Hullámok

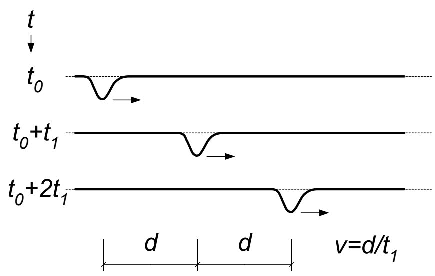
A különböző fizikai mennyiségek változása – pl. egy rezgés – igen gyakran a létrehozásának helyétől távolabb is kivált hatásokat: a létrehozott *változás* – vagy más néven *zavar* – a térben elterjed.

A különböző zavarok térbeli terjedését *hullámnak* (néha *hullámterjedésnek*)-, azt a helyet pedig, ahol a zavar létrejött, *hullámforrásnak* nevezik.

A hullám igen gyakori jelenség, és szoros kapcsolatban áll a rezgésekkel, hiszen a hullámban lényegében valamilyen rezgés terjed tova a térben.

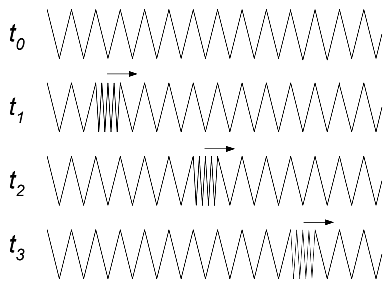
A zavarterjedésnek számtalan példája van, ezek közül egyesek szemmel látható módon mennek végbe, és egyszerű kísérletekkel bemutathatók.

KÍSÉRLET:
Ha egy kifeszített rugalmas kötélre ráütünk egy rúddal, tehát egy egyszeri kitérést („völgyet”) hozunk létre (ábra), akkor ez a kitérés végigszalad a kötélen, vagyis a kötélnek a ráütéstől távoli pontjai is megismétlik a létrehozott kitérést[1]. Megfigyelhetjük, hogy a zavar egyenletes mozgással halad a kötélen.



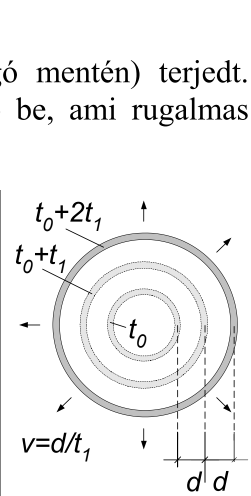
Ettől kissé eltérő jellegű zavarterjedést láthatunk egy csavarrugóban létrehozott deformációnál.

KÍSÉRLET:
Nagyobb átmérőjű, gyenge csavarrugó egyik végét egy hirtelen mozdulattal nyomjuk össze a rugó tengelyével párhuzamosan. Ez a deformáció a rugó meneteinek sűrűsödésével jár, és ez a sűrűsödés jól láthatóan végigszalad a rugón. A zavar itt is egyenletesen terjed.



Az előbbi esetekben a zavar egy dimenzióban (kötél vagy csavarrugó mentén) terjedt. Kétdimenziós zavarterjedés legegyszerűbben egy vízfelületen mutatható be, ami rugalmas hártyaként viselkedik.

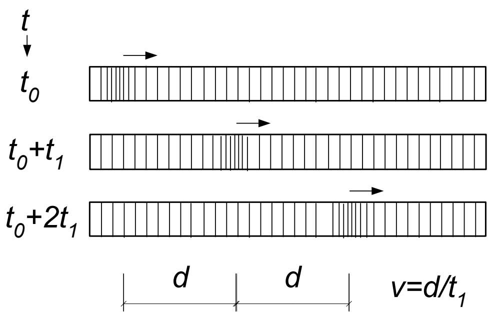
KÍSÉRLET:
Vízfelület egy pontjában létrehozott kitérés a felületen egy táguló kör formájában minden irányban terjed (ábra), és a távolabbi pontok megismétlik a létrehozott kitérést. Ez világosan látszik, ha a víz felületén elhelyezünk egy parafa dugót: a dugó a zavar megérkezésekor megemelkedik és lesüllyed, de a zavar áthaladása után helyben marad. Ez azt is mutatja, hogy a kifelé szaladó körben – a látszat ellenére – nem a víz áramlik, hanem a létrehozott állapotváltozás (zavar) terjed.



[1] A ráütés helyén a völgy fokozatosan megszűnik, és elvileg ellenkező irányú kitérés is létrejön. Ez azonban a legtöbb esetben a nagy csillapítás miatt alig észlelhető. A megfigyelést zavarhatja, hogy ha a zavar eléri a kötél végét, akkor elindul visszafelé (visszaverődik). A leírt egyszerű zavarterjedés csak eléggé hosszú kötélen figyelhető meg tisztán. A visszaverődés hatásaival később foglalkozunk.

A zavarterjedés más esetei nem ennyire szemléletesek, de a zavarterjedés ténye legtöbbször ilyenkor is könnyen kimutatható.

A csavarrugón bemutatott esethez hasonló – de szemmel nem látható – zavarterjedés jön létre, ha egy rugalmas rúd egyik végét a rúd tengelyével párhuzamosan megütjük. Ekkor ott a rúd összenyomódik (az ábrán ezt sűrűbb vonalkázással érzékeltettük), és ez az összenyomódás szalad végig a rúdon. Ugyanez történik egy dugattyúval lezárt edényben lévő gázoszlopban, ha a dugattyút hirtelen elmozdítva, a gázt a dugattyúnál összenyomjuk. A zavar megérkezése a rúd vagy gázoszlop másik végére megfelelő elmozdulás- vagy nyomásérzékelővel észlelhető.



A háromdimenziós hullámterjedés sem szemléltethető egyszerűen, de ezzel kapcsolatban számos hétköznapi tapasztalatunk van. Egy rezgő tárgy által létrehozott hang hullámként minden irányban terjed: egy adott helyen megszólaló hangot más helyeken is hallunk. Egy fényfelvillanás elektromágneses hullámként szintén minden irányban terjed, és a felvillanás helyétől távoli pontokban is észlelhető.

A hullámterjedés mechanizmusa függ a zavar jellegétől. Egy rugalmas közeg mechanikai deformációja az anyag részei közti rugalmas kapcsolatok miatt terjed, ezeket a rugalmas közegekben létrehozott zavarokat rugalmas hullámoknak nevezik. Ilyenek pl. a kísérletekben látott kötélhullámok vízhullámok vagy a hang. Az elektromos vagy mágneses erőtér változása miatt létrejött elektromágneses zavarok terjedése a változó mágneses- és elektromos tér egymást létrehozó hatásán alapul. Az így létrejött elektromágneses hullámok közeg nélkül is terjedhetnek. Ilyenek pl. a rádióhullámok, a fény, a röntgen- és a gamma sugárzás.

Most a *rugalmas hullámokkal* foglalkozunk. Tárgyalásunk során megismerkedünk a hullámterjedés leírására szolgáló alapvető mennyiségekkel és törvényekkel, majd foglalkozunk a rugalmas hullámokra vonatkozó speciális jelenségekkel.

Annak ellenére, hogy most kifejezetten a rugalmas hullámokról lesz szó, az itt tárgyalt anyag jól használható más hullámok tárgyalásánál is, hiszen a zavarterjedésnek vannak általános jellegzetességei, amelyeknek leírására a különböző hullámok esetén ugyanazokat a fogalmakat és módszereket alkalmazhatjuk.

Hullámtípusok és hullámfüggvények

A terjedő zavar adott helyen valamilyen mennyiség időbeli változását jelenti. A kötél esetében pl. egy *adott pontban* a zavar megérkezése után a kitérés *időben változik*. Másrészt *adott időpillanatban* a mennyiség pillanatnyi értéke *helyről-helyre más*. A kötélen haladó pulzus példájánál maradva, a kötélnek egy kiszemelt helyét megfigyelve, azt látjuk, hogy egy darabig nincs kitérés, azután a vizsgált pont kitér, majd a kitérés megszűnik. A kötélre egy adott időpillanatban ránézve pedig azt látjuk, hogy a kötél nagy része deformálatlan, de azon a helyen, ahová a zavar éppen ebben a pillanatban megérkezett, egy kitérést látunk.
A zavarterjedés tehát csak akkor írható le, ha a vizsgált mennyiség időbeli változását és térbeli eloszlását is ismerjük. Ehhez egy *helytől és időtől függő hullámfüggvény* szükséges.
Ha a zavar a ψ-vel jelölt mennyiség változásának tovaterjedésével jár, akkor a zavarterjedés leírására használt hullámfüggvény általános matematikai alakja $\psi = \psi(\mathbf{r},t)$ ($\mathbf{r}$ annak a pontnak a helyvektora, ahol a zavart vizsgáljuk, t az idő). A zavar lehet vektor-jellegű, amelynek iránya van (pl. elmozdulás), ilyenkor ψ a vektor nagyságát, vagy egyik komponensét jelöli, de lehet skaláris is (pl. nyomásváltozás).

A hullámok típusai

A hullámok változatos formái közötti eligazodás kedvéért célszerű a hullámokat csoportosítani. Ezt többféle szempont szerint tehetjük meg, amelyek közül a legfontosabbak a következők.
A hullám lehet
a terjedés térbeli viszonyai szerint:

- *egydimenziós* (pl. rugalmas kitérés kötélen)
- *kétdimenziós* (pl. zavarterjedés vízfelületen)
- *háromdimenziós* (ez a leggyakoribb, pl. hang vagy fény terjedése kiterjedt közegben).

a terjedés és a zavar irányának viszonya szerint:

- *transzverzális hullám* (a zavart jellemző vektor iránya merőleges a terjedés irányára, pl. egy rugalmas kötél mentén, a kötélre merőleges kitérés terjedése)
- *longitudinális hullám* (a zavart jellemző vektor iránya párhuzamos a terjedés irányával, pl. egy rugó hosszirányú összenyomásával keltett zavar terjedése a rugó mentén).

a zavar azonos értékeinek megfelelő (azonos fázisban lévő) pontok elhelyezkedése szerint:

- síkban terjedő hullámoknál az azonos fázisú helyek egy vonalon vannak, és a hullámokat a vonal alakja szerint is lehet csoportosítani: pl. *egyenes hullám*, *körhullám* (utóbbira példa egy vízfelületen egy pontban keltett hullámok terjedése),
- háromdimenziós hullámoknál az azonos fázisú helyek egy felületen helyezkednek el, ezeket a felületeket gyakran *hullámfelületeknek* nevezik, és a hullámfelületek alakja szerint beszélünk *síkhullámról*, *hengerhullámról*, *gömbhullámról*,
- a vonal- és síkhullám terjedése – az egydimenziós hullámokhoz hasonlóan – egyetlen (az azonos fázisú vonalakra, illetve síkokra merőleges) koordinátával leírható, bonyolultabb hullámok (pl. kör-, henger- vagy gömbhullámok) a hullámforrástól távol közelítőleg egyenes- illetve síkhullámnak tekinthetők,

– a hullám terjedése során a zavar fokozatosan újabb helyekre jut el, így az azonos fázisú felületeknek (vonalaknak) van egy speciális fajtája: ennek egyik oldalán már megjelent a zavar, a másik oldalán még nem. A hullámot tartalmazó térrészt, a *hullámteret* határoló, azonos fázisú felületet (vonalat) *hullámfrontnak* nevezik.

a terjedő zavar időfüggése szerint:

– ha a zavar időfüggését harmonikus függvény adja meg, akkor a létrejött hullámot *harmonikus hullámnak* nevezik,

– egyéb esetekben a hullám *nem harmonikus* (a nem harmonikus hullámok harmonikus hullámok összegzéseként – idegen szóval szuperpozíciójaként – foghatók fel).

Egydimenziós hullámterjedés, a síkhullám hullámfüggvénye

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk először egy olyan zavart, amely egy irányban (pl. az x tengely mentén) terjed. Egy ilyen hullám a gyakorlatban pl. úgy valósítható meg, hogy egy kifeszített, rugalmas kötélen létrehozunk egy kitérést, ami a kötél mentén terjed tovább.

Ha az $x=0$ helyen (például a zavar forrásánál) a zavar időbeli változása

$$\psi(0,t) = f(t),$$

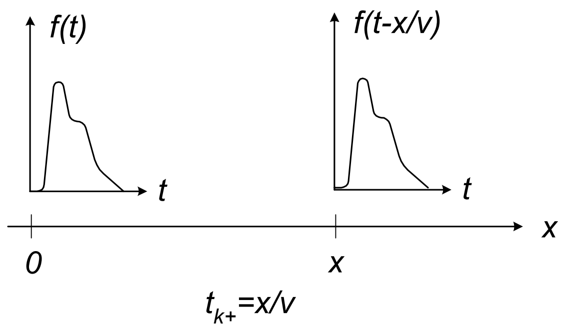
és a zavar adott c sebességgel terjed a térben, akkor a zavar egy pozitív x helyre

$$t_{k+} = \frac{x}{v}$$

egy negatív x helyre

$$t_{k-} = -\frac{x}{v}$$

késéssel érkezik meg. Ha feltételezzük, hogy a terjedés közben a zavar nem változik meg, akkor az x helyen a zavar időbeli változását a



$$\psi(x,t) = f(t \mp \frac{x}{v})$$

hullámfüggvény írja le (a "-" jel az x-tengely pozitív-, a "+" jel az x-tengely negatív irányában terjedő hullámot jelent). Ez az egydimenziós hullámterjedést leíró hullámfüggvény általános alakja, amely konkrét zavarterjedés esetén meghatározott függvényalakot ölt.

A terjedési irányban felvett egyetlen koordinátával írható le egy *síkhullám* is, ahol a hullám terjedési irányára merőleges bármelyik síkban minden pont ugyanúgy viselkedik. Ezért a fenti – egydimenziós terjedésre felírt

$$\psi(x,t) = f(t \mp \frac{x}{v})$$

alakú függvény egyben a *síkhullám hullámfüggvénye* is.

A felületen terjedő *egyenes hullám* vagy az *egydimenziós* közegben terjedő hullám lényegében a *síkhullám speciális esete*: előbbi esetben az azonos fázisú helyek felületből egyenessé-, utóbbiban egyetlen ponttá zsugorodnak.

Mivel a továbbiakban az egy- és kétdimenziós közegben terjedő hullámokat legtöbbször az egyszerűbb szemléltetés kedvéért használjuk, a fenti hullámfüggvénnyel jellemzett hullámot gyakran akkor is síkhullámnak nevezzük, ha egy- vagy kétdimenziós terjedésről van szó.

A hullámban terjedő energia

Ahhoz, hogy egy rugalmas közegben deformációt hozzunk létre, munkát kell végeznünk. Amikor ez a deformáció zavarként megjelenik egy távolabbi helyen, akkor ott is munkavégzésre van szükség. Ez csak úgy lehetséges, hogy a hullámmal nem pusztán egy állapotváltozás terjed, hanem a hullám energiát is szállít.
A hullám által szállított energiát leggyakrabban az energiaáram nagyságával (Φ) jellemzik, amely egy adott helyen a hullámmal átáramló ΔE energia és az áthaladás Δt idejének hányadosa:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Az energiaáram az energiaterjedést globálisan jellemzi, mert egy teljes felületen áthaladó összes energiát adja meg. Előfordulhat azonban, hogy az energiaáram erőssége egy nagyobb felületen nem egyenletesen oszlik el, hanem helyről helyre változik. Az energiaáramlás helyi (lokális) jellemzésére vezették be az energia-áramsűrűséget. Ha a hullám terjedésére merőleges ΔS nagyságú felületelemen $\Delta\Phi$ energiaáram halad át, akkor az energia-áramsűrűség (amit a hullámtanban rendszerint I-vel jelölnek):

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}.$$

Ezt a mennyiséget a hullám *intenzitásának* nevezik.
Ha egy nagyobb S felületen az I intenzitás mindenütt ugyanakkora, akkor a teljes Φ energiaáram:

$$\Phi = IS.$$

A hullám intenzitását a különböző hullámok esetén később kiszámítjuk, és a terjedő hullám jellemzőivel kifejezzük, most – bizonyítás nélkül – csak annyit bocsátunk előre, hogy az intenzitás arányos a hullám amplitúdójának négyzetével, azaz

$$I = CA^2,$$

ahol C a hullám egyéb jellemzőitől függő mennyiség.
Ezt azért fontos tudni, mert egy gömbhullám esetén a forrásban betáplált energia egyre nagyobb felületen oszlik el, így – ha az I energiaáram nem változik – a hullámforrástól r távolságban az energia-áramsűrűség egyre kisebb lesz. Ennek az a következménye, hogy a hullám amplitúdójának is csökkenni kell, hiszen r távolságban

$$\Phi = IS = I4r^2\pi = CA^2 4r^2\pi = \acute{a}lland\acute{o}\ .$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $A^2 \sim \frac{1}{r^2}$, vagyis $A(r) \sim \frac{1}{r}$. A gömbhullám amplitúdója tehát a forrástól távolodva egyre csökken, akkor is, ha nincs semmilyen energiaelnyelő folyamat.

Gömbhullám hullámfüggvénye

Ha a hullám homogén, izotróp közegben terjed, vagyis a terjedése nem függ a helytől és az iránytól, akkor egy pontban keltett zavar minden irányban ugyanolyan sebességgel terjed. Ennek következtében pontszerű hullámforrás esetén az azonos fázisú helyek egy gömbfelületen (felületi hullámoknál egy körön) helyezkednek el, vagyis gömbhullám (körhullám) jön létre.
A síkhullámra vonatkozó meggondolásaink alapján megpróbálhatjuk felírni a gömbhullám hullámfüggvényének általános alakját, hiszen első pillantásra úgy látszik, hogy csak az x koordinátát kell helyettesíteni a pontforrástól mért r távolsággal. Ezzel a feltevéssel az alábbi hullámfüggvényt kapjuk:

$$\psi(r,t) = f(t \mp \frac{r}{v}) .$$

A „-” jel a forrástól távolodó, a „+” jel a forrás felé haladó hullámra vonatkozik.
A helyzet sajnos ennél bonyolultabb, mert láttuk, hogy a gömbhullám amplitúdója a forrástól távolodva csökken, ezért helyesebb a *gömbhullám hullámfüggvényét* a

$$\psi(r,t) = \frac{A_0}{r} f(t \mp \frac{r}{v})$$

alakban felírni, ahol A_0 az amplitúdó a forrásban.
Ha a gömbhullámot nagyon kis térrészben, vagy a forrástól nagy távolságban vizsgáljuk, akkor közelítőleg síkhullámnak tekinthetjük. Ilyenkor – ha energiaveszteségek nincsenek – az amplitúdó helyfüggése elhanyagolható.

Egydimenziós, harmonikus síkhullám

Ha a zavar időbeli változása szinusz vagy koszinusz függvénnyel írható le, vagyis a zavar például

$$f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

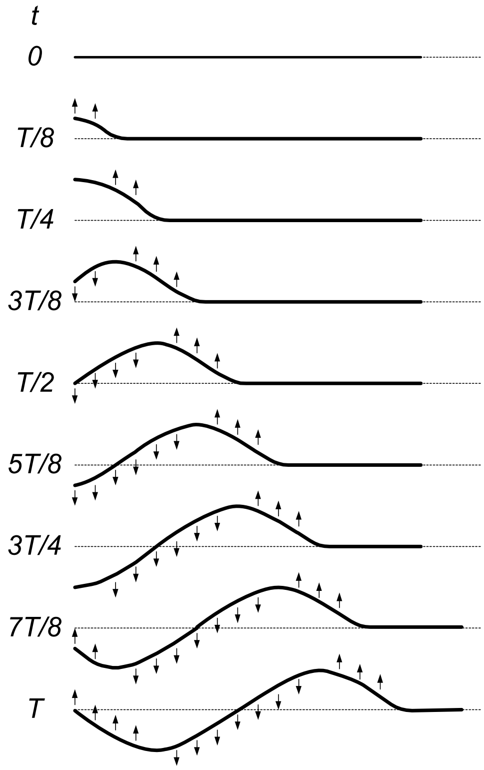
alakú harmonikus rezgés, akkor a zavarterjedést leíró függvény is ilyen lesz.
Ha a zavar egy vonalszerű közegben vagy egy kiterjedt közegben síkhullámként v sebességgel terjed az x-tengely mentén, akkor a

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega(t \mp \frac{x}{v}) + \alpha\right]$$

hullámfüggvénnyel írható le, ahol α fázisállandó. Az ilyen állandó amplitúdójú hullámot *harmonikus síkhullámnak* nevezik.
A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a síkhullám tárgyalásánál általában a pozitív x-tengely irányában terjedő hullám hullámfüggvényét írjuk fel, vagyis a

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right]$$

alakot használjuk. Az így kapott összefüggésekből előjelváltással mindig megkapható az ellenkező terjedési iránynak megfelelő eredmény is.
Természetesen a harmonikus hullám szinusz függvénnyel is leírható, mi a továbbiakban általában a koszinusz alakot használjuk.



*************** ***************

Ahogy a harmonikus rezgést megadó függvény, úgy a harmonikus síkhullám hullámfüggvénye is felírható komplex alakban. Trigonometrikus formában ekkor a hullámfüggvény:

$$\psi(x,t) = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right) + iA\sin\left(\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha\right).$$

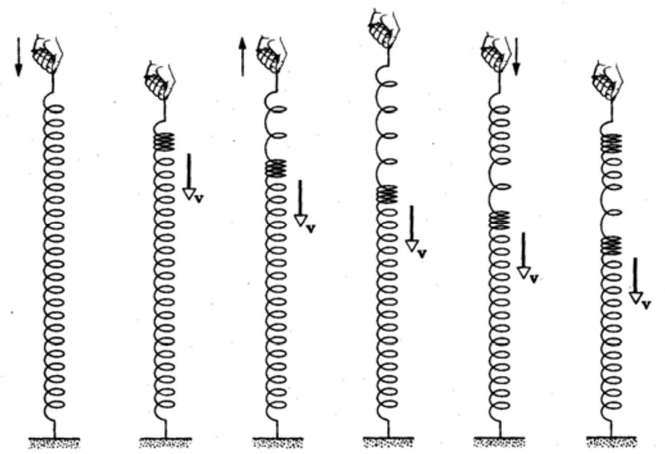
Ugyanez exponenciális alakban:

$$\psi(x,t) = Ae^{i\left(\omega(t-\frac{x}{v})+\alpha\right)}.$$

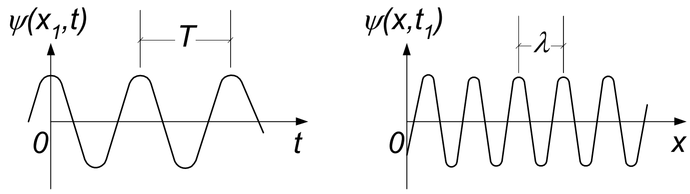
*************** ***************

Rugalmas kötélen terjedő transzverzális, harmonikus hullám kialakulását mutatja sematikusan a jobboldali ábra. Itt a kötél alakját mutatjuk be a forrásban lezajló rezgés egy teljes periódusának (T) különböző időpillanataiban. A „pillanatképek” egyenlő, $\frac{T}{8}$ időközökben készültek. Az ábrán feltüntettük a kötél egyes részeinek pillanatnyi mozgásirányát is.

Hasonló módon kaphatjuk meg egy csavarrugóban terjedő longitudinális, harmonikus hullám terjedésének pillanatképeit is, csak ott a kitérések a terjedés irányával párhuzamosak. A mellékelt ábrán a rugó deformációjában bekövetkező változások láthatók, amelyeket $\frac{T}{4}$ időközönként ábrázoltunk.



Korábban már volt szó arról, hogy a hullámfüggvény adott helyen megadja a zavar időbeli változását, adott időpillanatban pedig megadja a zavar térbeli eloszlását. Ezt mutatja egy harmonikus síkhullám esetén a mellékelt ábra, amelyen a $\psi(x_1,t)$ függvény megadja a vizsgált mennyiség időbeli változását az x_1 helyen, a $\psi(x,t_1)$ függvény pedig a vizsgált mennyiség térbeli eloszlását a t_1 időpillanatban).

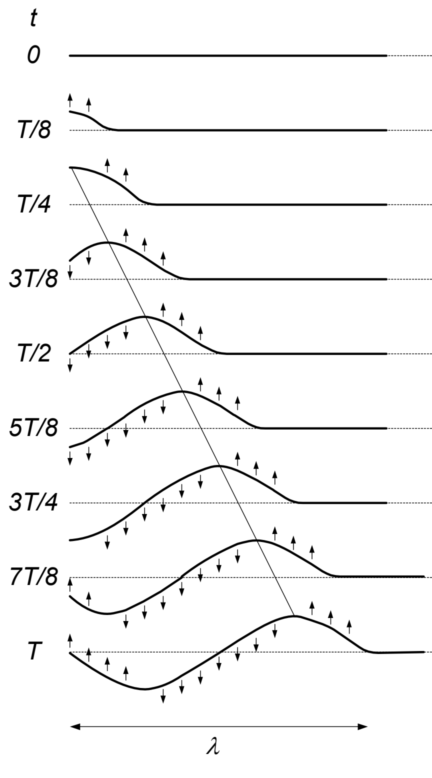


A harmonikus hullám a definíció szerint egy végtelen hosszú, csillapítatlan hullámvonulat, hiszen változó amplitúdójú vagy véges hosszúságú hullámvonulat nem írható le egyetlen harmonikus függvénnyel. A gyakorlatban a harmonikus hullám közelítő megvalósítása egy nagyon kis csillapodású, igen hosszú hullámvonulat.

A hullámok vizsgálatánál a harmonikus hullám ugyanolyan fontos szerepet tölt be, mint a rezgéseknél a harmonikus rezgés. Itt is érvényes ugyanis, hogy tetszőleges hullám felfogható harmonikus hullámok szuperpozíciójaként.

A fázissebesség

A rugalmas kötélen terjedő harmonikus hullám kialakulását bemutató, korábbi ábrát itt kiegészítve látjuk. Bejelöltük azt a λ távolságot, ameddig a zavar a T rezgésidő alatt eljut, és egy vonallal összekötöttük a zavar maximális értékének helyét különböző időpillanatokban megadó pontokat. Látható, hogy az idő és a befutott távolság egymással arányos, vagyis a maximumhely egyenletes sebességgel halad a terjedés irányában, és az ábrán látható esetben $\frac{3}{4}T$ idő alatt $\frac{3}{4}\lambda$ távolságra jutott el. Ha a λ távolságot ismerjük, akkor kiszámíthatjuk a



maximumhely mozgásának v_f sebességét is: $v_f = \frac{\lambda}{T}$. Bármilyen más fázisban lévő pont mozgását vizsgáljuk, ugyanezt a mozgási sebességet kapjuk, ez a *fázissebesség*.
Nézzük meg most egy pozitív x-tengely irányában haladó síkhullámban, hogy milyen összefüggés van a hullámfüggvényben korábban zavarterjedési sebességként bevezetett v sebesség és a v_f fázissebesség között. Ehhez felhasználjuk azt, hogy adott φ fázisú hely adott t időpillanatban olyan x koordinátájú helyen van, amelyre

$$\varphi = \omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha = \text{állandó}.$$

Az összetartozó x-t értékpárokra ebből azt kapjuk, hogy

$$x = vt - \frac{v(\varphi - \alpha)}{\omega}.$$

Eszerint a pozitív x-irányban haladó harmonikus síkhullámban az azonos fázisú helyek sebessége

$$v_f = \frac{dx}{dt} = v.$$

A negatív x-irányban haladó síkhullámra természetesen azt kapjuk, hogy $v_f = -v$.
A fázissebesség tehát azonos a korábban "zavarterjedési sebesség"-ként bevezetett mennyiséggel.
A továbbiakban a fázissebességet index nélküli „v”-vel jelöljük.

*************** *************** ***************

Megjegyezzük, hogy egy nem harmonikus zavar (pl. egy rövid pulzus) terjedésénél a fázissebesség egyes esetekben megegyezik a zavar terjedési sebességével (pl. rugalmas kötélen vagy rugalmas rúdban terjedő hullámoknál), más esetekben viszont a nem harmonikus zavar terjedési sebessége és a fázissebesség nem azonos (ez a helyzet a víz felszínén keltett vízhullámoknál és egy közegben terjedő elektromágneses hullámnál). Ezzel a kérdéssel később foglalkozunk.

*************** *************** ***************

A hullámhossz és a hullámszám

A harmonikus hullám kialakulását szemléltető ábrán λ-val jelöltük azt a távolságot, amelyre a zavar a T rezgésidő alatt eljut. Ezt a távolságot *hullámhossznak* nevezik.
Elnevezése érthetőbbé válik, ha egy másik definícióját használjuk, amely szerint a λ hullámhossz egy tetszőleges t időpillanatban azonos fázisban lévő, *szomszédos* pontok távolsága (vagyis a hullám helyfüggését megadó harmonikus függvény egy teljes periódusának hossza, amint az a fenti ábrán látható). Ezt a távolságot annak felhasználásával kaphatjuk meg, hogy az azonos fázisban lévő helyeken a hullámfüggvény értéke azonos:

$$\psi(x,t) = \psi(x + \lambda, t).$$

Ez a harmonikus síkhullámban a koszinusz (vagy szinusz) függvény argumentumára vonatkozóan azt jelenti, hogy

$$\omega(t - \frac{x+\lambda}{v}) + \alpha - \omega(t - \frac{x}{v}) - \alpha = 2\pi.$$

Ebből – a korábbi definícióval összhangban – azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = vT.$$

A hullámhosszal összefüggő, gyakran használt mennyiség a *hullámszám* (k), aminek definíciója:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

Ezzel a harmonikus síkhullám egyenlete átírható az alábbi alakba:

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha).$$

*************** *************** ***************

Ugyanez a hullámfüggvény komplex alakban: $\widetilde{\psi}(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx + \alpha)}$.

*************** *************** ***************

Síkhullám térbeli terjedésének leírása

Ha egy síkhullám az x-tengely mentén terjed, akkor leírására a

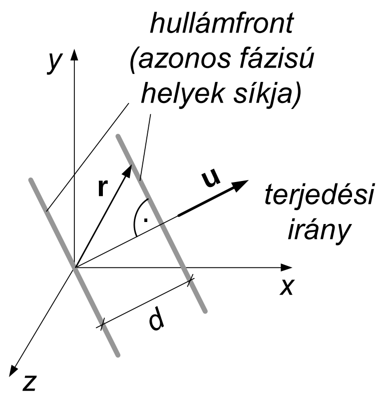
$$\psi(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$$

hullámfüggvényt használhatjuk. Speciálisan harmonikus síkhullám esetén a hullámfüggvény:

$$\psi(x,t) = A\cos\left(\omega(t \mp \frac{x}{c}) + \alpha\right) = A\cos(\omega t \mp kx + \alpha)$$

Ez a koordináta-választás azonban nem mindig lehetséges, ezért most megvizsgáljuk, hogy milyen hullámfüggvényt használhatunk, ha a síkhullám nem valamelyik koordinátatengely mentén terjed.

Az ábrán feltüntettük az azonos fázisban lévő helyek síkjait. A hullám ezekre merőlegesen terjed, terjedési irányát az **u** egységvektor mutatja.



Egy tetszőleges **r** helyvektorú pontban, a t időpillanatban a hullámfüggvényt úgy kaphatjuk meg, hogy kiszámítjuk a $t=0$ időponthoz tartozó illetve az **r** helyvektorú ponton átmenő (a t időpillanathoz tartozó) két azonos fázisú sík közötti távolságot, amelyet az ábrán d-vel jelöltünk. A hullámfüggvény argumentumába ugyanis most a $t \mp \frac{d}{v}$ mennyiség kerül.

Az **r** helyvektortól függő – az előjelet is tartalmazó – d távolság az ábra jelöléseivel:

$$d(\mathbf{r}) = \mathbf{ru},$$

ezért a hullámfüggvény az **r** helyvektorú pontban

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi(d(\mathbf{r}),t) = f\left(t - \frac{d(\mathbf{r})}{v}\right) = f\left(t - \frac{\mathbf{ru}}{v}\right)$$

Harmonikus síkhullámnál:

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos\left(\omega(t - \frac{\mathbf{ru}}{v}) + \alpha\right)$$

vagy

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - k\mathbf{ur} + \alpha)$$

Vezessük be a $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ hullámszám-vektort, amely a terjedési irányt mutatja, és nagysága $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Ezzel a koordinátarendszerhez képest tetszőleges irányban haladó harmonikus hullám hullámfüggvénye:

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha).$$

Általános irányú terjedésnél $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$.

Olyan gömbhullámoknál (vagy kétdimenziós esetben körhullámoknál), amelyeknek forrása az origóban van, érvényes, hogy $\mathbf{r} \| \mathbf{u}$, ezért $d(\mathbf{r}) = \mathbf{ru} = r$. A gömbhullámoknál (körhullámoknál) tehát a hullámfüggvény

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{A_0}{r} cos(\omega t - kr + \alpha).$$

Ilyenkor az azonos fázisú helyek az $\mathbf{ru} = \acute{a}lland\acute{o}$, vagyis az $r = \acute{a}lland\acute{o}$ összefüggéssel megadott gömbfelületen (síkbeli terjedésnél körön) helyezkednek el.

*************** *************** ***************

A sík- és gömbhullám fenti hullámfüggvényei komplex formában a

$$\tilde{\psi}(x,t) = Ae^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)}$$

illetve

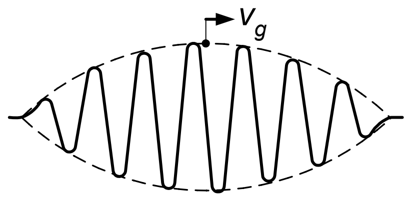
$$\tilde{\psi}(x,t) = \frac{A_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \alpha)}$$

alakot öltik.

*************** *************** ***************

Nem harmonikus hullám terjedése, a csoportsebesség

Nem harmonikus hullám terjedése esetén a terjedési sebesség fogalmát pontosítanunk kell. Ennek az az oka, hogy egy ilyen hullám különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciójának tekinthető, vagyis benne különböző frekvenciájú harmonikus hullámok terjednek. Az ilyen hullámok tipikus példája az ábrán látható rövid hullámvonulat, amelyet – éppen összetett volta miatt – *hullámcsoportnak* vagy *hullámcsomagnak* neveznek.



A terjedési sebességgel kapcsolatban akkor lép fel probléma, ha – mint az gyakran előfordul – a harmonikus hullám v fázissebessége függ a frekvenciától, $v = v(\omega)$, így a hullámcsomagot alkotó, különböző frekvenciájú harmonikus hullámok fázissebessége eltérő. Ez a jelenség a hullámok *diszperziója*.
Diszperzió esetén az összetevő harmonikus hullámok a haladás közben egymáshoz képest eltolódnak, emiatt az összegük, és így általában a hullámcsomag alakját meghatározó burkológörbe (az ábrán szaggatott vonallal jelölve) alakja is változik. A csomag sebességét ilyenkor a burkológörbe maximumának (az ábrán fekete pont) mozgási sebességével, a *csoportsebességgel* (v_g) adhatjuk meg.

A csoportsebesség elméleti meghatározása általában nem egyszerű feladat, de egy nagyon leegyszerűsített esetben a számolás könnyen elvégezhető, és általánosabban is érvényes eredményt kapunk.
Vizsgáljuk meg annak a hullámcsomagnak a mozgását, amely két közel azonos frekvenciájú, harmonikus síkhullám összeadásának eredményeként jön létre. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az x-tengely mentén haladó két hullám amplitúdója azonos, és nincs köztük fáziseltolódás. Ekkor az összeadandó hullámok a

$$\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$
$$\psi_2(t) = A\cos(\omega' t - k' x),$$

alakban írhatók fel. Itt $\omega' = \omega + \Delta\omega$, $k' = k + \Delta k$, és $\Delta\omega << \omega$, $\Delta k << k$. Az eredő hullámot a szuperpozíció elve alapján kaphatjuk meg:

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(t) = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega' t - k' x).$$

Az eredő hullám egyszerűbb alakba írható, ha alkalmazzuk a rezgések összetevésénél már alkalmazott

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 2\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$$

trigonometriai összefüggést. Ennek segítségével az alábbi eredményt kapjuk

$$\psi(x,t) = 2A\cos\frac{(\omega'-\omega)t - (k'-k)x}{2}\cos\frac{(\omega'+\omega)t - (k'+k)x}{2}.$$

A körfrekvenciákra és hullámszámokra vonatkozó fenti feltevésünk szerint $\omega + \omega' \approx 2\omega$, $k + k' \approx 2k$, így azt kapjuk, hogy

$$\psi(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega t - kx)$$

Ez a kifejezés úgy is felfogható, mint egy ω körfrekvenciájú, k hullámszámú,

$$v = \frac{\omega}{k}$$

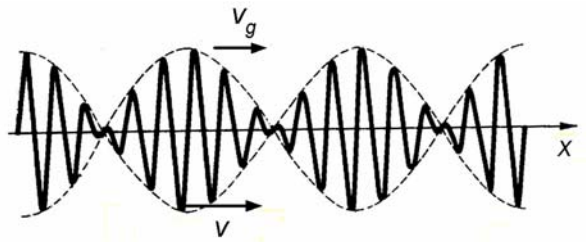
fázissebességű hullám, amelynek az amplitúdója az

$$A(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$$

függvény szerint változik. Az ilyen, változó amplitúdójú hullámot *modulált hullámnak* nevezik.
Az amplitúdófüggvény azonban maga is egy hullámfüggvény, amely

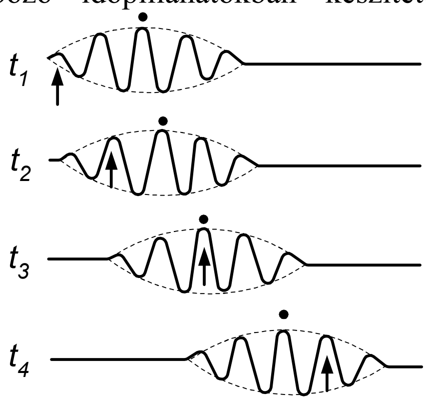
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

sebességgel terjedő hullámnak felel meg.
A hullámról készült sematikus „pillanatfelvétel" az alábbi ábrán látható. Az amplitúdóváltozást megadó burkológörbe (az amplitúdóhullám) egy hullámcsomag, amelyhez



a fenti v_g csoportsebesség tartozik. Az eredő hullám egy meghatározott fázisban lévő helye (az ábrán az egyik maximális amplitúdójú hely) diszperzió esetén a csoportsebességtől eltérő v sebességgel halad.

A fentihez hasonló hullám egy periódusáról különböző időpillanatokban készített pillanatfelvételek sematikus képét látjuk a következő ábrán. A szaggatottan berajzolt burkológörbe maximumának helyét fekete pont-, az eredő hullám egy kiszemelt maximumának mindenkori helyét pedig nyíl jelöli. Ebben az esetben a fázissebesség nagyobb, mint a csoportsebesség: az eredő hullám kiszemelt maximumhelye (nyíl) lehagyja a csomag maximumhelyét (pont). Ez egyben azt is mutatja, hogy az eredő hullám a burkológörbe belsejében mozog.



A fenti számolás eredménye sok harmonikus összetevő esetén is érvényes marad, ha az összetevők frekvenciája egy szűk intervallumba esik:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Mivel $\omega = kv$, és diszperzió esetén a fázissebesség függ a körfrekvenciától illetve a hullámszámtól ($v = v(k)$), a csoportsebesség és a fázissebesség összefüggésére azt kapjuk, hogy

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}.$$

Az összefüggést érdemes a hullámszám helyett a szemléletesebb hullámhosszal kifejezni. Mivel $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ és $dk = -2\pi\frac{1}{\lambda^2}d\lambda$, végül a

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

összefüggést kapjuk.

Az összefüggésből látszik, hogy ha $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, akkor a csoportsebesség kisebb a fázissebességnél (ez a *normális diszperzió*), a $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ esetben pedig a csoportsebesség nagyobb, mint a fázissebesség (ez az *anomális diszperzió*).

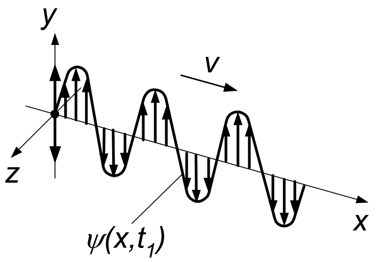
Ha $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, azaz nincs diszperzió, akkor azt kapjuk, hogy $v_g = v$, tehát a csoportsebesség megegyezik a minden hullámhosszra azonos fázissebességgel.

A diszperzió megfigyelhető vízhullámok esetén és valamilyen közegben terjedő elektromágneses hullámoknál. Utóbbi eset igen fontos szerepet játszik pl. az optikában.

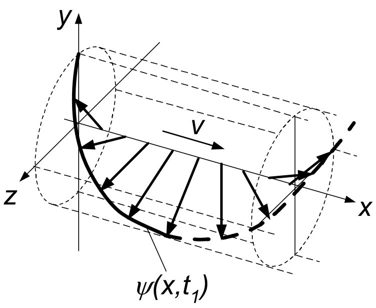
Hullámok polarizációja

Ha a hullámban terjedő zavarnak iránya van (pl. egy kitérés), akkor a hullám lehet longitudinális vagy transzverzális, attól függően, hogy a zavar iránya párhuzamos a terjedési iránnyal vagy arra merőleges.
Longitudinális hullámban egyetlen kitüntetett irány van, a zavar- és a zavarterjedés közös iránya, a transzverzális hullámban viszont a zavar- és a zavarterjedés iránya szétválik („polarizálódik”), ezért két kitüntetett irány van.
Ha a hullámforrásban a transzverzális zavar iránya időben állandó, akkor homogén, izotróp terjedés esetén a zavar iránya a hullámban sem változik meg. Ez azt jelenti, hogy a hullám terjedési iránya és a zavar iránya minden pillanatban és minden helyen ugyanabban a síkban van.

KÍSÉRLET:
Ilyen hullámot kapunk például, ha egy rugalmas kötél egyik végét mindig ugyanazon egyenes mentén mozgatjuk. Az ábrán az így kapott hullám pillanatképét (a t_1 időpillanatban) derékszögű koordinátarendszerben mutatjuk be: a hullám az x-tengely mentén mozog, a kitérés mindenütt y-irányú, a két kitüntetett irány és így a zavar térbeli eloszlását megadó görbe is az xy-síkban van.



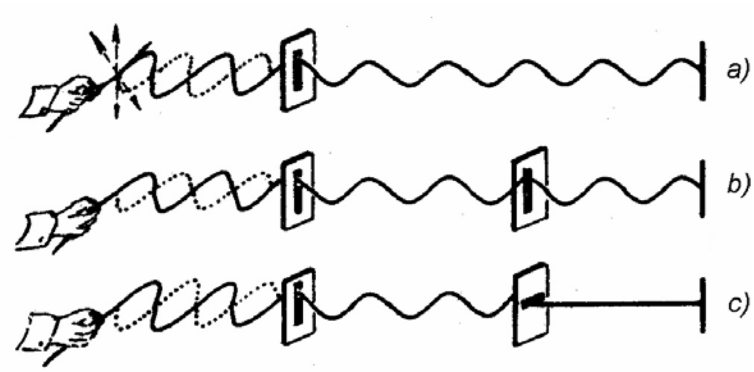
Az ilyen hullámot *síkban poláros* vagy *lineárisan poláros hullámnak*-, a két kitüntetett irány által megadott síkot pedig a hullám *rezgési síkjának* nevezik.
A hullám keltésénél azonban nem mindig teljesül a fenti feltétel, a hullámforrásban a transzverzális zavar iránya változhat, és ennek megfelelően változik a hullám rezgési síkjának helyzete is. A zavar irányának változása lehet véletlenszerű, de követhet valamilyen szabályszerűséget is.



Szabályszerű változásról beszélhetünk például akkor, ha a rugalmas kötél végét egy kör mentén mozgatjuk (ábra). Ekkor a kötél többi pontja is körmozgást végez, a forrástól mért távolságnak megfelelő fáziskéséssel. Az ilyen hullámot *cirkulárisan poláros hullámnak* nevezik.
Az ábrán látható cirkulárisan poláros hullám forrásában a zavart jellemző vektor állandó szögsebességgel körbeforog. Ez a forgó vektor minden pillanatban felbontható egy-egy változó hosszúságú y- és z-irányú vektorra, ezért a cirkulárisan poláros hullám felbontható két egymásra merőleges rezgési síkú, azonos amplitúdójú, lineárisan poláros hullámra. Az összetevő hullámok amplitúdója ekkor az említett kör sugarával egyenlő.
Ha a forrásban a zavart jellemző vektor végpontja egy ellipszis mentén mozog, akkor a keletkező hullámot *elliptikusan poláros hullámnak* nevezik. Ez a hullám mindig felbontható két egymásra merőleges rezgési síkú, különböző amplitúdójú, lineárisan poláros hullámra. Az összetevő hullámok amplitúdója ekkor az ellipszis két féltengelyének hosszával egyenlő. A cirkulárisan poláros hullám tulajdonképpen az elliptikusan poláros hullám speciális esete (a kör olyan ellipszis, amelynek két féltengelye azonos hosszúságú).
A szabálytalanul változó rezgési síkú transzverzális hullámoktól való megkülönböztetés érdekében a lineárisan-, cirkulárisan- vagy elliptikusan poláros hullámokat összefoglaló néven *poláros hullámoknak* nevezik.

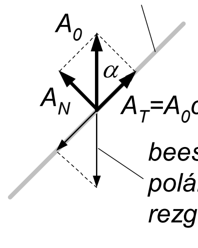
Nem lineárisan poláros, transzverzális hullámból megfelelő módszerrel kiválasztható a hullámnak egy tetszőleges síkú lineárisan poláros összetevője. Ez jól szemléltethető egy rugalmas kötélen létrehozott transzverzális hullám esetében.

KÍSÉRLET:
Rugalmas kötél végét körbeforgatva, létrehozunk egy nagyjából cirkulárisan poláros hullámot (*a)* ábra), majd a kötél középpontja közelében a kötelet egy összecsukható fakerettel vesszük körül. Ezáltal a hullám egy keskeny, függőleges irányú résen kénytelen áthaladni. A rés csak a hullám függőleges összetevőjét engedi át, így tehát egy lineárisan poláros hullámot kapunk[1].
Ha a rést függőleges tengely körül elforgatjuk, akkor mindig az új iránnyal párhuzamos rezgési síkú lineárisan poláros hullám jön létre, vagyis ezzel a módszerrel a nem poláros hullámból tetszőleges rezgési síkú lineárisan poláros hullámot ki tudunk választani.



Az ilyen eszközöket, amelyekkel nem lineárisan poláros hullámból lineárisan poláros hullámot állíthatunk elő, *polarizátoroknak*-, azt a rezgési síkot pedig, amelyet a polarizátor átenged, a *polarizátor rezgési síkjának* nevezik. Polarizátorként a különböző hullámterjedési mechanizmusoknál más és más eszközöket alkalmaznak. Rugalmas kötélhullámok esetén a kísérletben használt rést használhatjuk, az elektromágneses hullámoknál használt eszközökről később lesz szó.

KÍSÉRLET:
Ha az előző kísérletben alkalmazott polarizátor mellett egy másik polarizátort is alkalmazunk, akkor a két polarizátor után megjelenő hullám jellege attól függ, hogy a két polarizátor rezgési síkja egymással milyen szöget zár be.
Ha a második polarizátor rezgési síkja párhuzamos az elsőével, akkor a lineárisan poláros hullám változatlanul halad át a második polarizátoron is (*b)* ábra).
Ha most a második polarizátort vízszintes tengely körül elkezdjük körbeforgatni, akkor a második polarizátor után megjelenő lineárisan poláros hullám rezgési síkja a polarizátorral együtt elfordul, és amplitúdója fokozatosan csökken.
Ha a két polarizátor rezgési síkja egymásra merőleges, akkor a második polarizátor után nincs hullám (*c)* ábra), vagyis a lineárisan poláros hullámot a rezgési síkjára merőleges polarizátor kioltja.



Mivel a kísérlet tanúsága szerint a polarizátor kioltja a rá merőleges rezgési síkú lineárisan poláros hullámot, a polarizátor forgatásakor bekövetkező amplitúdó- és intenzitáscsökkenés a következőképpen is felfogható.
A hullám az első polarizátor által meghatározott rezgési síkkal érkezik a második polarizátorhoz, amelynek rezgési síkja α szöget zár be az első polarizátorral illetve a beeső

[1] A kísérletben megjelennek a kötél végéről visszaverődő hullámok is, amelyek sajátos hullámalakzatot, állóhullámot hozhatnak létre. Ez a következtetéseinken nem változtat. Az állóhullámokkal később foglalkozunk.

hullám rezgési síkjával. Ha a beeső lineárisan poláros hullámot (az ábrán A_0) felbontjuk a második polarizátorral párhuzamos (A_N)- és arra merőleges rezgési síkú (A_T) lineárisan poláros hullámokra, akkor a második polarizátor a merőleges összetevőt kioltja, és az eredeti amplitúdónak csak a második polarizátor síkjával párhuzamos összetevője halad tovább.
Az átmenő hullám amplitúdójának a két polarizátor egymással bezárt szögétől való függését az

$$A = A_T = A_0 \cos\alpha$$

összefüggés adja meg.
Mivel a hullám intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével, a második polarizátorra eső I_0 intenzitásból az átjutott I intenzitás az

$$I = I_0 \cos^2\alpha$$

összefüggésből kapható meg. Ebből visszakapjuk a tapasztalatból már ismert eredményt: ha a két polarizátor egymásra merőleges, vagyis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor $A = I = 0$, tehát nincs átmenő hullám.

Mivel a kísérletben alkalmazott második polarizátor segítségével a beérkező hullám rezgési síkját meg lehet találni, a fenti elrendezésben a második polarizátort *analizátornak* is nevezik. Ha a polarizátor és az analizátor rezgési síkja egymásra merőleges, akkor *keresztezett polarizátorokról* beszélünk. Ezzel a kifejezéssel élve, azt mondhatjuk, hogy a keresztezett polarizátorok a transzverzális hullámot kioltják, ezért alkalmazásukkal eldönthető, hogy egy hullám transzverzális vagy nem.

Mint láttuk, a polarizátor-analizátor pár az analizátor forgatásával alkalmas arra, hogy az átmenő hullám intenzitását szabályozni tudjuk. Ennek különösen az optikában van nagy jelentősége.

Energiaterjedés rugalmas hullámban

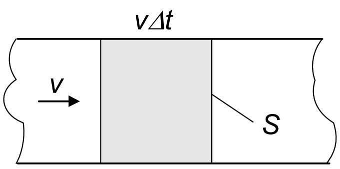
Egy hullám létrehozásához munkát kell befektetni (rugalmas közeg deformálása). Az, hogy a hullám a forrástól távol ugyanolyan rugalmas alakváltozást hozzon létre, mint ami a forrásban létrejött, csak úgy lehetséges, hogy a hullám energiát visz magával, és a szükséges munkát ez az energia fedezi.

Az energiaterjedés általános leírása

A hullám által szállított energiát az energiaárammal jellemezhetjük. Ha egy felületen a hullámmal Δt idő alatt ΔE energia halad át akkor az *energiaáram*:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

A hullám által szállított energiát – a fenti általános összefüggés helyett – jó lenne a hullám és a közeg jellemző mennyiségeivel kifejezni. Ehhez először a hullámban az energia térfogati sűrűségét kell meghatároznunk. Ha ugyanis a w energiasűrűséget és a hullám v terjedési sebességét ismerjük, akkor az energiaáramot az alábbi egyszerű megfontolással kaphatjuk meg.



Az ábrán látható, a hullám terjedésére merőleges S felületen, a felületre merőlegesen Δt idő alatt az az energia megy át a hullámmal, ami benne van a $v\Delta t$ magasságú, S alapterületű hasábban, vagyis a $\Delta V = Sv\Delta t$ térfogatban. Mivel az energia térfogati sűrűsége w, az áthaladt energia:

$$\Delta E = w\Delta V = wSv\Delta t .$$

A Φ energiaáram ezzel

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} = wvS .$$

Ennek alapján az energia-áramsűrűség (amit a hullámtanban általában I-vel jelölnek)

$$I = \frac{\Phi}{S} = wv ,$$

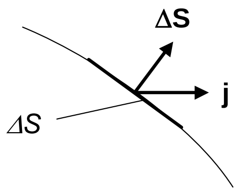
amit a hullám *intenzitásá*nak neveznek.

Ez az összefüggés általában is igaz, tehát egy hullámban terjedő energia áramsűrűsége úgy kapható meg, hogy a térfogati energiasűrűséget megszorozzuk a terjedési sebességgel.

Mivel az áramsűrűség és a terjedési sebesség iránya azonos, az áramsűrűség (intenzitás) vektori formában az alábbi módon adható meg:

$$\mathbf{I} = w\mathbf{v} .$$

Ha egy olyan felületen átmenő energiaáramot akarunk kiszámítani, amely a terjedési sebességre nem merőleges, akkor egy elemi ΔS felületen átmenő energiaáram



$$\Delta\Phi = \mathbf{j}\Delta\mathbf{S} ,$$

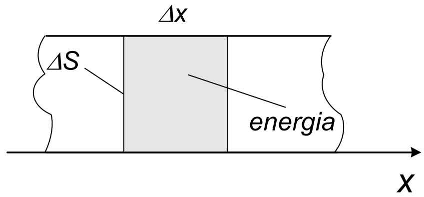
ahol $\Delta\mathbf{S}$ a felületvektor. Véges S felületen átmenő energiaáram ebből integrálással (a felületelemekre történő összegzéssel) kapható meg:

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S} .$$

Ahhoz, hogy egy konkrét hullám intenzitását kiszámítsuk, meg kell határoznunk a hullámban az energiasűrűséget.

Rugalmas hullám energiája, a hullám intenzitása

Az energiaviszonyokat egy rugalmas rúdban vizsgáljuk, amelyben egydimenziós, longitudinális hullám terjed. A hullám által szállított energia kiszámítására az intenzitásra kapott $I = wv$ összefüggést alkalmazzuk. Ehhez meg kell határoznunk a hullámban az energia átlagos sűrűségét.



A vizsgált rúd keresztmetszete S, a rúd anyagának sűrűsége ρ, rugalmassági modulusa E.
Az energia kiszámításához a rúd egy elemi $\Delta V = \Delta x \Delta S$ térfogatát (ábra) választjuk ki. A térfogatelem mechanikai energiája a mozgási és helyzeti energia összege, ezért először ezeket az energiákat írjuk fel:

$$\Delta E_m = \tfrac{1}{2}\Delta m v_x^2 = \tfrac{1}{2}\rho \Delta x \Delta S \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 \Delta V\,,$$

$$\Delta E_h = \tfrac{1}{2}E\varepsilon^2 \Delta x \Delta S = \tfrac{1}{2}E\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V.$$

Felhasználva a longitudinális rugalmas hullám terjedési sebességére vonatkozó

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \rightarrow \qquad E = \rho v^2$$

összefüggést, a helyzeti energiára azt kapjuk, hogy

$$\Delta E_h = \tfrac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V\,.$$

Ezzel az összenergia

$$\Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h = \tfrac{1}{2}\rho \Delta V\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Az energia térfogati sűrűsége:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \tfrac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Ebből a kifejezésből konkrét végeredményt csak akkor kapunk, ha ismerjük a hullámfüggvényt.
Példaként számítsuk ki az energiasűrűséget a

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

harmonikus hullám esetén. Ha ezt a hullámfüggvényt behelyettesítjük az általános összefüggésbe, akkor az energiasűrűségre azt kapjuk, hogy

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}\rho\left[\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + v^2 k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)\right].$$

Felhasználva az $\omega = kv$ összefüggést, az energiasűrűség az egyszerűbb

$$w(x,t) = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

alakba írható. Eszerint az energiasűrűség adott helyen *időben periodikusan* változik, adott időpillanatban pedig a *helynek periodikus függvénye*.
Az időben változó energiasűrűség helyett a gyakorlatban jobban használható az energiasűrűség időbeli átlaga. A hullámban adott x helyen létrejött energiasűrűség időbeli átlaga:

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T w(x,t)dt = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 .$$

Ismerve az energia átlagos térfogati sűrűségét, mind az átlagos energiaáramot, mind pedig az átlagos intenzitást ki tudjuk számítani:

$$\Phi = wvS = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 vS$$

$$I = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v .$$

Az átlagos energia-áramsűrűség vektor ennek alapján

$$\mathbf{I} = w\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2\mathbf{v} .$$

Az intenzitás- és az amplitúdó térbeli változása egyszerű esetekben

Az energia-áramsűrűség és ezzel együtt a hullám amplitúdója változhat geometriai okokból és a közegben történő energiaveszteségek (elnyelés) miatt.

Amplitúdócsökkenés gömbhullámban

Korábban már volt szó arról, hogy egy pontforrásból kiinduló hullám esetén mindig fellép egy geometriai jellegű intenzitásváltozás, aminek az az oka, hogy ugyanaz az energiaáram a terjedés során egyre nagyobb felületen oszlik el. Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, a forrástól távolodva az amplitúdónak is csökkennie kell.

A gömbhullámra elvégzett számolás eredménye az volt, hogy homogén, izotróp közegben az amplitúdónak a forrástól mért r távolsággal fordított arányban kell változnia:

$$A(r) \propto \frac{1}{r} .$$

Ugyanilyen számolás eredményeként azt kapjuk, hogy egy pontforrásból kiinduló felületi körhullámban (pl. vízhullám) az amplitúdó helyfüggése

$$A(r) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

jellegű.

Ezek a végeredmények csak akkor érvényesek, ha a hullám terjedése során nem lépnek fel olyan energiaelnyelő (disszipatív) folyamatok, amelyek a hullámban terjedő összenergiát csökkentik.

Amplitúdócsökkenés energiaelnyelés miatt

Az áramsűrűség változásának másik lehetséges oka, hogy a közeg a hullám energiájának egy részét elnyeli. Ilyenkor maga az energiaáram, és vele együtt az intenzitás is változik. Ha az energiaveszteség nem túl nagy, akkor egy x-irányban terjedő síkhullámban dx hosszúságú szakaszon való áthaladás közben az intenzitás változása arányos a szakasz hosszával és az eredeti intenzitással:

$$dI = I(x+dx) - I(x) = -\mu I dx .$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{dI}{I} = -\mu dx ,$$

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$$

(Itt μ a közegtől függő állandó, a *csillapítási* tényező, I_0 az intenzitás az $x = 0$ helyen).

Mivel az intenzitás arányos az amplitúdó négyzetével, ez azt jelenti, hogy a hullám amplitúdója az elnyelés következtében szintén exponenciálisan csökken:

$$A(x) = A_0\, exp(-\frac{\mu}{2}x) = A_0\, exp(-\beta x)\,.$$

(Itt bevezettük a $\beta = \mu/2$ jelölést.)