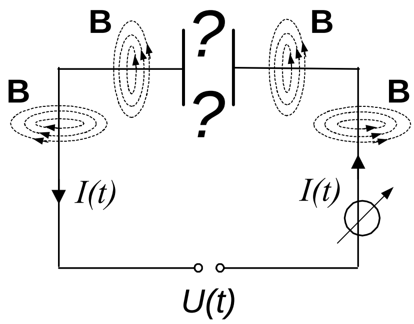
Időben változó elektromos erőtér, az eltolási áram

Ha az ábrán látható, kondenzátort tartalmazó áramkörbe időben változó feszültségű áramforrást kapcsolunk, akkor az árammérő áramot mutat, annak ellenére, hogy az áramkör nem zárt (a kondenzátor lemezei között nincs vezető). Ennek az az oka, hogy a kondenzátorra kapcsolt feszültség változása a rajta lévő töltés megváltozásával jár, vagyis a kondenzátorba befolyó illetve onnan kifolyó töltések áramlását észleljük. Mivel a vezető szakaszokon áram folyik, természetesnek tűnik, hogy a vezető körül mindenütt kialakul egy mágneses erőtér, amely időben változik, de az indukcióvonalak a szokásos képet mutatják (ábra). Felmerül a kérdés, hogy van-e ilyen mágneses erőtér a kondenzátor lemezei között.



A tapasztalat azt mutatja, hogy a lemezek közötti térrészben ugyanolyan jellegű mágneses erőtér jön létre, mint a vezető körül, annak ellenére, hogy itt nyilvánvalóan nem folyhat szokásos értelemben vett elektromos áram (nincsenek töltéshordozók). Ha viszont nincs elektromos áram, akkor vajon mi kelti a mágneses erőteret?

Ha a létrejött mágneses erőteret vizsgáljuk, akkor úgy látszik, mintha az áramkör mégis zárt lenne, hiszen a mágneses erőtér mindenütt megjelenik. A lemezek közötti térrészben tehát kell lenni valamilyen mechanizmusnak, amely ugyanolyan hatást kelt, mint a valódi áram. Ezzel kapcsolatban két fontos megállapítást tehetünk:

- Az egyetlen dolog, ami a lemezek között történik, az az elektromos erőtér változása, vagyis a jelenségnek ezzel kell kapcsolatban állnia.
- Az elektromos erőtér változásának oka az, hogy a kondenzátor lemezein változik az elektromos töltés. Mivel a lemezeken lévő töltés változása szoros kapcsolatban áll a vezetőben létrejött árammal, lehetőség nyílik arra, hogy „kitaláljuk” a lemezek közötti térben létrejött „áramot” formálisan megadó összefüggést.

Számítsuk ki az elektromos erőtér változása és a vezetőben folyó áram közötti összefüggést egy egyszerű modell-áramkör segítségével, amelybe egy síkkondenzátort kapcsoltunk be.

A vezetőben folyó áram és a kondenzátor töltésének változása között fennáll az

$$I_{vez} = \frac{dQ_{vez}}{dt} = \frac{dQ_C}{dt}$$

összefüggés, hiszen a vezető egy keresztmetszetén dt idő alatt az a $dQ_{vez} = dQ_C$ töltés folyik át, ami a kondenzátor lemezére áramlott (vagy onnan eltávozott).

A vezetőben folyó áram a fenti összefüggés segítségével kifejezhető a kondenzátor lemezein lévő $\sigma = \frac{Q_C}{A}$ töltéssűrűséggel (A a lemezek felülete):

$$I_{vez} = \frac{dQ_C}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} A$$

Másrészt tudjuk, hogy homogén, izotróp, lineáris dielektrikummal kitöltött síkkondenzátorban az elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Ezzel a vezetőben folyó áram az

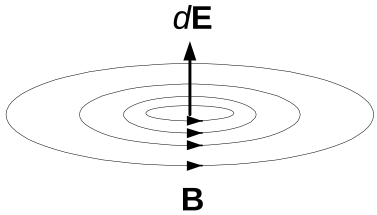
$$I_{vez} = \frac{d\sigma}{dt} A = \varepsilon \frac{dE}{dt} A$$

alakba írható.
Ha a kondenzátor mágneses erőterére vonatkozó tapasztalatunk alapján feltételezzük, hogy a kondenzátort tartalmazó áramkör is zárt, akkor a lemezek közötti térrészben ugyanekkora „áramot" kell feltételeznünk. A fenti kifejezés ennek az „áramnak" a megadására alkalmasnak látszik, mert – azon kívül, hogy a kívánt nagyságú áramot adja – a lemezek közötti térrészben bekövetkező térerősség-változással van kapcsolatban. Az így bevezetetett – nem töltésmozgással kapcsolatos – áramot történeti okok miatt *eltolási áramnak* nevezik, amit az

$$I_{elt} = I_{vez} = \varepsilon \frac{dE}{dt} A$$

összefüggéssel adhatunk meg.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az itt tárgyalt jelenség és a kapott összefüggés nem csak síkkondenzátort tartalmazó áramkörben igaz, hanem általánosabban is: a változó elektromos erőtér olyan hatást fejt ki, mint az elektromos áram, vagyis *ha valahol változik az elektromos térerősség, akkor ott mágneses erőtér jön létre*, amelynek indukcióvonalai a térerősség változását megadó vektort úgy veszik körül, mint a valódi elektromos áramot az általa keltett indukcióvonalak. Az elektromos térerősség változása és az indukcióvonalak iránya közötti összefüggés sematikusan az ábrán látható.



Az eltolási áram létezése azt jelenti, hogy az elektromos- és mágneses erőtér egyfajta szimmetriát mutat: a *mágneses erőtér változása elektromos erőteret-, az elektromos erőtér változása mágneses erőteret kelt*. Ez a szimmetria teszi lehetővé, hogy egy elektromos vagy mágneses zavar (erőtér-változás) a térben tovaterjedjen, és *elektromágneses hullám* jöjjön létre.

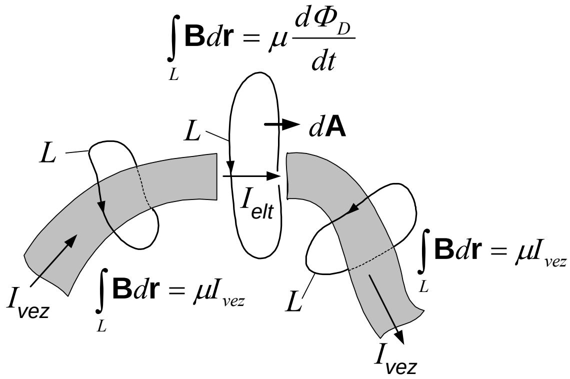
Az eltolási áramra kapott kifejezés általánosabb alakba is írható, ha figyelembe vesszük, hogy abban az elektromos térerősség fluxusának $d\Phi_E = AdE$ megváltozása szerepel:

$$I_{elt} = \varepsilon \frac{dE}{dt} A = \varepsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}\right).$$

A kifejezés tovább egyszerűsíthető, ha bevezetjük az elektromos eltolás vektorát a homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokra érvényes $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ összefüggéssel. Ekkor az eltolási áramra azt kapjuk, hogy

$$I_{elt} = \frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{D} d\mathbf{A}\right) = \frac{d\Phi_D}{dt}.$$

Vagyis az eltolási áram az eltolási vektor fluxusának változási sebességével adható meg. (Az eltolási áram elnevezés egyébként éppen innen származik.) A tapasztalat szerint ez az összefüggés nem csak az itt feltételezett egyszerűsítő feltevések esetén használható, hanem általában is érvényes.



Az eltolási áram bevezetésével a hagyományos értelmezés szerint megszakítottnak számító áramkörök is zártaknak tekinthetők, és a gerjesztési törvény egy áramkör tetszőleges helyén (a

megszakításnál is) eredeti alakjában érvényes, ha ott a törvényben áramként az eltolási áramot írjuk be (ábra).
A fenti kifejezés egyébként irány szerint is helyesen adja meg az áramot. Ha a gerjesztési törvényben a zárt görbék körüljárását az ábrán látható módon választjuk meg, akkor az I_{vez} áramok pozitívnak számítanak. Ha az eltolási vektor fluxusának számításakor a felületvektort most is a Faraday–Lenz-törvénynél alkalmazott megállapodás szerint irányítjuk, akkor az elemi $d\mathbf{A}$ felületvektorok az A felületen jobbra mutatnak. Mivel a kondenzátor baloldali lemezére pozitív töltések érkeznek, az eltolási vektor $d\mathbf{D}$ megváltozása is jobbra mutat, vagyis $d\mathbf{A}d\mathbf{D} > 0$. Ebből következik, hogy az eltolási vektor fluxusának változása: $d\Phi_D > 0$, ezért az I_{elt} eltolási áram is pozitív.

Mivel a kétféle áram együtt is felléphet, a gerjesztési törvény általános alakja

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{r} = \mu\left(I_{vez} + I_{elt}\right) \underset{elt}{=} \mu I_{vez} + \mu\frac{d\Phi_D}{dt}.$$

Itt I_{vez} az L zárt hurok által körülölelt áramok előjeles összege, I_{elt} pedig az elektromos erőtér változása miatt esetleg fellépő eltolási áramot jelenti.
Ha bevezetjük a $\mathbf{H}$ mágneses térerősséget (homogén, izotróp, lineáris anyagokban $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$), akkor a törvény a

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{r} = I_{vez} + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

alakot ölti. A gerjesztési törvénynek ez az alakja nem csak az itt feltételezett egyszerűsítések esetén, hanem általában is érvényes.
Ha az áramerősséget az áramsűrűséggel fejezzük ki, akkor a gerjesztési törvény újabb alakját kapjuk:

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{r} = \int_A \mathbf{j}_{vez}d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{D}d\mathbf{A}\right).$$

Ha az L hurok időben állandó alakú, akkor az integrálás és a differenciálás sorrendje felcserélhető, és az integrálok összevonhatók. Ekkor a törvényt a

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{r} = \int_A \left(\mathbf{j}_{vez} + \frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)d\mathbf{A}$$

alakba írhatjuk.
Látható, hogy az eltolási áram sűrűsége a

$$\mathbf{j}_{elt} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

összefüggéssel adható meg, amivel a gerjesztési törvény a

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{r} = \int_A \left(\mathbf{j}_{vez} + \mathbf{j}_{elt}\right)d\mathbf{A}$$

alakba is írható.

**************** ****************** *********************

Ha figyelembe vesszük az elektromos eltolás

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}_e$$

definíciós egyenletét, akkor az eltolási áramsűrűség a

$$\mathbf{j}_{elt} = \varepsilon_0\frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_e}{dt}$$

alakba írható. Ez azt jelenti, hogy az eltolási áram létrejöttében szerepet játszik a jelenlévő anyag is, hiszen a polarizáció változása is eltolási áramot okoz és mágneses erőteret kelt. Ezt az áramot *polarizációs áramnak* nevezik.

**************** ****************** *********************

Az elektromágnességtan alapegyenletei integrális alakban (Maxwell-egyenletek)

Az elektromos és mágneses erőtér vizsgálata során kiderült, hogy a két erőtér egymással igen szoros kapcsolatban áll (mindkettőt elektromos töltések hozzák létre, egyik erőtér változása létrehozza a másikat), ezért a két erőteret *elektromágneses erőtérnek*, a velük kapcsolatos jelenségeket *elektromágneses jelenségeknek*-, az ezeket vizsgáló tudományterületet pedig *elektromágnességtannak* nevezik.
Az elektromágneses erőtér jellemzésére különböző térmennyiségeket ($\mathbf{E}$, $\mathbf{P}_e$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{H}$) vezettünk be, és az elektromágneses erőtér különböző megnyilvánulásait általános törvények alakjában foglaltuk össze. Ezek az általános törvények, amelyeket kidolgozójuk, J. C. Maxwell tiszteletére *Maxwell-egyenleteknek* neveznek, az összes elektromágneses jelenséget leírják, az elektromágneses térre vonatkozó összes speciális törvény (pl. Coulomb-törvény, Biot–Savart-törvény) ezekből levezethető.
Most – egyelőre integrális alakjukban – összefoglaljuk a Maxwell-egyenleteket és a hozzájuk csatlakozó kiegészítő összefüggéseket.

Az egyenletek felírásánál először csak az $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, és a $\mathbf{P}_e$, $\mathbf{P}_m$ mennyiségeket alkalmazzuk, és nem vezetjük be a elektromos eltolást és a mágneses térerősséget.

I. $\boxed{\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$ vagy részletezve $\boxed{\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}\right)}$

(Itt *A* az *L* zárt hurok által bezárt felületet jelenti)

Ez az egyenlet egyrészt azt fejezi ki, hogy a mágneses indukcióvektor fluxusának változása – az elektromágneses indukció – olyan indukált elektromos erőteret hoz létre, amely nem konzervatív.

Megjegyzés:
A $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r}$ mennyiséget az $\mathbf{E}$ erőtér örvényerősségének nevezik. Ha ez nulla, akkor az erőteret örvénymentesnek-, ha nem nulla, akkor örvényesnek nevezik. Az elnevezés azzal függ össze, hogy – amint kimutatható – örvényes erőtérben az erővonalak lehetnek zárt hurkok, az örvénymentes erőtérben viszont ez nem lehetséges.
Az örvényerősség fogalmát felhasználva azt mondhatjuk, hogy az indukált elektromos erőtér örvényes, erővonalai lehetnek zárt hurkok (és tapasztalatból tudjuk, hogy valóban azok).

Másrészt abban a speciális esetben, amikor a térmennyiségek időben állandóak, az egyenlet jobboldalán nulla áll: $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0$, vagyis visszakapjuk az elektrosztatika *I.* alaptörvényét. Ilyenkor az erőteret elektromos töltések hozzák létre, és ez a sztatikus elektromos erőtér konzervatív és örvénymentes, vagyis erővonalai – a tapasztalattal összhangban – nem lehetnek önmagukba záródó vonalak. Az *I.* törvény akkor is igaz, ha egyidejűleg mindkét fajta elektromos erőtér jelen van.

******************** ********************** ********************

$$II. \quad \boxed{\oint_A \mathbf{E}\,d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_A \mathbf{P}_e\,d\mathbf{A}} \text{ vagy részletezve } \boxed{\oint_A \mathbf{E}\,d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_A \mathbf{P}_e\,d\mathbf{A}}$$

(Itt *V* az *A* zárt felület által bezárt térfogatot jelenti)

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a töltések által keltett elektromos erőtér térerősségvonalai töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek. Ezek a töltések lehetnek szabad töltések (Q), vagy polarizációs töltések, amelyeknek járulékát az egyenlet jobboldalán álló – a $\mathbf{P}_e$ elektromos polarizáció vektor által meghatározott – második tag adja meg.

Megjegyzés:

A $\oint_A \mathbf{E}\,d\mathbf{A}$ mennyiséget az elektromos erőtér forráserősségének nevezik. Ha ez nulla, akkor az erőteret forrásmentesnek-, ha nem nulla, akkor forrásosnak nevezik. Kimutatható, hogy forrásos erőtérben az erőtér vonalai valahol kezdődnek vagy végződnek, forrásmentes erőtérben viszont nincs kezdő- és végpontjuk, lehetnek pl. önmagukba záródóak.

A forráserősség fogalmát használva a töltések által keltett elektromos erőtér forrásos.

Ebben az egyenletben nem jelenik meg az elektromágneses indukció által keltett, indukált elektromos erőtér, hiszen töltések hiányában $\oint_A \mathbf{E}\,d\mathbf{A} = 0$. Ez azt jelenti, hogy az indukált erőtér erővonalai nem kezdődnek és nem végződnek sehol. Az *I.* törvényt is figyelembe véve, levonható az a következtetés, hogy az indukált elektromos erőtér erővonalai önmagukba záródnak.

A szokásos elnevezést használva, az elektromágneses indukció által keltett, indukált elektromos erőtér örvényes és forrásmentes.

******************** ********************** ********************

$$III. \quad \boxed{\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{r} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \mathbf{P}_m\,d\mathbf{r} + \mu_0 \frac{d}{dt}\int_A (\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}_e)\,d\mathbf{A}}$$

vagy részletezve

$$\boxed{\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{r} = \mu_0 \int_A \mathbf{j}\,d\mathbf{A} + \mu_0 \oint_L \mathbf{P}_m\,d\mathbf{r} + \mu_0 \frac{d}{dt}\int_A (\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}_e)\,d\mathbf{A}}$$

(Itt *A* az *L* zárt görbe által határolt felületet jelenti)

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a mágneses indukcióvektor a valódi áramokkal, a mágneses dipólusokkal, az elektromos térerősség- és az elektromos polarizáció fluxusának változásával hozható összefüggésbe, az indukcióvonalak lehetnek zárt hurkok (tapasztalatból tudjuk, hogy tényleg azok). Fontos része a törvénynek, hogy tükrözi azt a tapasztalatot is, hogy az elektromos erőtér változása mágneses erőteret hoz létre.

Az örvényerősség fogalmát használva azt mondhatjuk, hogy a mágneses erőtér örvényes.

******************** ********************** ********************

$$IV. \quad \boxed{\oint_A \mathbf{B}\,d\mathbf{A} = 0}$$

Ez a törvény azt mutatja, hogy az indukcióvonalak sehol nem kezdődhetnek vagy végződhetnek. A *III.* törvénnyel együtt ez azt jelenti, hogy csak önmagukba záródhatnak, ami egybevág a tapasztalatokkal.

Az örvényerősség és forráserősség fogalmát használva azt mondhatjuk, hogy a mágneses erőtér örvényes és forrásmentes.

Ha bevezetünk két újabb térmennyiséget, akkor a Maxwell-egyenletek egyszerűbb – és sok esetben praktikusabb – formába írhatók át. Fontos azonban tudnunk, hogy az egyenletek enélkül is teljes értékűek, az új mennyiségek bevezetése nem kötelező, csak sokszor előnyös.
A két új térmennyiség az elektromos eltolás- (**D**) és a mágneses térerősség (**H**) vektora, amelyeknek definíciós egyenletei, az ún. anyagi egyenletek az alábbiak:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{P}_m).$$

Ezekkel a Maxwell-egyenletek a következő alakot öltik:

$$I. \qquad \boxed{\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}\right)}$$

$$II. \qquad \boxed{\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q}$$

$$III. \qquad \boxed{\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{r} = I + \frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{D} d\mathbf{A}\right)}$$

$$IV. \qquad \boxed{\oint_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0}$$

Ezekből az egyenletekből kiderülnek a két új térmennyiség sajátságai:

- Az eltolási vektor forrásai a Q valódi töltések, az anyag jelenlétében megjelenő elektromos dipólusok viszont nem hoznak létre elektromos eltolást.
- A mágneses térerősség az I valódi áramoktól vagy az elektromos eltolás fluxusának változásából származhat, de az anyag jelenlétében megjelenő mágneses dipólusok nem hoznak létre mágneses térerősséget.

A **D** és **H** bevezetésének éppen az az előnye, hogy *közvetlenül* egyiket sem befolyásolja az anyag jelenléte[1].

Homogén, izotróp, lineáris anyag esetén az anyagi egyenletek egyszerűsödnek:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}.$$

---

[1] A vizsgált térrésznek anyaggal való kitöltése *közvetlenül* valóban nem változtatja meg a **D** és **H** vektorokat, de azok mégis megváltozhatnak, ha az elrendezés olyan, hogy az anyag megjelenése a valódi töltéseket illetve a valódi áramokat megváltoztatja.
A **D** illetve **H** vektorok csak bizonyos, speciális elrendezésekben maradnak változatlanok az anyaggal való kitöltés során. Ez a helyzet pl. akkor, ha egy ideális síkkondenzátort illetve ideális tekercset homogén, izotróp anyaggal töltünk ki (mint tudjuk, **E** és **B** ezekben az esetekben is függ a teret kitöltő anyagtól).

Ezzel a Maxwell-egyenletek is egyszerűbbé válnak, mert az anyag jelenlétének hatását a $\mathbf{P}_e$ és $\mathbf{P}_m$ vektorok helyett az ε_r és μ_r anyagállandókkal vesszük figyelembe. Ha az egyenleteknek csak az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ vektorokat tartalmazó alakját használjuk, akkor ebben az esetben azt kapjuk, hogy

I. $$\boxed{\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}\right)}$$

II. $$\boxed{\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho dV}$$

III. $$\boxed{\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu \int_A \mathbf{j} d\mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{d}{dt}\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A}}$$

IV. $$\boxed{\oint_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0}$$

Az egyenletek tovább egyszerűsíthetők, ha csak vezetési áramok vannak. Ilyenkor az áramsűrűség is kifejezhető az elektromos térerősséggel, ha felhasználjuk a

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

anyagi egyenletet.