. Ha a hanghullám egy elektródokkal ellátott, megfelelő mérőáramkörbe kapcsolt piezoelektromos lapkára esik, azt a rezgésének megfelelő ütemben deformálja, és a lapka ennek megfelelő, mérhető elektromos jelet ad.

A hanterjedés néhány jellegzetessége

A hangforrás által létrehozott hangtér (az a térrész, ahol hanghullámok vannak) jellemezhető a közeg részecskéinek a hullám által okozott elmozdulásaival, a közegbeli elmozdulások sebességével illetve a nyomás- és sűrűségváltozásokkal.

Nyomáshullám egydimenziós terjedésnél, akusztikai keménység
Egyszerűség kedvéért vizsgáljunk egy harmonikus, longitudinális, x-irányban haladó síkhullámot. A közeg részecskéinek (x-irányú) elmozdulása (ψ) ekkor

$$\psi = A\sin(\omega t - kx),$$

a részecskék sebessége pedig

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t - kx) = v_m\cos(\omega t - kx),$$

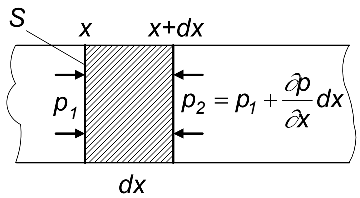
ahol

$$v_m = A\omega$$

a *sebességi amplitúdó*.

A nyomásváltozást a következőképpen kaphatjuk meg. A közegnek egy S alapú és dx magasságú térfogatelemére felírhatjuk a dinamika alapegyenletét:

$$F_x = ma_x = \rho_0 S dx\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$



ahol ρ_0 közeg átlagos sűrűsége.
Mivel az erő

$$F_x = (p_1 - p_2)S = -\frac{\partial p}{\partial x}dxS,$$

a mozgásegyenlet így alakul:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Az elmozdulás behelyettesítésével a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0\omega^2 A\sin(\omega t - kx)$$

differenciálegyenletet, ebből pedig integrálás után a nyomás

$$p = p_0 + \rho_0\omega c A\cos(\omega t - kx)$$

kifejezését kapjuk (itt felhasználtuk a $k = \omega/c$ összefüggést; p_0 az átlagos nyomás). A gyakorlatban rendszerint csak az átlagos nyomástól való eltérés, az ún. *hangnyomás* ($p' = p - p_0$) fontos, amire azt kapjuk, hogy

$$p' = \rho_0\omega c A\cos(\omega t - kx) = p'_m\cos(\omega t - kx).$$

Itt a

$$p'_m = \rho_0\omega c A = \rho_0 c v_m$$

mennyiség a *nyomási amplitúdó*.

A nyomási- és sebességi amplitúdó között fennáll a

$$\frac{p'_m}{v_m} = \rho_0 c$$

összefüggés, amely formailag az elektromos áramra vonatkozó Ohm-törvényhez hasonló, ahol a feszültségnek a nyomási amplitúdó, az áramnak a sebességi amplitúdó, az ellenállásnak a kettő hányadosa felel meg (a nyomás a sebesség oka → a feszültség az áram oka).
Mivel itt is harmonikus időbeli változásról van szó, a fenti hányados a váltóáramú körökben használt impedanciával analóg mennyiség, amit általában itt is Z betűvel jelölnek

$$Z = \rho_0 c,$$

és *a közeg hanghullám-ellenállásának* vagy *akusztikai keménységének* neveznek.

Néhány anyag akusztikai keménysége látható az alábbi táblázatban.

Anyag	$\boldsymbol{Z}=\rho_0 c$ (kg/m²/s)
acél	$4.5\cdot 10^7$
vas	$2.5\text{-}4\cdot 10^7$
alumínium	$1.7\cdot 10^7$
víz	$1.5\cdot 10^5$
levegő	$4.3\cdot 10^2$

Hangátmenet közeghatáron, reflexiós- és transzmissziós tényező

A tapasztalat szerint, ha egy harmonikus síkhullám megérkezik két közeget elválasztó határfelületre, akkor a

$$\psi_b(\mathbf{r},t)=A_b\cos(\omega t-\mathbf{k}_b\mathbf{r})$$

beeső hullám mellett keletkezik egy visszavert- és egy áteresztett (megtört) síkhullám is, amelyeknek hullámfüggvénye

$$\psi_v(\mathbf{r},t)=A_v\cos(\omega t-\mathbf{k}_v\mathbf{r})$$

illetve

$$\psi_t(\mathbf{r},t)=A_t\cos(\omega t-\mathbf{k}_t\mathbf{r}).$$

Itt $\mathbf{k}_v$ és $\mathbf{k}_t$ a visszavert- és az átmenő hullám hullámszám-vektora.

Mivel a közeghatár két oldalán terjedő hullámok a felületen azonos változást okoznak, a hullámfüggvényekre a felületen fennáll, hogy

$$\psi_b(\mathbf{r},t)+\psi_v(\mathbf{r},t)=\psi_t(\mathbf{r},t).$$

Mivel a zavarok a felület minden pontján, minden pillanatban azonosak, a hullámok fázisa itt nem különbözhet egymástól, vagyis

$$\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r}_b=\omega t-\mathbf{k}_v\mathbf{r}=\omega t-\mathbf{k}_t\mathbf{r}.$$

Ebből következik, hogy a határfelületen a beeső-, visszavert- és áteresztett hullámok amplitúdóira fennáll, hogy

$$A_b+A_v=A_t.$$

Ahhoz, hogy az amplitúdókat meg tudjuk határozni, a határfelületen való áthaladásnál további fizikai összefüggésre van szükségünk. Felhasználhatjuk az energiamegmaradás tételét, amely szerint a beeső intenzitás (I_b) megegyezik a visszavert (I_v) és az áteresztett (I_t) intenzitások összegével:

$$I_b=I_v+I_t.$$

Behelyettesítve az intenzitásokra érvényes

$$I_b=\frac{1}{2}\rho_1 A_b^2\omega^2 v_1$$

$$I_b=\frac{1}{2}\rho_1 A_v^2\omega^2 v_1$$

$$I_b=\frac{1}{2}\rho_2 A_t^2\omega^2 v_2$$

kifejezéseket, az alábbi egyenletet kapjuk

$$\rho_1 v_1\left(A_b^2-A_v^2\right)=\rho_2 v_2 A_t^2.$$

Ez az

$$A_b + A_v = A_t$$

egyenlettel együtt lehetőséget ad az ismeretlen A_v és A_t amplitúdók meghatározására. A két közeg sűrűségét (ρ_1, ρ_2), a hullámok terjedési sebességét a két közegben (v_1, v_2) és a beeső hullám amplitúdóját (A_b) ismertnek tételezzük fel.

A két egyenletből pl. A_v-re másodfokú egyenletet kapunk, amelyből a visszavert amplitúdó:

$$A_v = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_b .$$

Ennek felhasználásával az áteresztett hullám amplitúdójára azt kapjuk, hogy

$$A_t = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_b .$$

Az összefüggések kifejezhetők a közeg $Z = \rho v$ *akusztikai keménységével* is:

$$A_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$A_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} .$$

A hullámterjedésnél fontos lehet a hullám által szállított energia visszavert illetve átment hányadának ismerete, amit az R *reflexiós-* illetve a T *transzmissziós tényezővel* szokás megadni. Ezeket az intenzitásokkal definiálják:

$$R = \frac{I_v}{I_b} = \frac{\frac{1}{2}\rho_1 \omega^2 v_1 A_v^2}{\frac{1}{2}\rho_1 \omega^2 v_1 A_b^2} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$T = \frac{I_t}{I_b} = \frac{I_b - I_v}{I_b} = 1 - \frac{I_v}{I_b} = 1 - R = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} .$$

Ezekből a kifejezésekből látható, hogy a $Z_1 << Z_2$ illetve $Z_1 >> Z_2$ esetekben $T \approx 0$ és $R \approx 1$, vagyis a hullám gyakorlatilag nem hatol be a második közegbe, hanem visszaverődik onnan. Ez az eset áll elő például, ha egy hanghullám levegő és szilárd anyag határához érkezik, hiszen az akusztikai keménységek nagyságrendje: $Z_{szilárd} \approx 10^7 \frac{kg}{m^2 s}$, $Z_{gáz} \approx 10^2 \frac{kg}{m^2 s}$). Ezért, ha pl. ultrahangot szilárd anyagba akarunk bevezetni, akkor az adófej és a szilárd anyag közötti légrést valamilyen jól illeszkedő átmeneti folyadék- vagy zselé réteggel ($Z_{folyadék} \approx 10^5 \frac{kg}{m^2 s}$) célszerű kitölteni.

Ha a két közeg akusztikai ellenállása közel azonos ($Z_1 \approx Z_2$), akkor a hullám majdnem teljesen áthalad a határon, és gyakorlatilag nincs visszavert hullám.

A fenti meggondolások lemezen történő áthaladásnál általában nem érvényesek, mert ekkor a lemezben létrejövő rezonanciák lényegesen módosíthatják a visszaverődést és áteresztést.