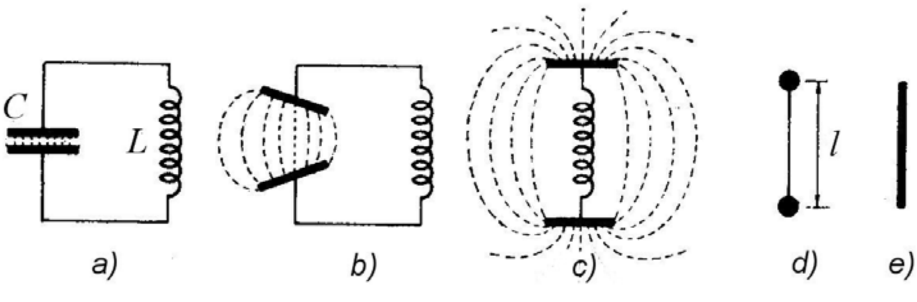
Elektromágneses hullámok

Az elektromágneses jelenségek tárgyalásánál láttuk, hogy változó mágneses erőtér elektromos erőteret (elektromágneses indukció), változó elektromos erőtér pedig mágneses erőteret (eltolási áram) hoz létre. Ebből sejthető, hogy egy elektromos vagy mágneses zavar hullám alakjában tovaterjedhet: *elektromágneses hullámok* keletkezhetnek, vagy a hullámok energiaszállítására utaló névvel *elektromágneses sugárzás* jöhet létre. Látni fogjuk, hogy az elektromágneses hullámok számos kísérletben megfigyelhetők, másrészt létezésük az elektromágnességtan alaptörvényeiből, a Maxwell-egyenletekből elméletileg következik. A valóságban ez utóbbi eredmény született meg először, vagyis az elektromágneses hullámok létezését Maxwell megjósolta, kísérletileg csak később sikerült ezt az elméleti következtetést igazolni.
Mi a történeti úttól eltérően először néhány kísérleti tapasztalatot tárgyalunk, az elektromágneses hullámok elméleti leírásának alapjaival csak később foglalkozunk.

Szabad elektromágneses hullámok

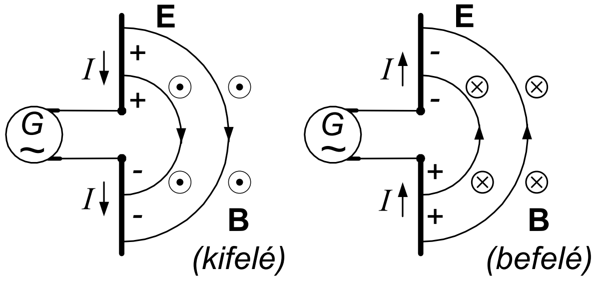
Ha valahol változik a mágneses erőtér, akkor ott (általában változó) elektromos erőtér keletkezik, a változó elektromos erőtér pedig (általában változó) mágneses erőteret hoz létre. Bizonyos feltételek között ezek az egymást kölcsönösen keltő elektromágneses zavarok a térben szabadon terjedhetnek, és a zavar forrásától távol is megjelennek. Ilyen, szabadon terjedő elektromágneses hullámokat többféleképpen előállíthatunk.

A dipólsugárzás
A szabad elektromágneses hullám előállítására szolgáló egyik alapvető módszerhez a korábban tárgyalt rezgőkörökből kiindulva juthatunk el.
Egy közönséges rezgőkörben az elektromos erőtér gyakorlatilag a kondenzátorban, a mágneses erőtér pedig a tekercsben jelenik meg (*a)* ábra). Ha a rezgőkört szétnyitjuk, akkor az elektromos erőtér egyre nagyobb térrészre terjed ki (*b)* és *c)* ábra). Ha a tekercset kiegyenesítjük, akkor a mágneses erőtér is nagyobb térrészre terjed ki. Így a rezgőkörtől távoli pontokban az elektromos erőtér változása mágneses erőteret, a mágneses erőtér változása elektromos erőteret hoz létre, és az elektromágneses zavar a rezgőkörtől elszakadva, elektromágneses hullámként terjed a térben.

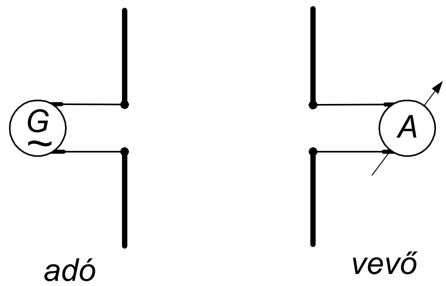


Ennek a nyitott rezgőkörnek egy leegyszerűsített változata lényegében egy fémrúd, amelynek két végén fémgömb van (*d)* ábra). Ennek tovább egyszerűsített, és a számításoknál is használt formája egy egyszerű fémrúd vagy drótdarab, amit *rezgő dipólnak*, *lineáris oszcillátornak, lineáris antennának* vagy *dipólantennának* neveznek (*e)* ábra).

A fémrúdban úgy lehet rezgéseket létrehozni, hogy középen megszakítják (ábra), és az így keletkezett két véghez egy rezgéskeltő generátort (G) kapcsolnak. A generátor váltakozó feszültségének hatására a töltések a rúd mentén ide-oda mozognak. Az ábrán a rezgő dipól rezgésének két ellentétes fázisa látható. A rezgő dipól elnevezés egyébként éppen onnan ered, hogy a rezgések során a rúd végei váltakozva ellentétes töltésűek, vagyis a sugárzást egy *változó elektromos dipólmomentum* hozza létre.



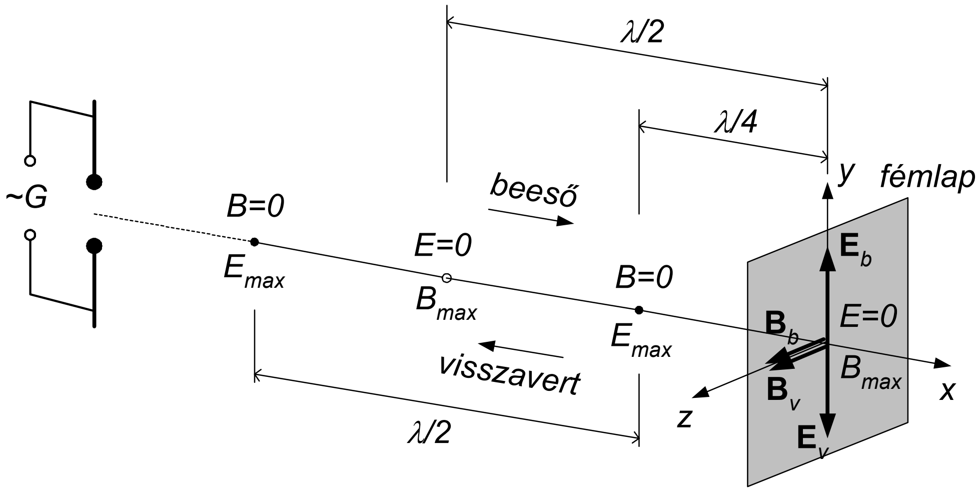
A szabadon terjedő elektromágneses hullámok a dipólantenna segítségével érzékelhetők is. Ha a hullámforrásként használt dipólus két kivezetéséhez generátor helyett megfelelő érzékelőt csatlakoztatunk (ez egyszerű esetben lehet egy izzólámpa), akkor egy vevőkészüléket kapunk (ábra), amely a rá eső elektromágneses sugárzást érzékeli. Egy ilyen detektor működése azon alapul, hogy az antennára eső elektromágneses hullám változó elektromos erőtere rezgésbe hozza az antenna elektronjait, így a hozzá csatlakozó áramkörben váltakozó áram jön létre, amit detektálni lehet.



KÍSÉRLET:
Egy generátorhoz kapcsolt dipólantennával elektromágneses hullámokat keltünk, és a hullámot egy másik dipólantennához csatlakoztatott izzólámpával detektáljuk.
Megfigyelhetjük, hogy az izzólámpa akkor világít legerősebben, ha az adó és a vevő antennája egymással párhuzamos. Egymásra merőleges antennák esetén az izzólámpa nem világít.
Ha az egymással párhuzamos adó és vevő távolságát növeljük, akkor az izzólámpa egyre kisebb fényerővel világít.

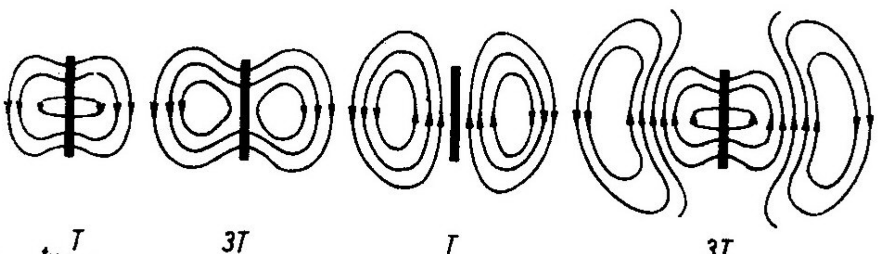
A kísérlet azt mutatja, hogy az elektromágneses zavar valóban megfigyelhető a forrástól távoli pontokban is, és a forrástól mért távolsággal erőssége csökken.
Az a megfigyelés, hogy az antennák párhuzamos állásánál maximális-, egymásra merőleges állásnál pedig minimális jelet észlelünk, arra utal, hogy a dipól sugárzása poláros, vagyis transzverzális hullámokról van szó. Mivel a vevőantennában rezgéseket csak olyan elektromos erőtér tud létrehozni, amelyben az elektromos térerősségvektornak van az antennával párhuzamos összetevője, a kísérlet alapján azt várjuk, hogy a dipólsugárzásban az elektromos térerősségvektorok mindenütt a sugárzó dipólt tartalmazó síkokban helyezkednek el.

A fenti kísérletben használt eszközökhöz hasonló elrendezést használt Hertz[1] is (*Hertz-féle dipólus*), aki először vizsgálta az elektromágneses hullámok sajátságait.
Hertz annak idején számos kísérletet végzett el, amelyek azt igazolták, hogy a dipólantenna sugárzására ugyanazok a törési és visszaverődési törvények érvényesek, mint a fényre.
Kiderült, hogy a sugárzás egy jó elektromos vezető felületről visszaverődik, és állóhullámok is létrehozhatók. Az ábrán az állóhullám jellegzetességei láthatók.



A fémlapon az elektromos térerősség ellenkező fázisban, a mágneses indukció fáziseltolódás nélkül verődik vissza. A detektor az *E=0* helyeken nem ad jelet, a *B=0* helyeken viszont maximális jelet ad, vagyis ott az elektromos térerősség maximális. A **B** és **E** állóhullámok tehát egymáshoz képest $\lambda/4$-gyel eltolt helyzetben vannak. Hertz az állóhullámok hullámhosszából a frekvencia ismeretében meghatározta a sugárzás terjedési sebességét, amit azonosnak talált a fény terjedési sebességével. Ezekkel a kísérletekkel nem csak az elektromágneses hullámok létét igazolta, hanem azt is, hogy a fény is elektromágneses hullám.

Hertz mérései és számításai alapján a sugárzó dipól közelében kialakuló térerősségviszonyokat a következő ábrán látható módon képzelhetjük el. Az ábra az elektromos térerősségvonalak változásának egy síkmetszetét mutatja a dipól rezgési periódusának (*T*) néhány időpontjában (a mágneses indukcióvektor vonalai az ábra síkjára merőleges hurkok formájában körülölelik az elektromos térerősségvonalakat).

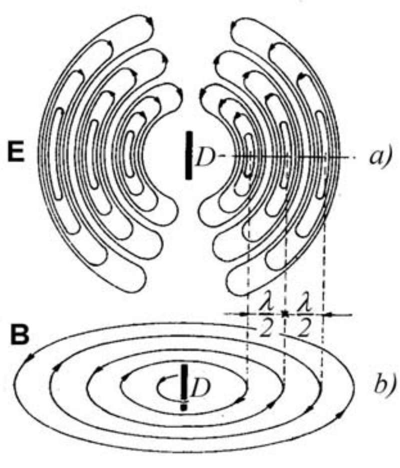


$t=\frac{T}{4}$ $\frac{3T}{8}$ $\frac{T}{2}$ $\frac{3T}{4}$

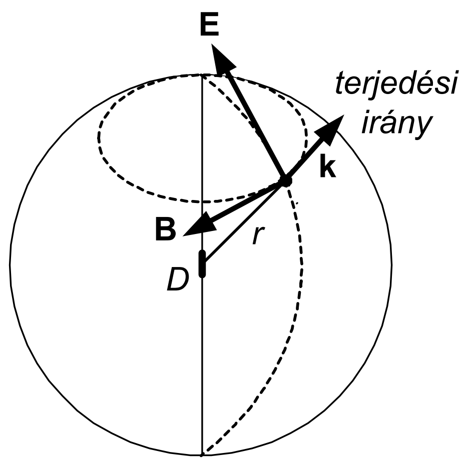
[1] Heinrich Rudolf HERTZ (1857-1894) német fizikus.

Az ábrán jól követhető, hogy hogyan válik függetlenné az elektromos erőtér a dipól töltéseitől.

Ha a dipól sugárzását a forrástól távol vizsgáljuk meg, akkor adott időpillanatban a mellékelt ábrán látható erővonalképet kapjuk. Az *a)* ábrán az elektromos térerősségvonalaknak egy síkbeli „pillanatfelvételét” látjuk, a térbeli viszonyokat az ábrának a dipól tengelye körüli körbeforgatásával kapjuk meg. Az indukcióvonalak a dipólra merőleges síkokban a *b)* ábrán mutatott mintához hasonló módon helyezkednek el. A két vonalrendszer a valóságban egymásba ágyazódik: az **E** és **B** vonalak egymást kölcsönösen áthurkolják.



A számítások és a kapott erővonalképek azt mutatják, hogy az elektromágneses hullámban az **E** és **B** vektorok egymásra- és a hullám terjedési irányára merőlegesek. A három irányt – pontszerűnek tekinthető *D* dipól sugárzása esetén – a mellékelt ábra mutatja. Eszerint az **E**×**B** vektor egyirányú a terjedés irányát megadó **k** hullámszám-vektorral.



Végül megjegyezzük, hogy nem csak változó elektromos dipólmomentum, hanem *változó mágneses dipólmomentum* is létrehoz elektromágneses sugárzást. Ilyen változó mágneses dipólmomentum jön létre például akkor, ha egy áramhurokban változtatjuk az áramerősséget.

Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra

A rugalmas hullámok esetében egy elemi térfogatra felírt mozgásegyenletből sikerült a rugalmas hullámokra érvényes hullámegyenletet levezetni, amelyből a hullámfüggvény meghatározható. Az elektromágneses hullámokra vonatkozó, hasonló egyenletet a Maxwell-egyenletek segítségével kaphatunk. Mivel azonban a hullámegyenlet differenciálegyenlet, ehhez a Maxwell-egyenletek differenciális alakját kell használnunk.

A Maxwell-egyenletek differenciális alakja

Az egyenletek differenciális alakja legegyszerűbben a vektoranalízis összefüggéseinek segítségével kapható meg. Itt táblázatos formában a végeredményt írjuk fel, de alább bemutatjuk az egyenletek származtatásának módját is.

Integrális alak	*Vektoranalízis-irásmód*	*Differenciálegyenlet*
$\oint_A \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_V \rho dV$	$div\mathbf{D} = \rho$	$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$
$\oint_A \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0$	$div\mathbf{B} = 0$	$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$
$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}d\mathbf{A}$	$rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}$ $\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}$ $\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}$
$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}d\mathbf{A}$	$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$ $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$

Az utolsó egyenletek akkor érvényesek ha az *A* felület időben nem változik.

*************** *************** ***************

Az egyenletek a vektorterekre vonatkozó integráltételek segítségével kaphatók meg.
Egy **V** vektortérre a *Gauss-tétel* szerint érvényes, hogy

$$\oint_A \mathbf{V}d\mathbf{A} = \int_V (div\mathbf{V})dV ,$$

a *Stokes-tétel* szerint pedig

$$\oint_L \mathbf{V}d\mathbf{l} = \int_A (rot\mathbf{V})d\mathbf{A} .$$

Ezekkel a tételekkel tehát felületi integrálból térfogati integrált, vonalintegrálból pedig felületi integrált kaphatunk.
Az integrális Maxwell-egyenletek ennek alapján az alábbi alakba írhatók:

$$\oint_A \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \int_V (div\mathbf{D})dV = \int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad div\mathbf{D} = \rho$$

$$\oint_A \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_V (div\mathbf{B})dV = 0 \quad \Rightarrow \quad div\mathbf{B} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}d\mathbf{A} \Rightarrow \oint_A (rot\mathbf{H})d\mathbf{A} = \int_A \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A} \Rightarrow rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}d\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \oint_A (rot\mathbf{E})d\mathbf{A} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}d\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .$$

Ezzel megkaptuk az egyenletek differenciális alakját (a differenciálegyenlet-alak ezekből a *div* és *rot* operátorok definíciója alapján kapható meg).

*************** *************** ***************

Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra

A vektoranalízis összefüggéseinek ismeretében az elektromágneses hullámokra vonatkozó általános hullámegyenlet egyszerűen megkapható. Itt azonban az egyenletet egy speciális eset vizsgálata kapcsán vezetjük le, anélkül, hogy a vektoranalízis ismeretét feltételeznénk.

Vizsgáljunk egy hullámot egy pontszerű rezgő dipólustól olyan nagy távolságban, ahol a hullám már síkhullámnak tekinthető. Az x-tengelyt vegyük fel a hullám terjedésének irányában, az y-tengelyt pedig a dipólussal- és a vele párhuzamos elektromos térerősséggel párhuzamos irányban.

Feltételezzük, hogy a hullám homogén, izotróp szigetelő közegben terjed, és nincsenek valódi töltések, tehát $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$, $\mathbf{j} = 0$ és $\rho = 0$. Mivel x-irányban terjedő *síkhullámról* van szó, a hullámterjedésben szerepet játszó térmennyiségek az y- és z-koordinátáktól nem függnek. Emiatt a táblázat első és második sorában szereplő differenciálegyenletek így egyszerűsödnek:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0\,.$$

A táblázat harmadik és negyedik sorában szereplő egyenletcsoportok első egyenleteiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0\,,$$

vagyis E_x és B_x sem a helytől, sem az időtől nem függ.

Ezek után a táblázat harmadik és negyedik sorában szereplő további egyenletek így alakulnak:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}\,,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\,.$$

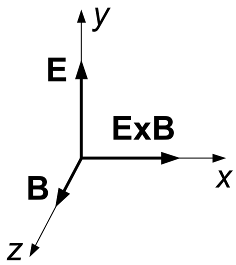
Kiinduló feltevésünk szerint az elektromos térerősségnek nincs z-komponense, ezért az egyenletek alapján $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$ és $\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$, vagyis a mágneses indukcióvektor y-komponense állandó (ha nulla volt, akkor az is marad). Ez azt jelenti, hogy ez a komponens a hullám terjedésében nem játszik szerepet.

A fentiek figyelembevételével a térmennyiségek kapcsolatát megadó összefüggések így alakulnak:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\,.$$

Az egyenletekből látható, hogy az elektromos térerősség y-komponensének időbeli változása csak a mágneses indukció z-komponensét-, a mágneses indukció z-komponensének időbeli változása pedig csak az elektromos térerősség y-komponensét változtatja meg.

A fentiekből az következik, hogy ha a hullámban az elektromos térerősségnek csak y-komponense van, akkor a mágneses indukcióvektornak csak z-komponense van: az elektromágneses síkhullámban $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ egymásra merőleges, az $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ vektor pedig a hullám terjedési irányába mutat (ábra).



Hullámegyenletet úgy kaphatunk, hogy az utolsó két egyenletből kiküszöböljük a mágneses térerősséget. Ehhez az első egyenletet differenciáljuk t szerint

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

majd a második egyenletet differenciáljuk x szerint

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}.$$

A két egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Ha osztunk $\varepsilon\mu$-vel, akkor a rugalmas hullámoknál megismert hullámegyenlettel azonos alakú

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet az elektromos térerősség változását leíró hullámegyenlet, amelyben a hullám terjedési sebességének a

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

mennyiség felel meg. Ez az elektromágneses hullám terjedési sebessége homogén, izotróp szigetelőben.

Vákuumban $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, ekkor az elektromágneses hullám terjedési sebessége, amit rendszerint c-vel jelölnek:

$$v_{vákuum} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

Ez megegyezik a fény terjedési sebességével vákuumban.

Ha a fenti egyenletekből – hasonló módszert követve – nem a mágneses indukcióvektort, hanem az elektromos térerősséget küszöböljük ki, akkor a mágneses erőtérre vonatkozó hullámegyenletet kapunk:

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

A terjedési sebesség most is ugyanaz a $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$.

Ez azt jelenti, hogy az elektromágneses hullám tulajdonképpen két hullámból tevődik össze, egy elektromos- és egy mágneses hullámból, amelyek együtt terjednek.

Nézzük meg, hogy milyen összefüggés van az elektromos- és mágneses hullámfüggvények között, ha a feltételezett síkhullám harmonikus. Ekkor

$$E_y(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

és a $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = kE_0 \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

Integrálás után megkapjuk a mágneses indukcióvektor hullámfüggvényét:

$$B_z(x,t) = \frac{k}{\omega}E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + f(x) = \frac{1}{v}E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + f(x).$$

Itt $f(x)$ tetszőleges, csak x-től függő függvény lehet.

Bevezetve a $B_0 = \frac{E_0}{v}$ jelölést, a mágneses indukcióvektorra végül a

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + f(x)$$

hullámfüggvényt kapjuk.

Másrészt a $-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t}$ egyenletből a

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

illetve a

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega}{v^2} E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\frac{k}{v} E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -kB_0 \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

összefüggést kapjuk.

Ebből integrálással azt kapjuk, hogy

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha) + g(t)\,.$$

Itt $g(t)$ tetszőleges, csak t-től függő függvény lehet.

A B_z-re kapott két kifejezésből látszik, hogy csak

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

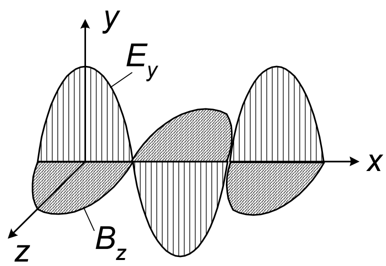
alakú megoldás lehetséges.

Ez azt jelenti, hogy az elektromos térerősség és a mágneses indukcióvektor azonos fázisban változnak:

$$E_y(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha)\,.$$

Ha tehát az x-irányban haladó harmonikus síkhullámról „pillanatfelvételt” készítünk, akkor a térerősségek $\alpha = 0$ esetén az ábrán látható helyfüggést mutatják (ez a „felvétel” a $t=T/4$ időpillanatban készült).



A fentiekből következik, hogy nem csak az elektromos térerősség és a mágneses indukcióvektor amplitúdóira érvényes, hogy $B_0 = \frac{E_0}{v}$, hanem magukra a hullámfüggvényekre is fennáll, hogy

$$B_z(x,t) = \frac{1}{v} E_y(x,t) = \sqrt{\varepsilon\mu} E_y(x,t) = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_e} E_y(x,t)\,,$$

vagyis a két hullámfüggvény arányos egymással.

*************** *************** ***************

A hullámegyenlet, a hullámfüggvények és a síkhullámra vonatkozó eredmények formálisan sokkal egyszerűbben megkaphatók a Maxwell-egyenletek vektoranalízis szimbólumokkal megadott alakjával. Az egyenletek a $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$ feltételek felhasználásával:

$$div\mathbf{D} = 0$$

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,.$$

Az utolsó két egyenletre alkalmazva a $rot(rot\mathbf{V}) = grad(div\mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}$ összefüggést, és felhasználva, hogy $div\mathbf{V} = 0$, az alábbi egyenleteket kapjuk.

$$rot(rot\mathbf{E}) = grad(div\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\mathbf{B}\right) = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},$$

Vagyis

$$\Delta\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},$$

amiből megkapjuk az elektromos térerősségre vonatkozó hullámegyenletet az

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{E} = \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

alakban, ahol a terjedési sebesség

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}.$$

Hasonló módon kapjuk a mágneses indukcióvektorra vonatkozó egyenletet:

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{B} = \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2},$$

ugyanazzal a terjedési sebességgel.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az elektromos térerősségre vonatkozó egyenletnek megoldása az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ síkhullám, a mágneses indukcióra vonatkozó egyenletnek pedig a $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ síkhullám. A behelyettesítést itt nem végezzük el, de a továbbiakban ezeket a megoldásokat használjuk.
A két térmennyiség közötti összefüggést úgy kaphatjuk meg, hogy a fenti síkhullám-megoldásokat behelyettesítjük a $rot\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ egyenletbe. Ekkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)\right]\mathbf{B}_0 .$$

A műveletek elvégzése során a koordináták szerinti differenciálás rendre $-k_x$, $-k_y$, $-k_z$ szorzókat eredményez a baloldalon, az idő szerinti differenciálás ω szorzót a jobboldalon, továbbá mindkét oldalon a *sin* helyett *cos* jelenik meg. Így végül a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mathbf{B}_0$$

összefüggést kapjuk. Ebből látszik, hogy $\mathbf{k}, \mathbf{E}_0$ és $\mathbf{B}_0$ jobbrendszert alkot, és $\omega = ck$ miatt $|\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0|$.

Az $\mathbf{E}(0, E_y, 0)$ választással a mágneses indukciót a $\mathbf{B}(0,0,B_z)$ vektor adja meg, vagyis a harmonikus elektromágneses síkhullám hullámfüggvényei az

$$E_y(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \alpha)$$

alakba írhatók.

*************** *************** ***************

Az elektromágneses hullám energiája és impulzusa

Az elektromágneses hullám révén a forrástól távoli helyen elektromos- és mágneses erőtér jelenik meg, ami csak úgy lehetséges, hogy a hullám energiát szállít. Emellett elméleti megfontolások és tapasztalatok mutatják, hogy egy felületre érkező elektromágneses hullám erőt fejt ki, vagyis impulzust is szállít.

Az elektromágneses hullám energiája

A rugalmas hullámok tárgyalásánál láttuk, hogy a hullám által szállított energiát jellemző intenzitás úgy kapható meg, hogy az energia w térfogati sűrűségét megszorozzuk a hullám terjedési sebességével:

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v} = wv\mathbf{u}_t ,$$

ahol $\mathbf{u}_t$ a terjedés irányába mutató egységvektor.

Tudjuk, hogy az elektromágneses erőtér energiája homogén, izotróp szigetelőben

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 .$$

Mivel az elektromágneses hullámban $E = vB$, és $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, az elektromos- és mágneses energiák között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon v^2 B^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 .$$

Emiatt az energiasűrűség a

$$w = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu}B^2 = \varepsilon EvB$$

alakba írható.

Mivel a terjedési irány párhuzamos az $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ vektorral, a terjedés irányába mutató egységvektor az $\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{EB}$ alakba írható. Ezzel a hullám intenzitására azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{j} = wv\mathbf{u}_t = \varepsilon EBv^2 \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{EB} = \varepsilon v^2 \mathbf{E}\times\mathbf{B} .$$

Felhasználva a $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$ összefüggést, végül a

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

kifejezést kapjuk. Ezt a mennyiséget *Poynting-vektornak nevezik*, és jelölésére az $\mathbf{S}$ szimbólumot használják:

$$\mathbf{j} = \mathbf{S} = \frac{1}{\mu}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} .$$

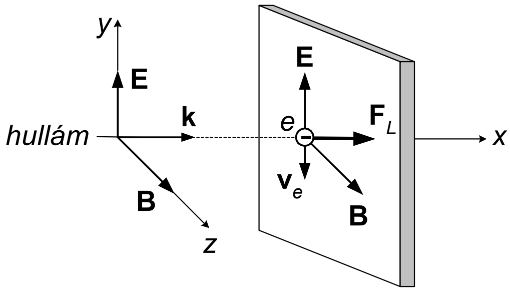
Ha egy véges A felületen áthaladó $\frac{dE}{dt}$ teljesítmény érdekel bennünket, akkor azt az $\mathbf{S}$ áramsűrűségből a felületre történő összegzéssel kaphatjuk meg:

$$\frac{dE}{dt} = \int_A \mathbf{S}d\mathbf{A} = \int_A (\mathbf{E}\times\mathbf{H})d\mathbf{A} .$$

Az elektromágneses hullám impulzusa, a hullámnyomás

Az elektromágnességtan törvényeiből következik, és kísérletekkel is igazolható, hogy egy felületre érkező elektromágneses hullám a felületre erőt fejt ki, vagyis a hullámnak impulzusa van. Ez könnyen érzékeltethető az alábbi egyszerű megfontolással.

Vizsgáljunk egy anyag felületére merőlegesen érkező elektromágneses síkhullámot. Egy ilyen hullámban az elektromos térerősség és a mágneses indukció vektora a felülettel párhuzamos (ábra). A hullám elektromos erőtere az anyag elektronjaira (e) erőt fejt ki, és azokat mozgásba hozza ($\mathbf{v}_e$). A mozgó töltésekre – és egyúttal a töltéseket tartalmazó anyagra – a mágneses erőtér a hullám haladási irányába mutató



$$\mathbf{F}_L = -e\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$$

erőt fejt ki (itt e az elemi töltés)[1]. Ez azt jelenti, hogy a beérkező hullám a terjedési irányába mutató impulzust ad át az anyagnak.

A hullám által szállított impulzust ki lehet számítani az elektromágnességtan törvényei segítségével, de egyszerűbben jutunk célhoz, ha felhasználjuk a relativitáselméletnek az E energia és a $\mathbf{p}$ impulzus kapcsolatára vonatkozó

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

összefüggését (itt $p = |\mathbf{p}|$, m_0 a nyugalmi tömeg, c a elektromágneses hullám terjedési sebessége). Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a sugárzás vákuumban terjed.

A fenti összefüggésekből a nulla nyugalmi tömegű elektromágneses sugárzásra azt kapjuk, hogy

$$p = \frac{E}{c},$$

és ugyanilyen kapcsolatban van az impulzus térfogati sűrűsége (P) az energiasűrűséggel (w):

$$P = \frac{w}{c} = \frac{\varepsilon c E B}{c} = \varepsilon E B = \frac{\varepsilon}{c} E^2 .$$

Mivel az impulzus-vektor a hullám haladási irányába mutat, az impulzussűrűség-vektorra azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B} .$$

Az impulzusátadás következménye az, hogy egy felületre eső elektromágneses hullám a felületre nyomást gyakorol, amit *sugárzási nyomásnak* vagy *hullámnyomásnak*, fény esetén pedig *fénynyomásnak* neveznek.

Egy S nagyságú felületre merőlegesen beeső hullám Δt idő alatt annyi impulzust szállít a felületre, amennyi a $\Delta V = Sc\Delta t$ térfogatban van, vagyis a felületet merőlegesen érő impulzus

$$\Delta p = P\Delta V\Delta t = PSc\Delta t .$$

Ha a felület a hullámot teljesen elnyeli, akkor a felületre ható erő

[1] A hullámban az elektromos és mágneses erőtér változik, ezért az erő nagysága időben változik, iránya azonban mindig ugyanolyan marad, hiszen az elektromos térerősség és a mágneses indukció a síkhullámban egyszerre vált irányt.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = PSc\,,$$

amiből a nyomás:

$$p_{sug} = \frac{F}{S} = Pc = \frac{\varepsilon}{c}E^2c = \varepsilon E^2 = w\,.$$

A sugárzási nyomás tehát a sugárzást teljesen elnyelő felület esetén az energia térfogati sűrűségével egyenlő.

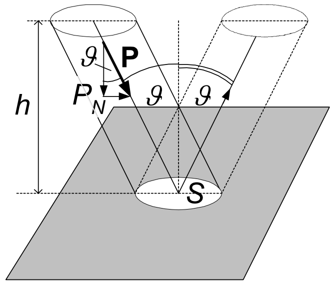
Ha a sugárzás a felületről teljesen visszaverődik, akkor az átadott impulzus $\Delta p = 2PSc\Delta t$, így a sugárzási nyomás

$$p_{sug} = 2Pc = 2\varepsilon E^2 = 2w\,.$$

************* ************* *************

Ha a sugárzás a felületre nem merőlegesen esik be (ábra), akkor két dolgot kell figyelembe venni:

– a hullám impulzusának csak a felületre merőleges komponense fejt ki nyomóerőt a felületre, és
– Δt idő alatt az ábrán látható hasábban lévő impulzus érkezik a felületre.



Ennek megfelelően a felületre merőlegesen érkező impulzus nagysága

$$\Delta p_N = P_N Sh\Delta t\,.$$

Mivel

$$P_N = P\cos\vartheta \qquad \text{és} \qquad h = c\Delta t\cos\vartheta\,,$$

a merőleges impulzusra azt kapjuk, hogy

$$\Delta p_N = PSc\Delta t\cos^2\vartheta\,.$$

Ha a sugárzás elnyelődik (abszorbeálódik) a felületen, akkor a felületre ható nyomóerő

$$F^{abs} = \frac{\Delta p_N}{\Delta t} = PSc\cos^2\vartheta\,,$$

a nyomás pedig

$$p_{sug}^{abs} = \frac{F}{S} = Pc\cos^2\vartheta = w\cos^2\vartheta\,.$$

Ha pedig a sugárzás a felületről teljesen visszaverődik (reflektálódik), akkor az erő

$$F^{refl} = \frac{2\Delta p_N}{\Delta t} = 2PSc\cos^2\vartheta\,,$$

a nyomás pedig

$$p_{sug}^{refl} = \frac{F}{S} = 2Pc\cos^2\vartheta = 2w\cos^2\vartheta\,.$$

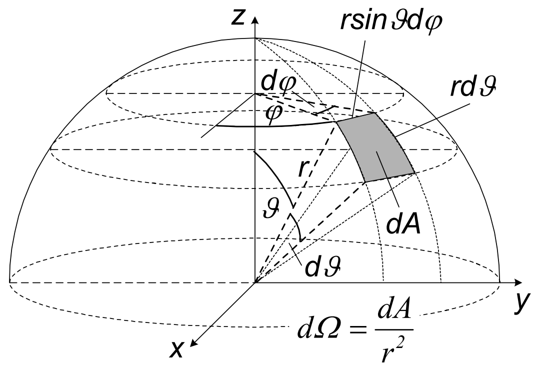
Ha a felületre minden irányból érkezik sugárzás, és a sugárzás homogén és izotróp, akkor egy ϑ és φ szögekkel megadott irányú, $d\Omega = \frac{dA}{r^2}$ elemi térszögből (ábra) érkező impulzus

$$\Delta p_N^{\vartheta,\varphi} = \frac{\Delta p_N}{2\pi}d\Omega$$

(sugárzás csak a 2π féltérszögből érkezik). Az ábra alapján az elemi térszög gömbi koordinátákkal kifejezve

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{r\sin\vartheta d\varphi r d\vartheta}{r^2} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi\,,$$

így a ϑ, φ irányból érkező impulzus



$$\Delta p_N^{\vartheta,\varphi} = \frac{\Delta p_N}{2\pi} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{PSc\Delta t}{2\pi} \sin\vartheta \cos^2\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Ezt a mennyiséget összegezni kell a lehetséges irányokra, vagyis a φ szög szerint 0-tól 2π -ig, majd ϑ szerint 0-tól $\pi/2$-ig integrálni kell:

$$\Delta p_N = \frac{PSc\Delta t}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos^2\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{PSc\Delta t}{2\pi} 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos^2\vartheta d\vartheta = PSc\Delta t \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3} \right]_0^{\pi/2} .$$

Így végül a

$$\Delta p_N = \frac{1}{3} PSc\Delta t$$

eredményt kapjuk.
Ebből tökéletesen elnyelő felület esetén az erő

$$F^{abs} = \frac{\Delta p_N}{\Delta t} = \frac{1}{3} PSc = \frac{1}{3} wS ,$$

a sugárzási nyomás pedig

$$p_{sug}^{abs} = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} w .$$

Ugyanez tökéletesen visszaverő (pl. jó vezető) felületnél

$$F^{refl} = \frac{2\Delta p_N}{\Delta t} = \frac{2}{3} PSc = \frac{2}{3} wS ,$$

illetve

$$p_{sug}^{refl} = \frac{F}{S} = \frac{2}{3} w .$$

************** ************* *************

Fényhullámnak tükörről történő visszaverődésénél a fényhullám által a tükörre kifejtett *fénynyomást* kísérletileg elsőként Lebegyev[1] mutatta ki. A kísérletben torziós mérlegre szerelt tükröt használt, amelyre a torziós mérleg sajátfrekvenciájával megegyező frekvenciával fényimpulzusokat bocsátott. Az így létrehozott rezonancia segítségével tudta az igen kis nyomást kimutatni.
A nagyságrendek jól érzékelhetők, ha a Napból a Földre érkező sugárzás $p_{sug} \approx 10^{-6}$ Pa nyomását összehasonlítjuk a légnyomás $p \approx 10^5$ Pa értékével.

[1] Pjotr Nyikolajevics LEBEGYEV (1866-1912) orosz fizikus.

Elektromágneses hullámok 50
Szabad elektromágneses hullámok 50
A dipólsugárzás 50
Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra 53
A Maxwell-egyenletek differenciális alakja... 53
Hullámegyenlet elektromágneses hullámokra 55
Az elektromágneses hullám energiája és impulzusa...59
Az elektromágneses hullám energiája 59
Az elektromágneses hullám impulzusa, a hullámnyomás.. 60