

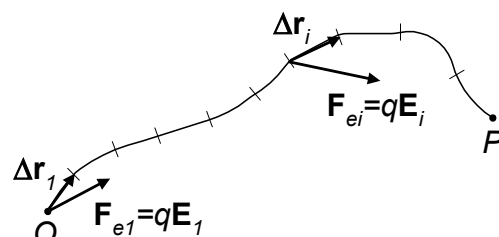
## Elektromos töltés helyzeti energiája, elektromos potenciál, az elektrosztatika I. alaptörvénye

A mechanikában láttuk, hogy konzervatív erőterben helyzeti energia vezethető be. Azt a kérdést, hogy az elektrosztatikus erőter konzervatív vagy nem, csak a tapasztalat segítségével lehet eldönteni. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az elektrosztatikus erőter konzervatív, tehát egy elektromos töltésnek az elektromos erőterben helyzeti energiája van.

A helyzeti energiát itt is a mechanikában definiált módon, az erőter által végzett munka segítségével adjuk meg, amely konzervatív erőterben nem függ az elmozduló töltés pályájától, csak az elmozdulás kezdő- és végpontjától.

Elektromos erőterben egy  $q$  töltésnek az  $O$  pontból a  $P$  pontba történő tetszőleges pályán történő elmozdulása során (ábra) az erőter által végzett munka:

$$W_{\text{erőter}} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{F}_{ei} \Delta \mathbf{r}_i = \int_O^P \mathbf{F}_e \mathbf{dr} = q \int_O^P \mathbf{E} \mathbf{dr} .$$



A helyzeti energia definíciójának megfelelően az erőterben lévő  $q$  töltés helyzeti (potenciális) energiája a  $P$  pontban, az  $O$  pontra vonatkozóan:

$$E_h^O(P) = -W_{\text{erőter}} = -q \int_O^P \mathbf{E} \mathbf{dr} .$$

Mint említettük, a két pont közötti elmozdulás pályáját nem kell megadni, hiszen ez a munka konzervatív erőterben nem függ a pályától. Mint minden helyzeti energia, egy töltés elektrosztatikus helyzeti energiája is függ a vonatkoztatási ponttól.

A  $q$  töltés helyzeti energiája nem csak a helytől és a jelenlévő erőterétől függ, hanem – érthető módon – magától a töltéstől is. A helyzeti energia azonban *arányos* a töltéssel, ezért, ha a helyzeti energiát elosztjuk a töltéssel, akkor a töltéstől független mennyiséget kapunk:

$$U^O(P) = U_{OP} = \frac{E_h^O(P)}{q} = - \int_O^P \mathbf{E} \mathbf{dr} .$$

Ez a mennyiség már csak az erőterétől és a  $P$  pontnak az  $O$  vonatkoztatási ponthoz viszonyított helyzetétől függ. Ezzel az eljárással tehát az erőter bármely  $P$  pontjához hozzárendelhetünk egy skaláris mennyiséget (számszerűleg az egységnyi töltésen az  $OP$  elmozdulás során végzett munkát), amelyet az *elektrosztatikus tér  $P$  pontbeli potenciáljának* nevezünk. Ilyen módon a töltéssel való osztás révén a töltés egy jellemző adatából, a helyzeti energiából, a tér egy jellemző adatát, a potenciált kapjuk.

A potenciál – hasonlóan a helyzeti energiához – mindig egy vonatkoztatási ponthoz (itt az  $O$  ponthoz) viszonyított mennyiség. Ez azonban rendszerint nem okoz nehézségeket, mert egy fizikai probléma megoldása során általában nem a helyzeti energia és a potenciál abszolút értékére van szükségünk, hanem azok megváltozására (két pontban felvett értékeik különbségére), ami viszont nem függ a vonatkoztatási ponttól, amint azt a helyzeti energiára vonatkozóan a mechanikában már kimutattuk. Bár ez az állítás nyilvánvalóan a potenciálra is igaz (a két mennyiség csupán egy állandó szorzóban különbözik egymástól), példaként itt most a potenciálra vonatkozó bizonyítást is megadjuk.

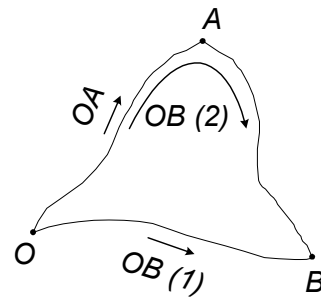
Két pont között a potenciálkülönbséget úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk az egyes pontokban a közös vonatkoztatási ponthoz viszonyított potenciált, majd kiszámítjuk ezek

különbségét. Az ábrán látható B pontnak az A ponthoz viszonyított  $U_{AB}$  potenciálkülönbségét az

$$U_{AB} = U_{OB(1)} - U_{OA} = U_{OB(2)} - U_{OA}$$

kifejezés, illetve a potenciál definíciójának felhasználásával kapott

$$\begin{aligned} U_{AB} &= -\left(\int_O^A \mathbf{E}dr + \int_A^B \mathbf{E}dr\right) - \left(-\int_O^A \mathbf{E}dr\right) = \\ &= -\int_O^A \mathbf{E}dr - \int_A^B \mathbf{E}dr + \int_O^A \mathbf{E}dr = -\int_A^B \mathbf{E}dr \end{aligned}$$



összefüggés adja meg.

Ennek megfelelően egy elemi  $dr$  elmozdulás kezdő- és végpontja közti potenciálkülönbséget a

$$dU = -\mathbf{E}dr$$

skaláris szorzat adja meg.

A mechanikában láttuk, hogy a konzervatív erőternek az a sajátja, hogy munkája független a pályától, úgy is megfogalmazható, hogy egy zárt  $L$  görbén körbejárva, a végzett összes munka nulla. Esetünkben ez azt jelenti, hogy elektrosztatikus erőterben egy  $q$  töltést egy zárt  $L$  görbén körbemozgatva, a tér által végzett összes munka nulla lesz:

$$q \oint_L \mathbf{E}dr = 0.$$

Ebből következik, hogy a zárt görbe mentén a potenciálkülönbségeket összegezzük, akkor szintén nullát kapunk:

$$\oint_L \mathbf{E}dr = 0$$

Ezt az összefüggést gyakran az *elektrosztatika I. törvényének* nevezik, ami tehát azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér konzervatív.

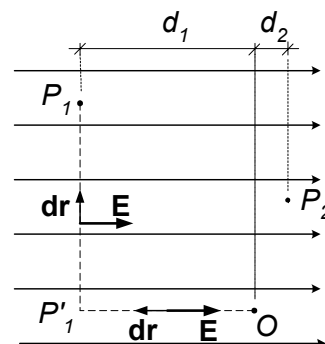
Ebből a törvényből következik, hogy az elektrosztatikus tér erővonalai nem lehetnek akármilyenek. Például nem lehetségesek önmagukban záródó erővonalhurkok, mert ha zárt görbéként egy ilyen erővonalhurkot választunk, akkor erre kiszámítva a fenti körintegrált, biztosan nullától különböző eredményt kapunk. Ennek az az oka, hogy ilyenkor a térerősség és az elmozdulás a görbe minden pontján egyirányú vagy ellentétes irányú egymással, ezért az  $\mathbf{E}dr$  elemi skaláris szorzatok vagy mind negatívak vagy mind pozitívak, így összegük nem lehet nulla.

### Potenciál konkrét erőterekben

Most néhány egyszerű esetben bemutatjuk a potenciál kiszámításának módját.

#### Potenciál homogén erőterben

A legegyszerűbb, ezért bonyolultabb erőterek közelítéseként gyakran használt erőter a homogén erőter, amelyben a térerősség mindenütt ugyanolyan nagyságú és irányú. Az erőteret egyenletes sűrűségű párhuzamos erővonalakkal szemléltethetjük (ábra). Homogén erőterben a potenciális energia és a potenciál meghatározása viszonylag egyszerű. Így például az ábrán látható homogén elektromos



erőterben egy pozitív  $q$  elektromos töltés helyzeti energiája a  $P_1$  pontban ( $E_h^O(P_1)$ ), illetve az elektromos potenciál a tér ugyanezen pontjában az  $O$  ponthoz viszonyítva ( $U_O(P_1)$ ) az alábbi módon kapható meg:

$$E_h^O(P_1) = -q \int_O^{P_1} \mathbf{E} d\mathbf{r} = qEd_1.$$

illetve

$$U^O(P_1) = \frac{E_h^O(P_1)}{q} = Ed_1.$$

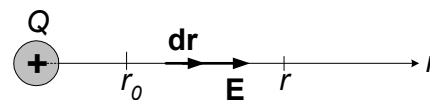
(Az integrálásnál, felhasználtuk, hogy a tér munkavégzése nem függ a választott útvonaltól, ezért egy célszerű útvonalat választottunk, ahol a munka az  $OP'_1$  szakaszon nulla, hiszen itt  $\mathbf{E} \perp d\mathbf{r}$ .)

Mint látható, homogén térben a potenciál és a helyzeti energia is csak attól függ, hogy a vizsgált pont és a vonatkoztatási pont egymástól mért távolságának a térerősséggel párhuzamos vetülete ( $d_1$ ) mekkora. Az ábrán bejelölt  $P_2$  pontban természetesen mind a helyzeti energia, mind pedig a potenciál negatív:

$$E_h^O(P_2) = -qEd_2, \text{ illetve } U^O(P_2) = -Ed_2.$$

### Ponttöltés potenciálja

A potenciál (illetve helyzeti energia) a térerősség integrálásával kapható meg. Következő példaként (ábra) számítsuk ki egy pozitív  $Q$  ponttöltés által létrehozott elektromos erőterben a potenciált a ponttöltéstől mért  $r$  távolság függvényében.



Ha a potenciál vonatkoztatási pontját az  $r = r_0$  pontban vesszük fel, akkor, felhasználva a ponttöltés erőterére vonatkozó ismereteinket, a potenciál definíciója alapján írhatjuk

$$U^{r_0}(r) = -\int_{r_0}^r \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_{r_0}^r E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr.$$

Az integrálás eredménye:

$$U^{r_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Ha vonatkoztatási helyként a ponttöltéstől végtelen távoli pontot ( $r_0 \Rightarrow \text{végtelen}$ ) választunk, akkor a leggyakrabban használt

$$U^\infty(r) = U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

alakot kapjuk (ennek jelölésére általában a külön index nélküli  $U$  használatos). Látható, hogy ezzel a választással egyben a potenciál nulla pontját is a végtelen távoli pontban vettük fel.

Két tetszőleges pont ( $r_1$  és  $r_2$ ) közötti potenciálkülönbség a fentiek alapján:

$$\Delta U_{12} = U(r_2) - U(r_1) = U_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

ahol alkalmaztuk a szokásos  $\Delta U_{12} = U_{12}$  jelölést. A potenciálkülönbség – a várakozásnak megfelelően – nem függ a vonatkoztatási pont választásától.

Gyakran fontos ismerni egy elektromos térben a potenciálviszonyokat, vagyis azt, hogy a potenciál milyen irányban változik, és milyen ütemben. Ezt szemléletes módon lehet bemutatni azoknak a felületeknek a berajzolásával, amelyek mentén

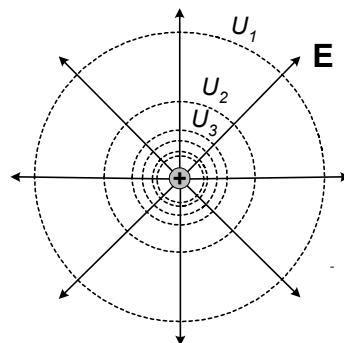
mozogva a potenciál állandó. Ezek az *ekvipotenciális felületek*, amelyek – a potenciál definíciójából következően – a térerősségvonalakra mindenütt merőlegesek. Ha ezeket úgy rajzoljuk be, hogy a szomszédos felületek potenciálkülönbsége meghatározott érték, akkor az ábráról a potenciál nagyságának helyfüggését is leolvashatjuk (hasonlóan, ahogy a térkép szintvonalairól a magasság változásait).

Ponttöltés esetén a fenti egyenletből könnyen megkaphatjuk az ekvipotenciális felületek egyenletét:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = U_n,$$

ahol  $U_n$  különböző potenciálértékeket jelöl, amelyeket az  $n$  sorszámmal különböztethetünk meg. Az egyenletből következik, hogy az  $U_n$  potenciálértékekhez tartozó ekvipotenciális felületek gömbök (ábra), amelyeknek sugara

$$r_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 U_n}.$$



Az ábrán az egyes potenciálértékek között ugyanakkora a különbség (a potenciálok értéke rendre 1, 2, 3, ... *egység*). A szintvonalak szemléletesen is mutatják, hogy a töltéshez közeledve a potenciál értéke egyre meredekebben emelkedik (az azonos potenciálkülönbségű görbék sűrűsödnek).

Több ponttöltés együttes erőterében a potenciál kiszámítása egyszerű, ha feltételezzük, hogy a szuperpozíció elve érvényes. Ekkor az egyes töltések által az adott helyen (pl. egy  $P$  pontban) létrehozott potenciálokat egyszerűen összeadjuk (a potenciál skaláris mennyiség):

$$U(P) = \sum_i U_i(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i},$$

ahol  $Q_i$  az  $i$ -edik ponttöltés töltése (előjelesen),  $r_i$  a távolsága a  $P$  ponttól.

\*\*\*\*\*

### Folytonos töltéeloszlás potenciálja

Egy  $V$  térfogatban folytonosan eloszló töltés potenciálját a Gauss-törvény tárgyalásánál megismert módon, a töltésnek pontszerű részekre történő osztásával kaphatjuk meg. Ha a  $\rho$  térfogati töltéssűrűséget mindenütt ismerjük, akkor egy  $P$  pont körül felvett elemi  $dV$  térfogatban lévő töltést ki tudjuk számítani a  $dQ = \rho dV$  összefüggéssel. A pontszerűnek tekintett elemi résztöltések által létrehozott potenciál ennek alapján:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r},$$

ahol  $r$  a  $dV$  térfogatelem a távolsága a  $P$  ponttól.

Hasonló módon járunk el, ha a töltés egy  $A$  felületen oszlik el folytonosan, és a felület minden pontjában ismerjük a  $\sigma$  *felületi töltéssűrűséget*. Ennek definíciója a következő: ha egy elemi  $\Delta A$  felületen  $\Delta Q$  töltés van, akkor ott a felületi töltéssűrűség közelítő értéke  $\sigma \approx \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ . A felületi töltéssűrűség egy pontban érvényes értékét úgy kapjuk meg, hogy a pont körül felvett felületet egyre csökkentjük, és meghatározzuk a  $\sigma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$  határértéket. Ez az adott pontban a felületi töltéssűrűség, amely előjeles mennyiség, előjele az adott helyen lévő töltés előjelével egyezik meg.

Ha az  $A$  felületet elemi  $dA$  részekre osztjuk, akkor az egyes felületelemeken lévő, pontszerűnek tekinthető töltés:  $dQ = \sigma dA$ , így a felületen elhelyezkedő töltés által okozott potenciál egy  $P$  pontban

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma dA}{r},$$

ahol  $r$  a  $dA$  felületelem a távolsága a  $P$  ponttól.

\*\*\*\*\*

### Töltés elhelyezkedése vezetón, töltött vezető potenciálja

Az elektromos kölcsönhatás kísérleti vizsgálata során láttuk, hogy egy vezetőre töltést tudunk felvinni, és ez a töltés a vezetõben mozogni tud. Mivel az azonos elõjelû töltések egymást taszítják, a töltések a vezetõn várhatóan egymástól távol próbálnak elhelyezkedni.

#### KÍSÉRLET:

Töltés elhelyezkedését vizsgáljuk vezetõn. Vezetõként belül üres fémgömböt illetve fémhengert használunk, a töltés jelenlétének vizsgálatára szolgáló eszköz egy kisméretû, szigetelt nyílra szerelt fémgolyó és egy elektrométer.

- ◆ A belül üres fémgömböt feltöltjük, majd a fémgolyóval kívülrõl megérintjük. Ekkor a golyó feltehetőleg töltötté vált, amit úgy ellenõrzünk, hogy az elektrométerhez érintjük. Az elektrométer valóban töltést mutat, vagyis a fémgömb külsõ felületén van töltés.
- ◆ A fémgolyót egy nyíláson keresztül a feltöltött, üres fémgömb belsõ felületéhez, majd az elektrométerhez érintjük. Az elektrométer nem mutat töltést: a feltöltött vezetõ gömb belsejében nincs töltés.
- ◆ A gömböt a nyíláson keresztül belülrõl töltjük fel. A fenti kísérletek eredménye most is ugyanaz: a töltés ekkor is a vezetõ gömb külsõ felületére megy.
- ◆ Fémhenger belsõ és külsõ felületére is bodzabél elektroszkópot helyezünk el. Akárhol viszünk fel töltést a hengerre, mindig csak a külsõ felületre szerelt elektroszkóp mutat töltést.

A kísérletekbõl világosan kiderül, hogy a vezetõn a töltések valóban egymástól a lehető legnagyobb távolságban, *a vezetõ külsõ felületén helyezkednek el.*

A kísérletek szerint egy vezetõre felvitt töltések igen rövid idõ alatt egyensúlyi állapotba kerülnek, és nem mozognak tovább. Ebbõl a tapasztalatból további megállapításokra juthatunk.

- ◆ *Egyensúlyi állapotban egy vezetõ belsejében nem lehet elektromos erõtér.* Ez azért van így, mert, ha lenne elektromos erõtér, akkor annak hatására a töltések mozognának, így nem lehetne egyensúly. Ezért, ha egy vezetõben (pl. a feltöltése pillanatában) elektromos erõtér alakul ki, akkor a töltések addig mozognak, amíg olyan töltéeloszlás jön létre, ami a vezetõben megszünteti az elektromos erõtérrel. Ez akkor is igaz, ha a vezetõt nem töltjük fel, hanem elektromos térbe helyezzük, ami a benne lévõ töltéseket megosztja. Ilyenkor a megosztott töltések elhelyezkedése lesz olyan, hogy a vezetõ belsejében nem lesz elektromos erõtér. Ez azt jelenti, hogy ha egy fémdobozt idõben állandó elektromos erõtérbe teszünk, akkor a belsejében nem lesz elektromos erõtér. A szokásos kifejezést használva: a fémdoboz *leárnýékolja* a külsõ elektromos erõtérrel.
- ◆ Mivel két pont között elektromos potenciálkülönbség csak akkor lehet, ha elektromos erõtér van jelen ( $dU = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ), *egyensúlyi állapotban egy vezetõ minden pontjában azonos a potenciál.*
- ◆ Ha egy vezetõt feltöltünk, akkor a felületén lévõ töltések a vezetõn kívül elektromos erõtérrel hoznak létre. A kialakult térerõsség azonban a felületen csak olyan lehet, hogy

*a térerősségvonalak a vezető felületére merőlegesek* (ha a térerősségnek lenne a felülettel párhuzamos komponense az elmozdítaná a töltéseket). Ez akkor is így van, ha a vezető nem töltött, de elektromos erőterben van, és a felületén a megosztás miatt van töltés.

### Elektromos töltések kölcsönhatási energiája

Eddig egy töltés helyzeti energiáját egy ismeretlen forrásból származó elektromos erőterben vizsgáltuk, és feltételeztük, hogy a vizsgált töltés az erőteret nem változtatja meg. Az erőteret azonban sztatikus esetben mindig valamilyen töltés hozza létre, így a kiszámított energia a vizsgált töltés és a teret létrehozó ismeretlen töltés kölcsönhatásának a következménye. Azt is mondhatjuk, hogy ez a helyzeti energia a kölcsönható töltések közös energiája, amit *kölcsönhatási energiának* nevezünk. Az, hogy a kölcsönhatási energia valóban mindkét kölcsönható töltéshez tartozik, jól látszik két ponttöltés kölcsönhatása esetén.

Helyezzünk el két ponttöltést ( $Q_1$  és  $Q_2$ ) egymástól  $r$  távolságban, és számítsuk ki először, hogy mennyi a helyzeti energiája a  $Q_2$  töltésnek egy  $Q_1$  töltés által létrehozott elektromos erőterben.

A  $Q_1$  töltéstől  $r$  távolságban a potenciál

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r},$$

a  $Q_2$  töltés helyzeti energiája itt

$$E_{h2} = U_1 Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

Látszik, hogy ebben az energia-kifejezésben teljesen szimmetrikus módon szerepel a két töltés, és az összefüggésben szereplő  $r$  is az egymástól mért távolság: az energia nem rendelhető hozzá kizárólagosan egyik töltéshez sem.

Még nyilvánvalóbbá válik az energia közös jellege, ha kiszámítjuk, hogy mennyi a helyzeti energiája a  $Q_1$  töltésnek a  $Q_2$  töltés által létrehozott elektromos erőterben. A  $Q_2$  töltéstől  $r$  távolságban a potenciál

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r},$$

a  $Q_1$  töltés helyzeti energiája itt

$$E_{h1} = U_2 Q_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{r},$$

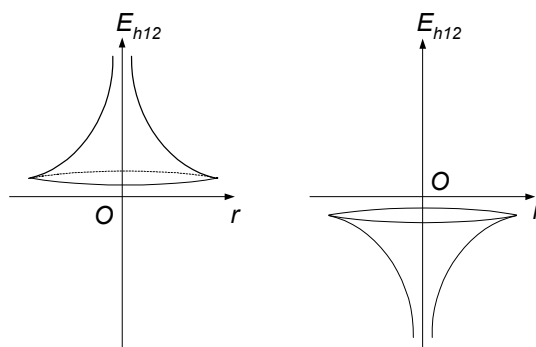
ami megegyezik az előző eredményünkkel.

Vagyis bármelyik töltés energiáját számoljuk ki a másik erőterében, ugyanazt az eredményt kapjuk. Ismét azt látjuk, hogy ez az energia nem rendelhető hozzá egyik töltéshez sem: ez a két ponttöltésből álló rendszer közös helyzeti energiája vagy más néven a két töltés kölcsönhatási energiája. Ezt a kölcsönhatási energiát az  $E_{h12}$  szimbólummal jelölve, egymástól  $r$  távolságban lévő ponttöltések esetén

$$E_{h12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

Mivel két töltés kölcsönhatása számos esetben igen fontos szerepet játszik (ilyen kölcsönhatás tartja össze pl. az atomban a pozitív töltésű magot és a negatív töltésű elektronokat), ennek az energiának a távolságfüggését szemléletesen is bemutatjuk a következő ábrán. Az ábra *a)* része két azonos előjelű ponttöltés kölcsönhatási energiáját

mutatja a két töltés egymástól mért  $r$  távolságának függvényében. A *b)* ábra ugyanezt mutatja két ellentétes előjelű ponttöltés esetén.



Az ábrákon azt is érzékeltetjük, hogy az  $O$  pontbeli töltéshez bármely irányból közelítjük a másik töltést, mindig ugyanolyan jellegű a helyzeti energia változása. Azonos töltések esetén tehát a közelített töltésnek egy helyzeti energia-hegyet kell legyőznie, vagyis a rendszer energiája a közeledésnél nő, míg ellentétes töltések esetén a közelített töltés egy helyzeti energia-gödörbe esik be, és a rendszer energiája csökken a nulla helyzeti energiának megfelelő végtelen távoli helyzethez képest. A helyzeti energia nullpontjának ilyen megválasztása az oka annak, hogy vonzó kölcsönhatás esetén a rendszer helyzeti energiája negatív.

\*\*\*\*\*

Ha több ponttöltésből ( $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ ) álló töltésrendszer kölcsönhatási energiáját akarjuk kiszámítani, akkor kiválasztunk egy töltést, és meghatározzuk a kiválasztott – pl. az  $i$ -edik  $Q_i$  – töltés helyén a többi töltés által létrehozott  $U_i$  potenciált. Az  $i$ -edik töltés helyzeti energiáját ekkor az

$$E_{hi} = Q_i U_i$$

összefüggés adja meg. A töltések teljes helyzeti energiáját, vagyis a töltésrendszer kölcsönhatási energiáját, az egyes ponttöltések helyzeti energiáinak összegéből kaphatjuk meg:

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i .$$

Az  $\frac{1}{2}$  szorzóra azért van szükség, mert az összegzés során minden töltéspár kölcsönhatási energiáját kétszer vesszük figyelembe.

Mivel ponttöltésekről van szó, a helyzeti energia könnyen kiszámítható. Ha az  $i$ -edik és  $j$ -edik töltés közötti távolságot  $r_{ij}$ -vel jelöljük, akkor az  $i$ -edik töltés helyén a többi töltés által létrehozott  $U_i$  potenciál

$$U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j, j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} .$$

Az  $i$ -edik töltés helyzeti energiája tehát

$$E_{hi} = Q_i U_i = Q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j, j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} .$$

Az összes töltés helyzeti energiája, vagyis a töltésrendszer kölcsönhatási energiája

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left( Q_i \sum_{j, j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i, i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} .$$

Határozzuk meg a fentiek alapján egy *vezetőn elhelyezkedő*  $Q$  töltés helyzeti energiáját. Ehhez a vezetőn lévő töltést ponttöltéseknek tekinthető apró  $dQ_i$  részekre osztjuk, és az így kapott töltésrendszer helyzeti energiáját számítjuk ki. Tudjuk, hogy egy vezető minden pontján azonos a potenciál. Jelöljük ezt  $U$ -val. Ekkor a potenciál a  $dQ_i$  résztöltés helyén is  $U$ , így ennek a töltésnek a helyzeti energiája

$$E_{hi} = dQ_i U .$$

Az összes töltés helyzeti energiája pedig

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U = \frac{1}{2} U \sum_i Q_i = \frac{1}{2} U Q .$$

Egy vezetőn elhelyezett töltés helyzeti energiája tehát arányos a vezetőn lévő töltéssel és a vezető potenciáljával.

\*\*\*\*\*

## Egyszerű töltéselrendezések elektromos erőtere

Az elektrosztatikus tér alaptörvényei segítségével egyszerűbb töltéseloszlások által keltett elektromos erőterben a térerősség illetve az elektromos potenciál kiszámítható. Az általunk használt integrál-törvények ilyen célra csak akkor használhatók, ha a töltéseloszlásnak valamilyen szimmetriája van (pl. gömbszimmetria).

### Gömbszimmetrikus töltéseloszlások tere

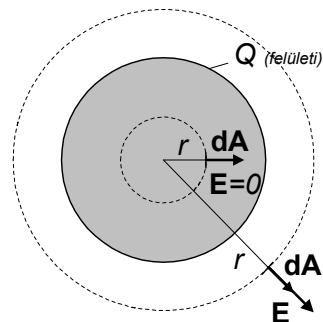
#### Ponttöltés

A legegyszerűbb ilyen "töltéseloszlás" a ponttöltés. Ha egy magában álló ponttöltés terére alkalmazzuk a II. alaptörvényt, akkor természetesen visszakapjuk a Coulomb törvényből kapott térerősség-kifejezést, hiszen abból "találtuk ki" a II. alaptörvényt.

#### Vezető gömb

Kevésbé nyilvánvaló egy  $R$  sugarú *vezető* gömb elektromos tere, amelyre  $Q$  pozitív töltést vittünk fel. A vezető olyan tulajdonságú anyag, amelyen az elektromos töltések szabadon elmozdulhatnak, ezért a töltések – amelyek taszítják egymást – egyensúlyban egymástól a lehető legtávolabb, tehát a gömb felületén helyezkednek el.

A számításhoz célszerűen felvett felület egy gömbfelület (a végeredmény a felület választásától nem függ), amelynek középpontja a töltött gömb középpontjával egybeesik (ábra). Mivel ez a töltéseloszlás gömbszimmetrikus, a tér is az lesz, tehát a térerősség nagysága ( $E$ ) a felvett gömbfelület minden pontjában azonos, és sugárirányban kifelé mutat. Így a felületen mindenütt  $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A}$ , és  $E = \text{állandó}$ , ezért az elektrosztatika II. alaptörvénye egyszerű alakban írható fel:



$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4r^2 \pi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

A töltött gömbön belül nincs töltés, így a gömb felületén belül felvett zárt felület által bezárt töltés  $Q = 0$ , a gömbön kívül felvett zárt felület által bezárt töltés  $Q$ . Így a töltött gömb tere

$$E = 0, \quad \text{ha } r < R$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{ha } r \geq R,$$

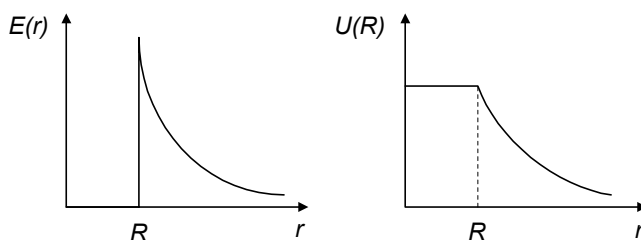
vagyis a töltött vezető gömb belsejében nincs elektromos tér, a gömbön kívül eső pontokban pedig a tér olyan, mintha a gömb töltése a centrumában koncentrált ponttöltés lenne (ezért lehet a ponttöltések kölcsönhatását töltött gömbök segítségével megmérni). A térerősség távolságfüggése a mellékelt ábrán látható.

A potenciál most is a térerősség integrálásával kapható meg.

A gömbön kívül a térerősség a ponttöltés térerősségével azonos, ezért ott a potenciál is megegyezik a ponttöltés potenciáljával:

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R$$

A gömb felületén  $r=R$ , a potenciál mindenütt ugyanaz





$$U(R) = U_{gömb} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad r=R$$

A gömbön belül nincs erőtér, a potenciál ezért állandó, és azonos a gömb felületén lévő potenciállal:

$$U_{belül} = U(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad r \leq R.$$

A potenciál távolságfüggése a fenti ábrán látható.

Fontos eredmény, hogy a magában álló (azaz más töltésektől igen messze elhelyezett) vezető gömb potenciálja arányos a rajta lévő töltéssel, az arányossági tényező pedig csak geometriai adatokat tartalmaz:

$$U_{vez} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q.$$

A speciális esetben kapott eredményről kimutatható, hogy általánosan is igaz: tetszőleges alakú, magában álló, elektromosan töltött vezető végtelen távoli pontra vonatkozó potenciálja arányos a rajta lévő töltéssel:  $U_{vez} \sim Q$ . Ezt az arányosságot az alábbi módon szokás felírni

$$U_{vez} = \frac{1}{C} Q,$$

ahol a  $C$  állandót a vezető kapacitásának nevezik (minél nagyobb a  $C$  érték, annál több töltést tud tárolni a vezető adott potenciálon). Eszerint egy  $R$  sugarú vezető gömb kapacitása a fenti egyenletek alapján:

$$C_{gömb} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

### ***Térerősség és potenciál töltött síkok környezetében, a síkkondenzátor***

A legegyszerűbbek, ezért a valóságos terek közelítésekként gyakran használt erőterek a homogén erőterek. Az alábbiakban ilyen erőterekkel kapcsolatos számításokat ismertetünk.

Szimmetria-megfontolások alapján belátható, hogy homogén tér jön létre egy elektromosan töltött, végtelen kiterjedésű lemez két oldalán, amelyen a *felületi töltéssűrűség* (egy elemi felületen elhelyezkedő  $dQ$  töltés és a  $dA$  felület hányadosa:  $\sigma = dQ/dA$ ) mindenütt azonos. Számítsuk ki a térerősséget ( $E_+$ ), ha a lemez töltése pozitív. A térerősség az elektrosztatika II. alaptörvénye alapján egyszerűen megkapható, ha a fluxust olyan zárt felületre számítjuk ki, amelynek csak térerősséggel párhuzamos és térerősségre merőleges részei vannak (ábra). Erre a zárt felületre vett fluxus

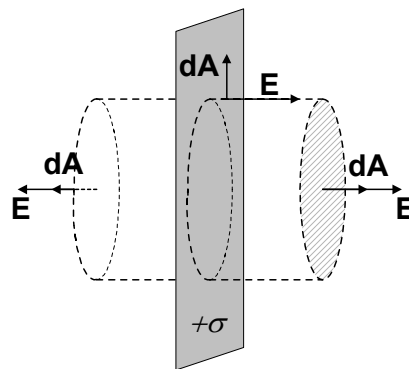
$$\Phi_A^{zárt} = \oint \mathbf{E}_+ \cdot d\mathbf{A} = 2 \int_A E_+ dA = 2E_+ \int_A dA = 2E_+ A$$

másrészt viszont a II. alaptörvény szerint

$$\Phi_A^{zárt} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}.$$

A két egyenletből (felhasználva, hogy  $\sum Q = \sigma A$ ) a térerősség:

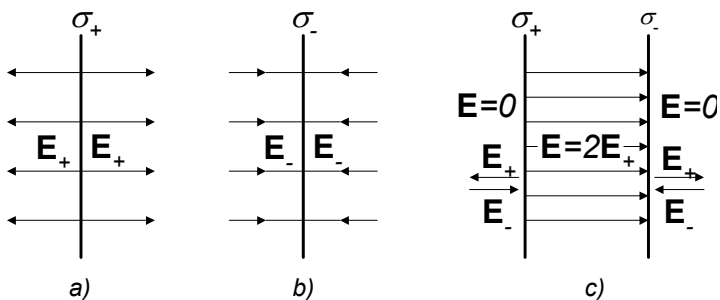
$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$



Negatívan töltött lemezre ugyanilyen nagyságú, csak ellenkező irányú térerősséget kapunk (ábra). Az eredmények szigorúan véve végtelen kiterjedésű lemezre igazak,

közelítőleg érvényesek azonban véges lemezeknél is, ha a lemeztől mért távolság sokkal kisebb, mint a lemez szélétől mért távolság.

Érdekes és fontos eset, ha két olyan lemezt helyezünk el egymással párhuzamosan és egymáshoz közel, amelyeken a töltéssűrűség azonos nagyságú, de ellentétes előjelű ( $+\sigma$  és  $-\sigma$ ). Ekkor - mint az ábra is mutatja - a két lemez között a terek egyirányúak, ezért ott a térerősség



megduplázódik, a lemezeken kívül azonban a terek kioltják egymást. Így a két lemez között homogén tér jön létre, amelynek nagysága:

$$E = 2E_+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

iránya pedig a pozitívan töltött lemeztől a negatív felé mutat.

Mivel a kialakult erőtér homogén, könnyen kiszámíthatjuk az ellentett töltött párhuzamos vezető-lemezek közötti potenciálkülönbséget is. A pozitív (+) lemez  $U$  potenciálja a negatívhoz (-) képest:

$$U = -\int_{-}^{+} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_{-}^{+} E dr = -E \int_{-}^{+} dr = -Ed = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

ahol  $d$  a lemezek közötti távolság. (Itt felhasználtuk, hogy  $\mathbf{E}$  és  $d\mathbf{r}$  ellentétes irányú, vagyis  $\mathbf{E} d\mathbf{r} < 0$ .)

Az összefüggés jó közelítéssel véges  $A$  felületek esetén is alkalmazható, ha  $d$  kicsi a lemezek lineáris méretéhez képest. A  $\sigma$  töltéssűrűséget ekkor kifejezhetjük a lemezekon lévő összes  $Q$  töltéssel a  $\sigma = Q/A$  összefüggés segítségével, és így a potenciálra az

$$U = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q$$

kifejezést kapjuk.

Ha a két lemez az előző példában vezető anyagból (fémről) készült, akkor az elrendezést *síkkondenzátornak* nevezzük, ami töltések tárolására alkalmas.

A fenti összefüggés és a kapacitás definiálására szolgáló egyenlet hasonlósága alapján (a potenciálkülönbség és a töltés arányos) bevezethetjük a síkkondenzátor kapacitását is:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

#### **KÍSÉRLET:**

Mozgatható lemezből készült kondenzátort feltöltve és a lemezek távolságát változtatva, változik a potenciálkülönbség (elektrométer kitérése mutatja). A  $d$  növelésekor a potenciálkülönbség nő, csökkenésekor csökken, a kapott összefüggéseknek megfelelően.

## Az elektromos dipólus

Az elektromos erőter leírása szempontjából fontos szerepet játszik az a speciális töltéselrendezés, amely egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő, pontszerű, azonos nagyságú pozitív- és negatív töltésből áll (ábra). Ez az *elektromos dipólus*. A dipólussal jól modellezhetőek azok a semleges atomok vagy molekulák, amelyekben a pozitív és negatív töltések súlypontja valamilyen okból (pl. szerkezeti sajátosságok vagy külső hatás miatt) nem esik egybe. Ilyen esetekkel a későbbiekben elsősorban az anyag jelenlétében kialakuló elektromos erőter leírásánál találkozunk.

### Az elektromos dipólus erőtere

A dipólus két különálló ponttöltésből áll, ezért körülötte elektromos erőter alakul ki. A térerősséget bármely pontban kiszámíthatjuk a szuperpozíció elve segítségével: az egyes töltések által létrehozott térerősségvektorokat összeadjuk. Ilyen szerkesztés vázlatát látható a mellékelt ábrán (*a*) ábra), amelyen a dipólus erőterét térerősségvonalakkal is szemléltettük (*b*) ábra).

A térerősség helyfüggése matematikai formulával is megadható, ezt azonban itt nem vezetjük le.

