Nyugvó folyadékok és gázok

A folyadékok és a gázok megjelenésüket tekintve lényegesen különböznek a szilárd testektől. A legszembetűnőbb különbség az, hogy – szemben a szilárd testekkel – a folyadékoknak és gázoknak *nincs saját alakjuk*, alakjukat az őket határoló szilárd testek határozzák meg, és alakjuk a szilárd falak mozgatásával könnyen megváltoztatható.
Ennek az az oka, hogy a folyadékok és gázok szomszédos részei egymáshoz képest nagyon kis behatással elcsúsztathatók, vagyis *nyíróerővel* szemben csak kicsi – gyakran elhanyagolható – ellenállást fejtenek ki.
Nyíróerő akkor lép fel, ha a folyadék- vagy gáz különböző tartományai egymáshoz képest elmozdulnak (például különböző sebességgel áramlanak), mert ilyenkor köztük súrlódás jellegű kölcsönhatás lép fel. Ennek következtében a gyorsabban haladó rész gyorsítja a lassabban haladót, a lassabban haladó pedig fékezi a gyorsabban haladót. Ezt a jelenséget *belső súrlódásnak*-, az ilyenkor fellépő nyíróerőt *belső súrlódási erőnek* nevezik.

Mivel a nyíróerőkkel szemben kifejtett ellenállás kicsi, a folyadék vagy gáz alakja mindaddig változik, amíg benne nyíróerők működnek, vagyis az egyensúlyi állapot feltétele az, hogy a nyíróerők eltűnjenek. Egyensúlyi állapot természetesen olyan folyadékokban is létrejön, amelyekben jelentős belső súrlódás van (pl. méz), de kialakulása ilyenkor több időt vesz igénybe. Mivel egyensúlyban nem lehetnek nyíróerők, a folyadékokban és gázokban egyensúlyi deformáció gyakorlatilag csak minden oldalról történő *összenyomással* hozható létre. A nyomás növekedésekor csökken a térfogat, de – nem túl nagy nyomás esetén – a többletnyomás megszűnésekor visszaáll az eredeti térfogat, vagyis a deformáció rugalmas.

A folyadékok és gázok – számos hasonló tulajdonságuk mellett – egymástól is különböznek. Alapvető különbség például az, hogy míg a folyadékoknak van megfigyelhető *szabad felszíne*, a gázoknál ilyen felszínt nem találunk. További, lényeges különbség az, hogy a folyadékok *sűrűsége* azonos körülmények között sokkal nagyobb, mint a gázoké. Ezzel szorosan összefügg az a tapasztalat, hogy a folyadékok térfogata külső nyomással nagyon nehezen változtatható (kompresszibilitásuk kicsi), a gázok ezzel szemben könnyen *összenyomhatók* (kompresszibilitásuk nagy). Az is fontos eltérés, hogy a gázok fizikai jellemzői erősen függnek a *hőmérséklettől*, míg a folyadékok esetében ez a hőmérsékletfüggés lényegesen gyengébb.
Nagyon sok tapasztalat mutatja, hogy a folyadékok szabad felszíne sajátos, a folyadék belsejétől eltérő viselkedést mutat, ami gyakorlatilag is fontos *felületi jelenségekhez* vezet. Ezek jelenségek bizonyos esetekben befolyásolják a folyadékok viselkedését, de ezzel a problémával külön fejezetben foglalkozunk.

A folyadékok és gázok viselkedésének elméleti leírása hasonló módszerekkel történhet, mint a deformálható szilárd testeké, és hasonlóan bonyolult differenciálegyenletek megoldását teszi szükségessé. Itt csak a legegyszerűbb – de gyakorlatilag igen fontos – esetekkel foglalkozunk. Ezekben az esetekben a felületi jelenségek általában nem játszanak lényeges szerepet, ezért vizsgálatukkal itt nem foglalkozunk.
Először adott külső hatásnak kitett, nyugalomban lévő folyadékok és gázok egyensúlyának feltételeit vizsgáljuk meg. A mechanikának ezzel foglalkozó területét a folyadékok esetében *hidrosztatikának-,* a gázok esetében *aerosztatikának* nevezik. Mivel a folyadékok és gázok az egyensúly szempontjából hasonlóan viselkednek, a két terület megkülönböztetését gyakran elhagyják, és egyszerűen hidrosztatikáról beszélnek.

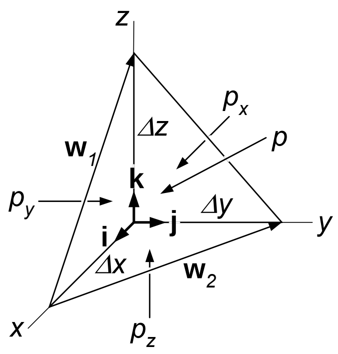
A továbbiakban mi is együtt tárgyaljuk a folyadékokat és a gázokat, és az egyszerűbb szóhasználat kedvéért a továbbiakban a *„folyadékok és a gázok”* kifejezés helyett sok esetben a *közeg* szót használjuk, folyadékról vagy gázról külön többnyire csak akkor beszélünk, ha a köztük fennálló különbséget akarjuk hangsúlyozni.

Nyomás a közeg egy pontjában

Mivel nyugvó közegben egyensúlyi állapotban nyírófeszültségek nincsenek, a közeget határoló- vagy a közeg belsejében kiválasztott felületen csak nyomófeszültség, azaz nyomás lép fel. Emiatt az egyensúly vizsgálata szempontjából a belső súrlódás nem játszik szerepet, az alábbi megállapítások tehát súrlódásos folyadékokra is érvényesek.
Számos tapasztalat mutatja, hogy a folyadék belsejében egy kiválasztott pontban elhelyezett felületen a nyomás nem függ a felület helyzetétől. Erre a következtetésre egyszerű elméleti megfontolással is eljuthatunk.

Nyomás a közeg egy pontjában

Válasszunk ki a közegben egy elemi, hasáb alakú részt (ábra), és írjuk fel ennek a részecskének az egyensúlyi feltételét abban az esetben, ha a közeg a nehézségi erő hatása alatt áll. Vegyük fel a koordinátarendszerünket az ábrán látható módon, ahol a z-tengely függőlegesen felfelé mutat.



A kiválasztott hasáb alakú rész annyiban speciális, hogy három oldala a három koordinátasíkba esik, de a negyedik oldal általános helyzetű.
A hasáb egyensúlyának feltétele az, hogy az egyes oldalakra ható nyomásokból származó felületi erők és a hasábra ható tömegerő (ami esetünkben a nehézségi erő) eredője nulla legyen:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_g = \mathbf{0}.$$

Az egyes erők az ábra jelöléseivel az alábbi módon írhatók fel.

$$\mathbf{F}_1 = p_x \frac{\Delta y \Delta z}{2}\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_2 = p_y \frac{\Delta x \Delta z}{2}\mathbf{j} \qquad \mathbf{F}_3 = p_z \frac{\Delta x \Delta y}{2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_4 = p\Delta A\,\mathbf{u}_N \qquad \mathbf{F}_g = -\rho\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} g\mathbf{k}.$$

Itt $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a három koordináta egységvektor, ΔA az általános helyzetű felület nagysága, $\mathbf{u}_N$ egy erre a felületre merőleges, a hasáb belseje felé mutató egységvektor, ρ a közeg sűrűsége, g pedig a nehézségi gyorsulás nagysága.
Ahhoz, hogy valóban használható összefüggést kapjunk, ki kell fejeznünk az $\mathbf{F}_4$ erőben szereplő $\Delta A \cdot \mathbf{u}_N$ vektort a Δx, Δy, Δz oldalhosszakkal és a koordináta egységvektorokkal. Ezt legegyszerűbben az ábrán látható $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$ vektorok vektoriális szorzatából kaphatjuk meg:

$$\Delta A\,\mathbf{u}_N = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{2}.$$

Az ábra alapján

$$\mathbf{w}_1 = -\Delta x\mathbf{i} + \Delta z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w}_2 = -\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}.$$

A vektorszorzat kiszámítása után azt kapjuk, hogy

$$dA\,\mathbf{u}_N = \frac{1}{2}\left(-\Delta y\Delta z\mathbf{i} - \Delta x\Delta z\mathbf{j} - \Delta x\Delta y\mathbf{k}\right).$$

Ezzel a lapra ható erő

$$\mathbf{F}_4 = p\frac{-\Delta y\Delta z\mathbf{i} - \Delta x dz\mathbf{j} - \Delta x\Delta y\mathbf{k}}{2},$$

és az egyensúlyi feltétel

$$p_x\frac{\Delta y\Delta z}{2}\mathbf{i} + p_y\frac{\Delta x\Delta z}{2}\mathbf{j} + p_z\frac{\Delta x\Delta y}{2}\mathbf{k} - p\frac{\Delta y\Delta z\mathbf{i} + \Delta x\Delta z\mathbf{j} + \Delta x\Delta y\mathbf{k}}{2} - \rho\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{6}g\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ebből egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$(p_x - p)\frac{\Delta y\Delta z}{2}\mathbf{i} + (p_y - p)\frac{\Delta x\Delta z}{2}\mathbf{j} + (p_z - p)\frac{\Delta x\Delta y}{2}\mathbf{k} - \rho g\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{6}\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ha a hasábot egyre zsugorítjuk, vagyis $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$, akkor a térfogati erőből származó tag sokkal gyorsabban tart nullához, mint a felületi tagok, ezért elhanyagolható, így az egyensúlyi feltétel a

$$(p_x - p)\frac{dydz}{2}\mathbf{i} + (p_y - p)\frac{dxdz}{2}\mathbf{j} + (p_z - p)\frac{dxdy}{2}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

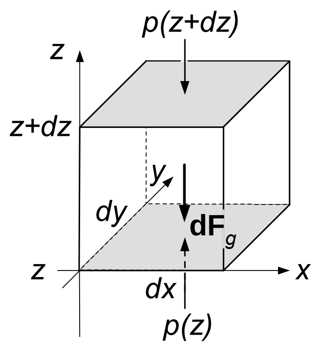
alakot ölti.
Mivel dx, dy, dz tetszőleges, az egyenlőség általában csak úgy állhat fenn, ha

$$p_x - p = 0, \quad p_y - p = 0, \quad p_z - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = p_y = p_z = p,$$

vagyis a vizsgált pontban az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ normálisú és az általános helyzetű, $\mathbf{u}_N$ normálisú síkok mindegyikén azonos a nyomás.
Ez azt jelenti, hogy a közeg adott pontjában a nyomás az *iránytól függetlenül* azonos, és ezt az esetleg fellépő térfogati erő sem befolyásolja.
Kérdés, hogy milyen a nyomás a közeg különböző pontjaiban, vagyis hogyan függ a nyomás a helytől.

A nyomás helyfüggése külső erőtérben

A kísérletek tanúsága szerint egy nehézségi erőtérben lévő folyadékban a nyomás a felszíntől mért mélység növekedésével nő, mégpedig a mélységgel arányosan. Sejthető, hogy ez a jelenség a nehézségi erővel áll kapcsolatban, konkrétan a folyadék súlyából származó nyomás következménye. Ez a jelenség gázokban is fellép, csak itt a nyomás a mélységgel sokkal lassabban változik (a gázok sűrűsége sokkal kisebb, mint a folyadékoké).



A tapasztalati úton megállapított törvényszerűséghez egyszerű elméleti megfontolásokkal is eljuthatunk. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk a nyomás helyfüggését egy folyadék- vagy gázállapotú közegben a nehézségi erő jelenlétében, és vegyük fel a koordinátarendszerünket úgy, hogy a z-tengely függőlegesen felfelé mutasson (ábra). Írjuk fel az ábrán látható téglatest alakú elemi hasáb egyensúlyának feltételét.
Az egyensúlyt a hasáb lapjaira ható nyomásból származó felületi erők és a hasáb tömegére ható nehézségi erő szabja meg. Mivel esetünkben a térfogati erőnek csak a z-komponense különbözik nullától, a vízszintes normálisú oldallapokon az egyensúlyt a térfogati erő nem befolyásolja, azt a felületi erők határozzák meg. A szemben lévő, azonos felületű oldallapok szemben lévő pontjaiban a nyomás azonos, a nyomóerő tehát a szemben lévő lapokon azonos nagyságú, de egymással ellentétes irányú, így a vízszintes irányú felületi erők egymást kompenzálják. Ez azt jelenti, hogy a térfogati erőre merőleges irányban a nyomás nem változik, a térfogati erőre merőleges felületen a nyomás mindenütt azonos.

Foglalkozzunk ezek után a függőleges erők egyensúlyával. Ennek feltétele az, hogy a felületi- és térfogati erők z-komponenseinek összege nulla legyen:

$$dF_z^{felületi} + dF_z^{térfogati} = 0$$

Mivel a térfogati erő a z-tengellyel párhuzamos, várható, hogy a nyomás függ a z-koordinátától, tehát $p = p(z)$. A hasáb felső, $z + dz$ koordinátájú lapján a nyomás $p(z + dz)$, az alsó, z-koordinátáju lapján $p(z)$, így a felületi erők eredője

$$dF_z^{felületi} = p(z)dxdy - p(z + dz)dxdy = -\big(p(z + dz) - p(z)\big)dxdy$$

$$dF_z^{felületi} = -\frac{dp(z)}{dz}dzdxdy = -\frac{dp(z)}{dz}dV \ ,$$

ahol $dV = dxdydz$ a hasáb térfogata.

A térfogati erő z-komponense esetünkben

$$dF_z^{térfogati} = -\rho gdxdydz = -\rho gdV \ ,$$

így az egyensúlyi feltétel

$$\rho gdV + \frac{dp(z)}{dz}dV = 0 \ .$$

Ebből következik, hogy a nyomás z-irányú változását meghatározó összefüggés

$$\rho g + \frac{dp(z)}{dz} = 0$$

vagy a szokásosan használt alakban

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g \ .$$

*************** *************** **************

Ha a koordinátarendszer választásánál nem a fenti módon járunk el, akkor a térfogati erőnek általában mindhárom komponense különbözik nullától: $\mathbf{dF}^{térf}(dF_x^{térf}, dF_y^{térf}, dF_z^{térf})$. Ekkor a fenti gondolatmenet szerint a nyomás mindhárom irányban függ a helytől: $p = p(x, y, z)$, és az egyensúlyi feltétel a fentihez hasonló módon adható meg

$$dF_x^{térf} = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}dV \quad dF_y^{térf} = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y}dV \quad dF_z^{térf} = \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}dV.$$

Ez vektori alakban rövidebben is felírható a gradiens vektor segítségével:

$$\mathbf{f}^{térf} = \frac{\mathbf{dF}^{térf}}{dV} = \mathbf{grad}\, p \ .$$

*************** *************** **************

A fenti meggondolásokból két fontos dolog következik.

Az egyik az, hogy a közegben a nyomás csak a *térfogati erővel párhuzamos irányban* változik a hellyel.

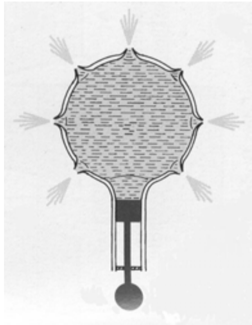
A másik az, hogy ha nincs térfogati erő, akkor

$$\frac{dp(z)}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(z) = állandó \ ,$$

vagyis ilyenkor a közeg minden pontján ugyanakkora a nyomás, más szóval *a nyomás nem függ a helytől*. Ez azt jelenti, hogy ha a közeget valamilyen (nem térfogati) erővel

összenyomjuk, akkor a megnövekedett nyomás a közeg minden pontján ugyanakkora lesz. Ezt a tapasztalat által is igazolt törvényt *Pascal*[1]*-törvénynek* nevezik.
Pascal-törvény szemléltetésére szolgál a következő egyszerű kísérlet.

KÍSÉRLET:
Egy dugattyús hengerhez csatlakozó gömb felületén egyenletes eloszlásban lyukakat fúrunk (ábra). Ezután az edényt megtöltjük vízzel, és a dugattyút hirtelen az edény belseje felé nyomjuk. Ekkor a víz kispriccel a lyukakon át. Megfigyelhető, hogy a víz minden lyukon ugyanolyan erővel spriccel ki, vagyis a dugattyúnál kifejtett nyomás a gömbfelület minden pontján megjelenik.



A Pascal-törvényen alapul például a nagy terhek emelésére szolgáló *hidraulikus emelő* működése: egy kis- és egy nagy felületű dugattyút tartalmazó edényben a folyadékot a kis felületű dugattyúval kis erővel összenyomva a nyomás a nagy felületű dugattyúnál változatlanul megjelenik, így ez dugattyú a felületek arányában megnövekedett erő kifejtésére képes.
A fenti egyensúlyi feltétel ismeretében könnyen meghatározhatjuk a nyomás helyfüggését egy nehézségi erő hatása alatt álló közegben, hiszen csak a

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Ez a már ismert, szétválasztható típusú egyenlet, amit a

$$dp = -\rho g dz$$

alakba írva integrálhatunk.
Ha a $z = 0$ koordinátájú pontban a nyomást $p(0) = p_0$-vel jelöljük, akkor a kiszámítandó integrálok:

$$\int_{p_0}^{p(z)} dp = -\int_0^z \rho g dz \ .$$

Feltételezve, hogy a vizsgált térrészben a sűrűség és a nehézségi gyorsulás nem függ a helytől, az integrálás könnyen elvégezhető, és azt kapjuk, hogy

$$p(z) - p_0 = -\rho g z \ ,$$

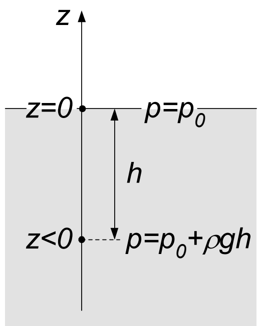
azaz

$$p(z) = p_0 - \rho g z \ .$$

A gyakorlatban legtöbbször az a kérdés merül fel, hogy egy folyadékban mennyi a nyomás a folyadék felszínétől mért h mélységben (ábra). Ha a z-tengely függőlegesen felfelé mutat, és a $z = 0$ pont a folyadék felszínén van, akkor a folyadékban lévő pont $z < 0$ koordinátájára fennáll, hogy $h = -z$. Ha tehát a nyomás helyfüggését a felszíntől mért mélységgel akarjuk megadni, akkor az összefüggést a

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

alakba írhatjuk. Itt p_0 a folyadék felszínén mért nyomás (pl. a felszín felett lévő levegő nyomása).



[1] Blaise PASCAL (1623-166) francia matematikus, fizikus, filozófus.

Az összefüggésben szereplő

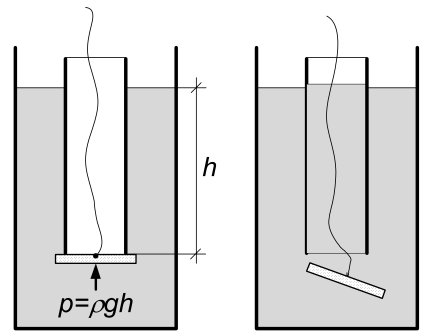
$$p = \rho gh$$

mennyiséget *hidrosztatikai nyomásnak* nevezik.
Ez a nyomás a h mélységben lévő pont feletti folyadékoszlop súlyából származik, hiszen egy A felületű, h magasságú folyadékoszlop súlya $G = \rho Ahg$, így az oszlop alján a nyomás

$$p = \frac{G}{A} = \rho gh .$$

Ezt mutatja a következő, egyszerű kísérlet.

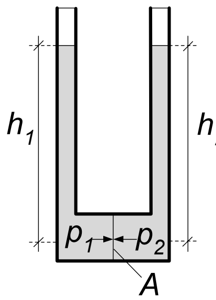
KÍSÉRLET:
Mindkét végén nyitott üveghenger alsó végéhez fonál segítségével egy jól záró lapot illesztünk, majd a fonalat megfeszítve a hengert egy szélesebb, vízzel telt üvegedénybe merítjük (ábra). Ha a fonalat elengedjük, akkor a záró lap nem esik le, és a henger továbbra is üres marad. Ha ezután a hengert óvatosan feltöltjük vízzel, akkor a záró lap mindaddig a helyén marad, amíg a vízszint az üveghengerben alacsonyabb, mint a külső vízszint. A külső vízszint elérése után a záró lap leesik.

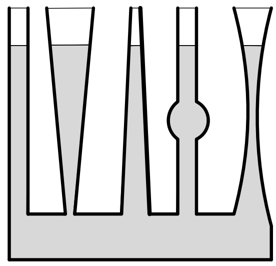


A vízbemerítés után a lapot az alulról ható $p = \rho gh$ hidrosztatikai nyomás tartja meg. Ha a hengerbe vizet töltünk, akkor a záró lapra hat a vízoszlop lefelé ható nyomása is. Ezért, ha a betöltött víz magassága nagyobb, mint a külső vízszint magassága, akkor a vízoszlop lefelé ható nyomása nagyobb lesz, mint a felfelé ható hidrosztatikai nyomás, és a lap leesik.

Láttuk, hogy a folyadék egy pontjában a hidrosztatikai nyomás arányos a pont felett elhelyezkedő folyadékoszlop magasságával. Ennek egyik következménye a *közlekedő edények* működése.

KÍSÉRLET:
Egy nem túl vékony, szájával felfelé, függőlegesen tartott U-alakú csőbe folyadékot töltve, a folyadékszint mindkét oldalon ugyanolyan magasra áll be (ábra).
Ugyanez az eredmény akkor is, ha több egymással összekötött („egymással közlekedő") függőleges csőben vizsgáljuk a kialakult szinteket. Az egyes csövek alakjától függetlenül minden csőben ugyanolyan magas a folyadék szintje.





A magyarázat az, hogy egyensúly csak akkor állhat fenn, ha a vízszintes összekötő szakaszokon kiválasztott keresztmetszet bármely pontján a nyomás mindkét oldalon azonos. Ebből következik, hogy a pont felett a folyadékoszlop magasságának mindkét oldalon meg kell egyeznie, hiszen a nyomás arányos a folyadékoszlop magasságával. Az U-alakú cső esetén például a kiválasztott pontban az egyensúly feltétele

$$p_1 = \rho gh_1 = p_2 = \rho gh_2 ,$$

vagyis

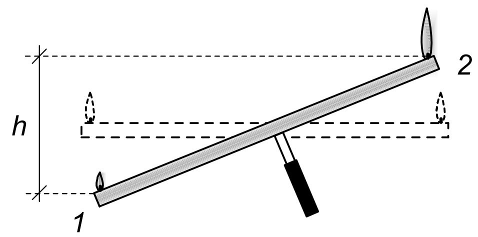
$$h_1 = h_2 .$$

Természetesen, ha a cső két szárában nem azonos folyadék van, akkor a két csőben a szintmagasság sem lesz azonos, hiszen ekkor a sűrűségek is különbözőek, de a magasságok most is a $p_1 = p_2$ egyensúlyi feltételből állapíthatók meg.

A folyadékot tartalmazó U-alakú cső nyomásmérésre használható. Ha a mérendő, nagyobb nyomású térrészt a cső egyik szárához csatlakoztatjuk, akkor a folyadékszint ebben a szárban lesüllyed, a másikban pedig megemelkedik. A folyadékszintek közötti magasságkülönbségnek megfelelő folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása éppen a mérendő nyomásnak felel meg. Így a kialakult magasságkülönbségből közvetlenül megkapható a mérendő nyomás értéke.

A közeg súlyából származó nyomás gázokban is fellép csak a gáz kis sűrűsége miatt sokkal kisebb mint folyadékokban. Azt, hogy ilyen nyomás valóban létezik, jól mutatja az alábbi kísérlet.

KÍSÉRLET:
Mindkét végén lyukas csőbe (ábra) gázt vezetünk és a cső vízszintes helyzetében a lyukakon kiáramló gázt meggyújtjuk. Ekkor a gáz a két lyuknál azonos magasságú lánggal ég.
Ha a csövet az ábrán látható módon függőleges síkban elforgatjuk, akkor a magasabban lévő lyuknál a láng lényegesen magasabb, mint az alacsonyabban lévőnél.



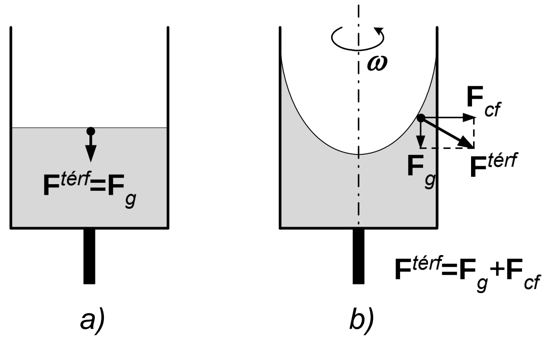
A gázláng ott magasabb, ahol a gáz nyomása nagyobb, ezért a kísérletből azt a következtetést vonhatnánk le, hogy a gázban felfelé haladva nő a nyomás, ami ellentmondani látszik a hidrosztatikai nyomásról mondottaknak. A magyarázat az, hogy a láng magassága nem egyszerűen a gáz nyomásától függ, hanem a gáz és a környező levegő nyomásának különbségétől. A kísérletből tehát csak az következik, hogy felfelé haladva ez a nyomáskülönbség nő. Ennek pedig az az oka, hogy a levegő sűrűsége nagyobb, mint a gázé, ezért a levegő hidrosztatikai nyomása gyorsabban csökken a magassággal, mint a gázé, tehát a magassággal egyre nagyobb lesz a két nyomás közti különbség.
A jelenség számítással is egyszerűen követhető. Ha az alsó végnél a nyomások p_{g1} és $p_{\ell 1}$, akkor a nyomáskülönbség ott $\Delta p_1 = p_{g1} - p_{\ell 1}$. A nyomások a h-val magasabban lévő felső végnél $p_{g2} = p_{g1} - \rho_g gh$ illetve $p_{\ell 2} = p_{\ell 1} - \rho_\ell gh$, így a nyomáskülönbség ott $\Delta p_2 = p_{g2} - p_{\ell 2} = p_{g1} - p_{\ell 1} + (\rho_\ell - \rho_g)gh = \Delta p_1 + (\rho_\ell - \rho_g)gh$. Mivel a levegő sűrűsége, nagyobb, mint a gázé, $\rho_\ell - \rho_g > 0$, ezért $\Delta p_2 > \Delta p_1$.
Ez az oka annak, hogy ha a gázhálózatban kicsi a nyomás, akkor a magasabban lakók járnak jobban, mert ott még lehet használni a gázt, amikor a földszinten már alig jön gáz a csapból. (Csökkent víznyomás esetén mindez fordítva igaz, hiszen a víz sűrűsége nagyságrendekkel nagyobb, mint a levegőé.)

A térfogati erő jelenlétével szorosan összefügg az a kérdés, hogy milyen egy nyugalomban lévő folyadék szabad felszínének alakja. Egyelőre olyan esetekkel foglalkozunk, amelyeknél a korábban említett felületi jelenségek nem játszanak lényeges szerepet. A tapasztalat szerint ez a helyzet, ha a felszínt a folyadékot tartalmazó edény falától távol vizsgáljuk.
Mivel nyugvó folyadékban egyensúlyi állapotban a nyíróerők eltűnnek, az egyensúly kialakulása során a folyadék felszíne addig változik, amíg a jelenlévő térfogati erőnek nincs a

felülettel párhuzamos összetevője. Ez azt jelenti, hogy egyensúlyban a *felszín merőleges a térfogati erőre*. Ez a megállapítás *mindenféle térfogati erőre* érvényes.

Emiatt vízszintes a Földön a nyugvó víz felszíne (merőleges a nehézségi erőre), de ez az oka annak is, hogy egy hengeres edényben körbeforgatott víz felszíne nem sík.

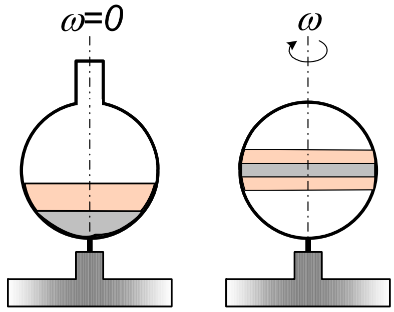
KÍSÉRLET
Függőleges tengely körül forgatható hengeres edénybe vizet töltünk, amelynek felszíne a szokásos vízszintes sík (*a)* ábra). Ha a hengert a tengelye körül gyorsan körbeforgatjuk, akkor a víz felülete jól láthatóan megváltozik. Az új felület síkmetszetét szemlélteti a *b)* ábra.



A jelenség magyarázata a forgó rendszerből nézve az, hogy az ábrán látható kis térfogatelemre az $\mathbf{F}_g$ nehézségi erőn kívül fellép az $\mathbf{F}_{cf}$ centrifugális erő is, ami szintén a tömeggel arányos térfogati erő. A felszín mindenütt a térfogati erők $\mathbf{F}^{térf} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{cf}$ eredőjére merőleges. Ennek iránya azért változik helyről-helyre, mert a centrifugális erő nagysága függ a forgástengelytől mért távolságtól.

Ha a centrifugális erőt növeljük (növekvő fordulatszám), akkor a nehézségi erő szerepe egyre kisebb lesz, és el lehet érni, hogy a nehézségi erő szerepét szinte teljesen átveszi a centrifugális erő.

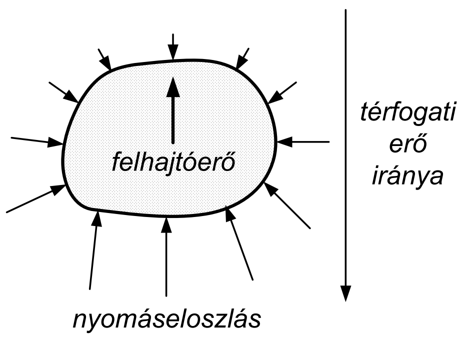
KÍSÉRLET:
Gömb alakú, függőleges tengely körül forgatható edénybe higanyt és festett vizet rétegezünk egymásra. Az edény nyugalmi helyzetében a higany helyezkedik el alul, hiszen a sűrűsége sokkal nagyobb, mint a vízé.
Ha az edényt megforgatjuk, akkor a higany az edény oldalához tapadva, övet képezve helyezkedik el, a víz pedig fölé rétegződik.



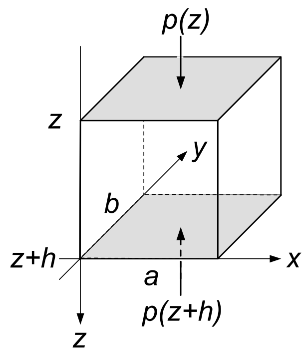
A forgatás után a centrifugális erő lép a nehézségi erő helyébe: a „lefelé” irány most sugárirányban kifelé mutat, ezért tapad a falhoz a higany, a víz pedig kisebb sűrűsége miatt „felette”, tehát a centrumhoz közelebb helyezkedik el. Ez a jelenség teszi lehetővé, hogy egy több összetevőt tartalmazó folyadékban a különböző sűrűségű összetevőket forgatással szétválasszuk. Az erre a célra készült eszközök a *centrifugák*.

Felhajtóerő és úszás

Mint láttuk, egy térfogati erő hatása alatt álló közegben hidrosztatikai nyomás lép fel, amely a térfogati erő irányában haladva a távolsággal arányosan nő. Ennek az a következménye, hogy a folyékony vagy gáznemű közegben elhelyezett szilárd testre a térfogati erővel ellentétes irányú erő lép fel. Mivel ennek a jelenségnek elsősorban a nehézségi erőtérben van jelentősége, ahol ez az erő „felfelé” mutat, *felhajtóerőnek* nevezik. A felhajtóerő létrejöttét szemlélteti vázlatosan a mellékelt ábra.



A felhajtóerő közvetlenül is megmérhető, de létezését meggyőzően mutatja többek között az a tapasztalati tény, hogy a nehézségi erő hatása alatt álló közegben egyes szilárd testek lebegnek vagy éppen emelkednek, folyadékok esetén pedig a folyadék felszínén úsznak.
Ha egy téglatest alakú hasábot úgy helyezünk el, hogy a hasáb 2 oldala a nehézségi erőre merőleges, akkor a felhajtóerő könnyen kiszámítható. Az alábbi ábrán a koordinátarendszert úgy vettük fel, hogy a *z*-tengely a nehézségi erő irányába mutat. Az oldallapokra ható nyomások egymást kiegyenlítik, ezért az eredő erőnek csak *z*-komponense van. Ha a hasáb teljesen bemerül a folyadékba, akkor ez az erő



$$F_z^{felh} = \left(p(z) - p(z+h)\right)ab .$$

Felhasználva a hidrosztatikai nyomásra korábban kapott összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$F_z^{felh} = \left(p_0 + \rho gz - (p_0 + \rho g(z+h))\right)ab =$$
$$= -\rho ghabg = -\rho Vg = -m_{folyadék}\, g ,$$

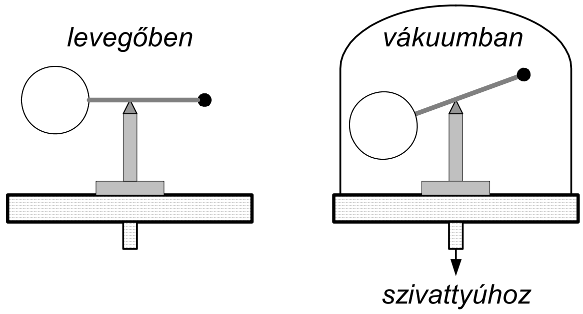
ahol p_0 a folyadékra kívülről ható nyomás, $V = abh$ a test térfogata, ρ pedig a folyadék sűrűsége. Eszerint a felfelé mutató felhajtóerő nagysága a *test térfogatával azonos térfogatú folyadék súlyával egyenlő*.
Ha a test csak részben merül be a folyadékba, akkor a felhajtóerő függ a bemerülés mértékétől. Ha az előbbi példában a test *h* magasságából csak h' magasságú rész merül a folyadékba, akkor a felső lapra ható, lefelé irányuló nyomás a folyadékra kívülről ható $p_{le} = p_0$ nyomás, az alsó lapra ható, felfelé irányuló nyomás pedig $p_{fel} = p_0 + \rho gh'$, így a felhajtóerő

$$F_z^{felh} = \left(p_0 - (p_0 + \rho gh')\right)ab = -\rho gh'ab = -\rho V'g = -m'_{folyadék}\, g .$$

Itt V' a test folyadékba merülő részének térfogata, $m'_{folyadék}$ az ezzel egyenlő térfogatú - folyadék tömege.
A felhajtóerő nagysága tehát a test folyadékba merülő részével egyenlő térfogatú – vagyis a test által kiszorított – folyadék súlyával egyenlő. Ez *Arkhimédész*[1] *törvénye*.

Felhajtóerő gázokban is hat egy testre, csak sokkal kisebb, mint folyadékban, hiszen a gázok sűrűsége csak töredéke a folyadékokénak. A felhajtóerő létezését igazolja például a hőlégballon működése vagy az alábbi látványos kísérlet.

KÍSÉRLET:
Levegőben kiegyenlített karos mérleg egyik karján egy nagy méretű üres üveggömb-, a másikon kisméretű rézgömb van (ábra). A mérleget egy szivattyú burája alá tesszük, és ott légritka teret hozunk létre. Ekkor a mérleg egyensúlya felborul: a kis rézgömb többé nem tud egyensúlyt tartani a nagy üveggömbbel, és felemelkedik, miközben az üveggömb lesüllyed.



A jelenség magyarázata az, hogy levegőben az egyes testekre ható súlyerőt lecsökkenti a felhajtóerő, az egyensúly tehát úgy jön létre, hogy a testekre a súly és a felhajtóerő

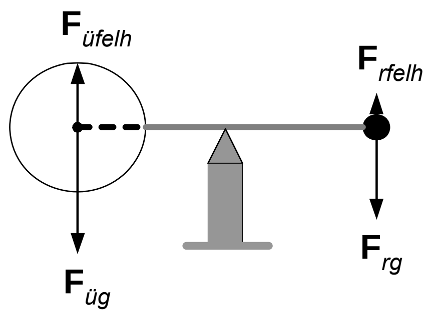
[1] ARKHIMÉDÉSZ (i.e. 287- i.e. 212) szirakúzai matematikus és fizikus

különbsége hat. Amikor a levegőt kiszivattyúzzuk, megszűnik a felhajtóerő, ami a két test esetében – a különböző térfogatok miatt – különböző, ezért az egyensúly megbomlik. Mivel a nagy méretű üveggömbre ható felhajtóerő nagyobb volt, mint a kis rézgömbre ható, megszűnése azt eredményezi, hogy az üveggömbre ható erő nagyobb lesz, tehát az üveggömb lesüllyed, a rézgömb felemelkedik.
Ehhez az eredményhez elméleti úton is eljuthatunk. A mérleg két karjának hosszát azonosnak feltételezve, az egyensúly feltétele az, hogy az egyes testekre ható erők nagysága azonos legyen. Az üveggömbre ható eredő erő levegőben

$$F_{üg} = F_{üg} - F_{üfelh} = F_{üg} - \rho_f V_{üg} g \ ,$$

a rézgömbre ható erő pedig

$$F_{rg} = F_{rg} - F_{rfelh} = F_{rg} - \rho_r V_{rg} g$$



(ρ_f a folyadék sűrűsége).
Az egyensúly feltétele az, hogy

$$F_{üg} = F_{rg} \ ,$$

azaz

$$F_{üg} - \rho_f V_{üg} g = F_{rg} - \rho_r V_{rg} g \ .$$

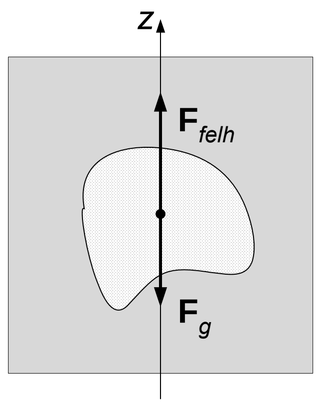
Ebből azt kapjuk, hogy

$$F_{üg} - F_{rg} = \rho_r g (V_{üg} - V_{rg}) \ .$$

Tudjuk, hogy $V_{üg} > V_{fg}$, amiből következik, hogy $F_{üg} > F_{rg}$, tehát a felhajtóerők nélkül az üveggömbre ható erő a nagyobb.

Nehézségi erőtérben a felhajtóerő a testre ható súlyerővel ellentétes irányú, ezért egy folyékony vagy légnemű közegbe merített szilárd test viselkedését ennek a két erőnek az eredője határozza meg. Ha koordinátarendszerünk z-tengelyét az erők egyenesében vesszük fel, és felfelé irányítjuk (ábra), akkor az eredő erő z-komponense

$$F_{e,z} = F_{felh} - F_g = \rho_f g V - \rho_{sz} g V = (\rho_f - \rho_{sz}) g V \ ,$$



ahol ρ_f a folyadék- ρ_{sz} a szilárd test sűrűsége, V pedig a szilárd test térfogata.
Ez azt jelenti, hogy a test felemelkedik, ha $\rho_{sz} < \rho_f$, lesüllyed, ha $\rho_{sz} > \rho_f$ és lebeg, ha $\rho_{sz} = \rho_f$.
Ha a szilárd test sűrűsége kisebb, mint a folyadéké, akkor a test kiemelkedik a folyadékból, és eközben csökken a rá ható felhajtóerő. A kiemelkedés addig folytatódik, amíg a felhajtóerő egyenlő lesz a test súlyával

$$F_{felh} = \rho_f g V' = F_g = \rho_{sz} g V \ ,$$

ahol V' a test folyadékba merülő részének térfogata.
Az egyensúly feltétele tehát

$$\rho_f V' = \rho_{sz} V \ ,$$

aminek teljesülése esetén *a test úszik* a folyadékban.
Az úszás teljes leírásához hozzátartozik annak meghatározása is, hogy az úszó test – a fenti feltétel teljesülése mellett – *milyen helyzetben* úszik. Az egyensúlyi helyzet elméleti meghatározása – különösen bonyolultabb alakú test esetén – általában eléggé nehéz feladat, ezzel itt nem foglalkozunk.