Az elektromos kölcsönhatás

Régi tapasztalat, hogy *megdörzsölt testek* különös *erőket* tudnak kifejteni. Megdörzsölt műanyagok (pl. fésű), megdörzsölt üveg- vagy ebonitrúd papírdarabokat, apró porszemcséket, hajszálakat képes magához vonzani. A dörzsöléssel ilyen különleges állapotba hozott testek által kifejtett erő semmilyen mechanikai jellegű vagy gravitációs kölcsönhatással nem magyarázható.
A dörzsölés révén tehát az anyagnak egy olyan tulajdonsága válik érzékelhetővé, amely egy új kölcsönhatást okoz. A kölcsönhatást *elektromos- vagy elektrosztatikus kölcsönhatásnak*, az anyagnak az elektromos kölcsönhatást okozó sajátságát *elektromos töltésnek* nevezzük.
Mivel a tapasztalat szerint a megdörzsölt testek között vonzás (pl. bőrrel megdörzsölt üveg és szőrmével megdörzsölt ebonit) és taszítás (pl. bőrrel megdörzsölt üveg és egy másik bőrrel megdörzsölt üveg) egyaránt felléphet, a jelenségeket csak részletes vizsgálatokkal lehet értelmezni.

Elektromos erőhatások, az elektromos töltés

Az elektromos kölcsönhatás megismeréséhez először az elektromos töltések között fellépő erőhatásokat kell tanulmányozni, mert csak így ismerhetjük meg az elektromos töltések sajátságait, és így juthatunk el az elektromos töltések közötti kölcsönhatás számszerű leírásához. A legegyszerűbb a nyugvó (sztatikus) elektromos töltések[1] között fellépő erőket vizsgálni, az elektromos jelenségek kutatásának ezt a területét értelemszerűen *elektrosztatikának* nevezik.
Az erőhatásokkal kapcsolatos alapkísérletek egyszerű eszközökkel végrehajthatók.

KÍSÉRLET_1:
- Bőrrel megdörzsölt üvegrúd, szőrmével megdörzsölt ebonitrúd apró tárgyakat magához vonz, majd eltaszítja azokat.
- Az üvegrúd dörzsölésére használt bőr és az ebonitrúd dörzsölésére használt szőrme ugyanilyen erőhatásokat fejt ki.)

KÍSÉRLET_2:
Felfüggesztett, megdörzsölt testhez egy másik megdörzsölt testet közelítve, közöttük az alábbi erőhatásokat tapasztaljuk:
- üveg - üveg kölcsönhatás: *taszítás*
- üveg - üveget dörzsölő bőr kölcsönhatása: *vonzás*
- ebonit – ebonit kölcsönhatás: *taszítás*
- ebonit – ebonitot dörzsölő szőrme kölcsönhatása: *vonzás*
- üveg - ebonit kölcsönhatás: *vonzás*
- üveg - ebonitot dörzsölő szőrme kölcsönhatása: *taszítás*
- ebonit – üveget dörzsölő bőr kölcsönhatása: *taszítás*

[1] A továbbiakban az „elektromos töltés” kifejezés helyett gyakran a rövidebb „töltés” kifejezést használjuk.

Sejtés:

- A dörzsölés az összedörzsölt két testet olyan állapotba hozza, amely valami erőkifejtésre képes „anyagi dolog” megjelenésével jár együtt, ezt nevezzük *elektromos töltésnek.*
- A kísérletek csak úgy értelmezhetők, ha *kétféle elektromos töltést* tételezünk fel: az egyik fajta töltés az összedörzsölt testek egyikén-, a másik fajta töltés a másikon jelenik meg. A kétfajta töltés vonzza egymást, az azonosak taszítják egymást.

A kísérletek alapján kialakult fogalmak és a jelenségek értelmezése:

- *kétféle töltés* van: a bőrrel megdörzsölt üvegrúd töltését nevezzük *pozitív*nak, a szőrmével megdörzsölt ebonitét *negatív*nak.
- Az azonos előjelű töltések *taszítják* egymást, az ellenkező előjelűek *vonzzák* egymást, ennek alapján feltételezhető, hogy az üvegrudat dörzsölő bőrön negatív töltés van, az ebonitot dörzsölő szőrmén pedig pozitív.
- Mivel a magukra hagyott testek normális körülmények között (dörzsölés nélkül) általában elektromos erőhatásokat nem fejtenek ki egymásra, fel kell tételeznünk, hogy az anyagokban azonos mennyiségű pozitív és negatív töltés van, amelyek egymás hatását semlegesítik, ezért kifelé az anyagok elektromos töltései nem érzékelhetők.
- A dörzsölés hatására fellépő elektromos jelenségeket eszerint úgy értelmezhetjük, hogy a *dörzsölés szétválasztja* az anyagban azonos mennyiségben található pozitív és negatív töltéseket, így az összedörzsölt testek egyikén többlet pozitív-, a másikon többlet negatív töltés jelenik meg. A szétválasztott töltések között erőhatás lép fel, amit a töltést hordozó testek kölcsönhatásaként érzékelünk.
- Ma már azt is tudjuk, hogy az elektromos töltéseket a földi anyagot alkotó két elemi részecske, a proton és az elektron hordozza. Ezek közül a proton töltése pozitív (ez jelenik meg a megdörzsölt üvegrúdon), az elektroné pedig negatív (ez jelenik meg a megdörzsölt ebonitrúdon).

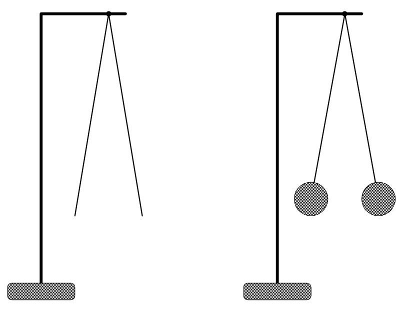
Az elektromos töltések további tulajdonságait szintén egyszerű kísérletekkel vizsgálhatjuk meg.

KÍSÉRLET_3:

- Cérnaszálra felfüggesztett sztaniollemezt (alumínium fóliát) a megdörzsölt üvegrúd vagy ebonitrúd magához vonzza, majd eltaszítja. A taszítás oka az, hogy a fémlemez a megdörzsölt rúd töltését átveszi, a rúddal azonos töltésűre feltölthető.
- Azt, hogy a dörzsölésnél töltésszétválasztás történik, az is mutatja, hogy az üvegrúddal pozitívra feltöltött sztaniollemezt a dörzsölő bőr vonzza (a bőrön tehát negatív töltés maradt), az ebonittal negatívra feltöltött sztaniollemezt a dörzsölő szőrme vonzza (a szőrmén pozitív töltés maradt).

KÍSÉRLET_4:

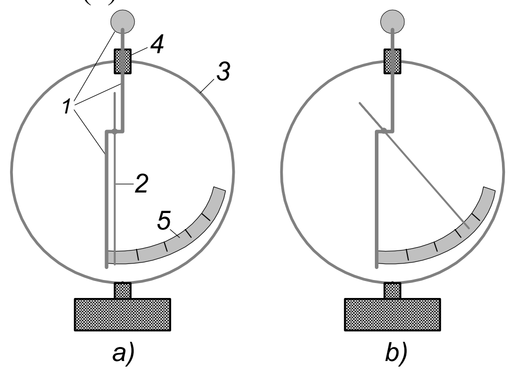
- A töltések jelenlétének kimutatására szolgáló egyszerű eszközök az ábrán látható *elektroszkópok*. Ezek két vékony, hajlékony fémlemezből (pl. alumínium fólia; *a)* ábra) vagy cérnaszálakra felfüggesztett két bodzabél (hungarocell) golyóból (*b*) ábra) állnak, amelyeket egyik végükön egy fém tartón egymáshoz rögzítünk. Ha a közös végre töltést



a) b)

viszünk, a lemezek illetve a bodzabél golyók – a közöttük fellépő taszítás miatt – egymástól eltávolodnak, szétágaznak.

♦ Ezeknek az eszközöknek komolyabb – mérésre is alkalmas – változatai az *elektrométerek*. Ezek lényegében egy fémvázból (*1*) és a hozzá vízszintes tengellyel csatlakozó, mutatóként működő, vékony fémrúdból (*2*) állnak. Az eszközt a zavaró külső hatások kiküszöbölése érdekében egy fém házban (*3*) helyezik el, amelyet a fémváztól elszigetelnek (*4*). Az elektroszkóp töltetlen állapotában a *2* mutató függőlegesen lóg (*a)* ábra). Ha a fémváz tetején lévő fémgömbre töltést viszünk fel, akkor az *1* fémváz és a *2* mutató ugyanolyan előjelű töltést kap, így köztük taszítás lép fel. Ennek következtében a mutató eltávolodik a fémváztól, elfordul a tengelye körül, és jelzi a töltés jelenlétét (*b)* ábra). A mutató kitérését egy mögötte elhelyezett skálán (*5*) leolvashatjuk, így az eszköz durván a felvitt a töltés nagyságát is jelzi.



KÍSÉRLET_5:

Két elektrométert egymás mellé helyezünk, és az alábbi kísérleteket végezzük el.

♦ Az egyik elektrométert feltöltjük, majd a töltött és töltetlen elektrométer gömbjeit fémrúddal összekötjük. Ekkor az eredetileg töltetlen elektrométer is töltést mutat, vagyis a töltés bizonyos anyagokkal egyik helyről a másikra *elvezethető*. Azokat az anyagokat, amelyek a töltést képesek elvezetni *vezetőknek* nevezzük (ilyenek pl. a fémek). A vezetők a hozzájuk érintett, töltött állapotba hozott (megdörzsölt) anyagokkal feltölthetők.

♦ Ha a töltött- és töltetlen elektrométert farúddal kötjük össze, akkor a töltetlen elektrométer továbbra is töltetlen marad, nincs töltésvándorlás. Vannak tehát olyan anyagok, amelyek a töltést nem vezetik. Ezeket *szigetelőknek* nevezzük. Dörzsöléssel a szigetelőkön tudunk töltéseket szétválasztani.

♦ Ha a két elektrométerre ellenkező előjelű töltést viszünk, majd azokat vezetővel összekötjük, akkor mindkét elektrométer töltése csökken: a *kétféle töltés kompenzálja* egymás hatását.

KÍSÉRLET_6:

Elektromos megosztás:

♦ Két töltetlen elektrométert vezető rúddal kötünk össze, és az egyikhez feltöltött üvegrudat (pozitív töltés) közelítünk. Ekkor mindkét elektrométer töltést mutat. Ha az üvegrudat eltávolítjuk az elektrométer közeléből, akkor az elektrométerek töltése eltűnik.

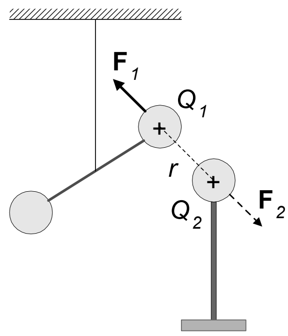
Ezt a jelenséget annak a megfigyelésnek a segítségével érthetjük meg, hogy vezetőkben a töltések könnyen elmozdulhatnak: a két elektrométerből és az összekötő rúdból álló összefüggő vezetőben a pozitív töltésű üvegrúd a negatív töltéseket a rúdhoz közeli elektrométerre vonzza, a távoli elektrométeren pedig pozitív töltés marad. Így mindkét elektrométer töltést jelez. A vezetőkben a közelükben elhelyezett töltések által okozott ilyen töltésszétválást elektromos megosztásnak nevezik.
A megosztó hatás megszűnése után a töltések visszarendeződnek eredeti állapotukba.

KÍSÉRLET_7:
A megosztott töltések szétválaszthatók, és újra egyesíthetők:
- ♦ Az összekötő vezető rudat a megosztott rendszerről levéve, a szétválasztott töltés megmarad az elektrométereken.
- ♦ A két elektrométert újra vezetővel összekötve, a megosztott töltések semlegesítik egymást, a töltés mindkét elektrométerről eltűnik.

KÍSÉRLET_8:
Töltés előjelének meghatározása elektrométerrel a megosztás jelensége alapján:
- ♦ Elektrométert ismert töltéssel látunk el, majd ismeretlen előjelű töltést közelítünk hozzá. Ekkor a megosztás miatt a kitérés nő, ha az ismeretlen töltés előjele megegyezik ez elektrométerével, ellenkező előjelű töltésnél a kitérés csökken.

Az elektrosztatikus kölcsönhatás számszerűsítése, a Coulomb-törvény

Az elektromos töltések kölcsönhatásának első számszerű vizsgálatát először Coulomb (1785) végezte el. A mérés során töltött vezető gömbök kölcsönhatását mérte az igen kis erők mérésére alkalmas *torziós mérleggel.*
A torziós mérleg vékony, rugalmas szálra súlyzószerű elrendezésben, a "súlyzó" tömegközéppontjánál felfüggesztett két azonos méretű fémgömb (ábra). Ha a szál elég vékony, akkor a "súlyzó" egyik gömbjére ható igen kis erő esetén is mérhető módon elfordul. Az elfordulás során a rugalmas szálban egy visszatérítő nyomaték lép fel, amely arányos a szögelfordulással. Emiatt a visszatérítő nyomaték egy meghatározott szögelfordulásnál kompenzálja a súlyzóra ható erő nyomatékát, és egyensúly alakul ki. A visszatérítő nyomaték a szögelfordulásból kiszámítható, abból pedig a súlyzóra ható ismeretlen erő meghatározható.

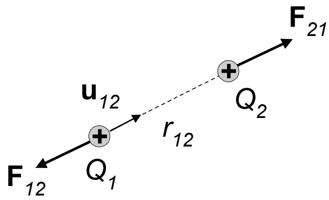


A Coulomb-féle mérésnél a fémgömbök egyikére vitték fel (pl. megdörzsölt üveg rudat érintve hozzá) a kölcsönható töltések egyikét (Q_1), és ennek közelében helyezték el a másik töltött testet (Q_2 töltésű fémgömb). A torziós mérleg a gömbök elektromos kölcsönhatása miatt elfordul. Megmérve az elfordulás szögét, és ismerve a felfüggesztő szál rugalmas tulajdonságait, a golyók között fellépő erő meghatározható.
A *gömb* választása azért szerencsés, mert
- ♦ gömbszimmetrikus a töltéseloszlás, ami várhatóan leegyszerűsíti a mérés kiértékelését (később látni fogjuk, hogy a gömb egy pontszerű töltéssel azonos módon viselkedik)
- ♦ egy töltött gömböt ugyanolyan üres gömbhöz érintve a *töltés felezhető*, vagyis mód van a töltés nagyságának mérésére.

A berendezésben változtatható a kölcsönható testek egymáshoz viszonyított helyzete, vagyis tanulmányozható a vonzóerő távolságfüggése, mód van továbbá arra is, hogy a mérést különböző nagyságú töltésekkel végezzük el.
A mérések szerint a kölcsönhatásnál fellépő erők nagysága az ábra jelöléseivel:

$$F_1 = F_2 \propto \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} .$$

Szigorúan véve a töltések r_{12} távolságának csak akkor van értelme, ha pontszerű töltésekről van szó. Később látni fogjuk, hogy gömbszimmetrikus töltéseloszlásnál távolságként a gömbök középpontjainak távolsága használható.
Az arányossági tényezőt K_e-vel jelölve, az egyes töltésekre ható erő vektori alakban (ábra):



$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12}$$

Ez a Coulomb-törvény, ahol r_{12} a két test távolsága, $\mathbf{u}_{12}$ az *1* testtől a *2* testhez mutató egységvektor, Q_1 és Q_2 a testek elektrosztatikus kölcsönhatásának erősségét jellemző elektromos töltések, K_e pedig egyelőre ismeretlen arányossági tényező.
A törvény kifejezi azt a tapasztalatot is, hogy azonos előjelű töltések ($Q_1 \cdot Q_2 > 0$) taszítják, ellenkező előjelűek ($Q_1 \cdot Q_2 < 0$) pedig vonzzák egymást. A tapasztalat szerint a két kölcsönható töltésre ható erő ellentétes irányú és azonos nagyságú (Newton III. törvénye teljesül): $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.
Ez a törvény akkor érvényes, ha a két kölcsönható test környezetében nincs más, a kölcsönhatást zavaró – esetünkben elektromosan töltött – test. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a két töltés kölcsönhatását üres térben – vákuumban – kellene vizsgálnunk, hiszen az anyagokat töltött részecskék építik fel, s ezek a töltések a tapasztalat szerint módosítják a kölcsönhatást. Kimutatható azonban, hogy a levegő módosító hatása igen kicsi, így a méréseket levegőben is végezhetjük.
A törvénnyel kapcsolatban két kérdés vetődik fel:

- ♦ mi a Q egysége?
- ♦ mennyi a K_e?

Azt a problémát, hogy egyetlen összefüggésből két új mennyiséget kell meghatároznunk kétféleképpen oldhatjuk meg (ugyanezzel a problémával találkoztunk már Newton II. törvényénél is, ahol a két mennyiség a tömeg és az erő volt):

- ♦ önkényesen rögzítjük a töltés egységét (pl. egységként egy reprodukálható módon feltöltött test töltését választjuk). Ekkor a K_e arányossági tényező mérés útján határozható meg: ha két, egymástól $r_{12}=d$ távolságban lévő, egységnyi töltésű (Q_{egys}) test által egymásra kifejtett $F_{12}=F$ erőt megmérjük, akkor az arányossági tényezőt a

$$K_e = \frac{Fd^2}{Q_{egys}^2}$$

  összefüggésből kapjuk meg. A töltés ma használt, törvényben rögzített egysége – az *SI* egység – *1 Coulomb=1 C* (ezt az áramerősség egységéből származtatjuk: *1 C=1 As*). A töltés egységének ilyen választása esetén a Coulomb-törvényben szereplő arányossági tényezőre azt kapjuk, hogy $K_e=9*10^9\ Nm^2/C^2$.
- ♦ a másik lehetőség az, hogy önkényesen rögzítjük a K_e állandót, ekkor Q egysége a Coulomb-törvényből származtatható. Ezt az eljárást használják a fizika bizonyos területein még ma is használatos

elektrosztatikus CGS rendszerben. Itt önkényesen a $K_e=1$ egység nélküli értéket választják, amiből következik, hogy az elektromos töltés egysége: $g^{1/2}cm^{3/2}s^{-1}$.

Lényegében formai okokból (bizonyos alaptörvények egyszerűbb alakban írhatók fel) az *SI* rendszerben K_e helyett egy új konstanst vezetnek be (ε_0):

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_0 = 8.855 * 10^{-12}\ C^2/Nm^2.$$

Ezzel a Coulomb-törvény az

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\mathbf{u}_{12}$$

alakot ölti. A törvény *nyugvó, pontszerű töltések* (vagy gömbszimmetrikus töltéseloszlások) között *vákuumban* fellépő kölcsönhatást ír le.

A történeti hűség kedvéért megjegyezzük, hogy a töltések kölcsönhatására vonatkozó Coulomb-törvényt levegőben állapították meg. Később kiderült, hogy a levegő jelenléte gyakorlatilag nem befolyásolja a mérési eredményeket, ezért a levegőben kimért törvények a vákuumban érvényes törvényekkel gyakorlatilag azonosak.

Az elektrosztatikus erők jellege, elektromos erőtér és elektromos térerősség

Ha egy Q ponttöltés környezetében bárhol elhelyezünk egy másik (q) ponttöltést, akkor arra a Coulomb-törvénynek megfelelő erő hat, vagyis egy töltés maga körül a térben olyan fizikai állapotot hoz létre, amelynek eredményeképpen bármilyen másik, odahelyezett töltésre elektrosztatikus erő hat. Rövidebben ezt úgy szokás megfogalmazni, hogy a Q elektromos töltés maga körül ún. elektrosztatikus- vagy elektromos *erőteret* hoz létre. Azt, hogy valahol van-e elektromos erőtér, eszerint úgy állapíthatjuk meg, hogy a kérdéses helyre egy mérőtöltést teszünk, és ha erre erő hat, akkor ott az erőtér jelen van, ha nem hat erő, akkor nincs jelen. A fenti módszerrel tehát az erőtér létezését akkor is meg tudjuk állapítani, ha az erőteret létrehozó töltést nem ismerjük. A kérdés az, hogy lehet-e ezt az erőteret számszerűen is jellemezni.
Azt, hogy egy pontszerű Q töltés környezetében milyen "erősségű" erőtér jön létre, jellemezhetjük például úgy, hogy a tér különböző pontjaiban meghatározzuk egy önkényesen kiválasztott pontszerű q pozitív mérőtöltésre ható erőt. Alkalmazva a Coulomb-törvényt erre az esetre, látható, hogy ez az erőhatás nemcsak a Q töltés által létrehozott erőtérre jellemző, hanem a mérőtöltéstől is függ. Az is látható azonban, hogy az erőhatás arányos a mérőtöltés nagyságával, vagyis az erőt elosztva a mérőtöltéssel, a mérőtöltéstől független vektormennyiséget (**E**) kapunk, amely már *csak az erőteret létrehozó töltés nagyságától és a vizsgált pont helyétől* függ:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{u}$$

ahol **u** az erőteret létrehozó töltéstől a mérőtöltés felé mutató egységvektor, r a kölcsönható töltések távolsága. Az így bevezetett **E** vektor a Q ponttöltés által létrehozott elektromos erőteret jellemzi.
Előbbi gondolatmenetünk szépséghibája az, hogy csak egyetlen pontszerű töltés által létrehozott erőtérre érvényes. Ha több töltés által létrehozott erőteret is a fenti módon akarjuk jellemezni, akkor mindenek előtt meg kell vizsgálnunk a mérőtöltésre az összes jelenlévő töltés által kifejtett erőt. Ezt az erőt megpróbálhatjuk elméleti úton, a *szuperpozíció elve* alapján kiszámítani. Eszerint a kiválasztott q mérőtöltésre az egyes töltések által kifejtett erőt nem befolyásolja a többi töltés jelenléte, vagyis ez az erő úgy

számítható ki, mintha a többi töltés ott sem lenne. Ennek alapján a q töltésre ható eredő erőt úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes töltések által egyenként kifejtett erőket vektorilag összeadjuk (ez látható az alábbi *a)* ábrán). Ennek megfelelően a Q_1, Q_2,...Q_i... töltések által a mérőtöltésre kifejtett eredő erő ($\mathbf{F}_e$) az alábbi módon kapható meg:

$$\mathbf{F}_e = q\sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_i .$$

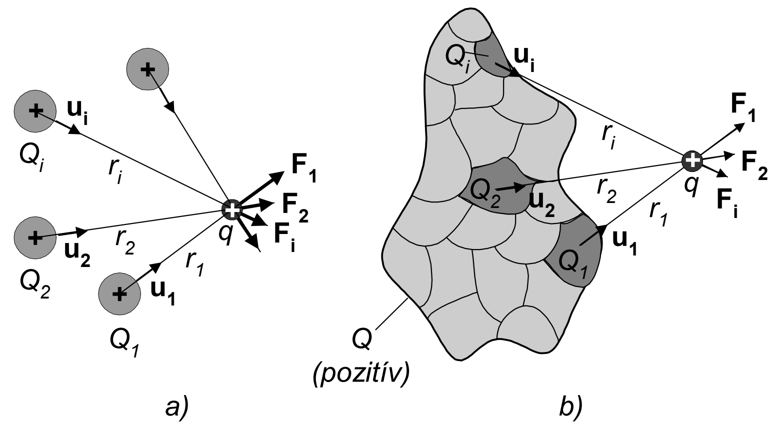
Látható, hogy az erő most is arányos a mérőtöltéssel, ezért bevezethetjük az

$$\mathbf{E} = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_i$$

vektort, ami csak az erőteret létrehozó töltésektől, továbbá a helytől függ. Ezzel a q töltésre ható erő az

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

alakba írható.



Hasonlóan járhatunk el, ha egy kiterjedt testhez tartozó folytonos töltéseloszlás által létrehozott erőteret akarunk jellemezni, csak ekkor a kiterjedt testet fel kell osztani igen kicsi térfogatelemekre (*b)* ábra), és az ezekben foglalt töltések által a kiszemelt pontszerű töltésre kifejtett erőket kell összegezni. Könnyen belátható, hogy az erő most is arányos a mérőtöltéssel.

Ez azt mutatja, hogy érdemes az erőteret a fenti módon bevezetett térjellemző vektorral jellemezni. Azt azonban, hogy ez a jellemző valóban mindig használható, kísérletileg kell megvizsgálni. A tapasztalat szerint az elektrosztatikus kölcsönhatásra a szuperpozíció elve érvényes, és az előbbi meggondolások általában is helyesek.

Mindezek alapján az elektromos erőtér jellemzésére bevezethetünk egy vektormennyiséget, az alábbi definícióval: az elektromos töltések közelében létrejövő elektromos erőtérbe elhelyezünk egy pontszerűnek tekinthető q pozitív mérőtöltést, és meghatározzuk (megmérjük vagy kiszámítjuk) a rá ható $\mathbf{F}_e$ elektromos erőt. Az elektromos erőtér jellemzésére az adott pontban az

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q}$$

vektort használjuk, amelyet *elektromos térerősségnek* nevezünk, és ezt a definíciót *mindenféle eredetű elektromos erőtér esetén érvényesnek tekintjük*.

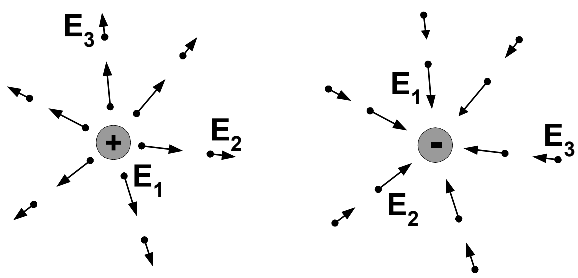
A fentiek alapján egy erőteret, amelyet valamilyen töltés maga körül létrehoz, úgy tudunk jellemezni, hogy a tér minden pontjában megadjuk a térerősségvektort. Ha ezt megtettük, akkor ahhoz, hogy egy tetszőleges pontban elhelyezett töltésre ható erőt kiszámítsuk, nincs szükségünk az erőteret létrehozó objektumok ismeretére, hiszen azoknak az "erőkifejtő hatását" a térerősségvektor egyértelműen jellemzi. (Például, egy $\mathbf{E}$ térerősségű helyen elhelyezett q_1 töltésre ható erő $\mathbf{F}_e=q_1\mathbf{E}$.) Ebben az értelemben tehát a térerősségvektorokkal jellemzett erőtér hordozza az erőteret létrehozó objektumok hatásait.

Ha az erőteret pontszerű töltés hozza létre, akkor könnyű helyzetben vagyunk, hiszen ekkor a térerősségvektor helytől való függését a Coulomb-törvényből kapott egyszerű matematikai kifejezés adja meg. Bonyolultabb esetekben a számításhoz a térerősségvektorok tulajdonságainak megismerése útján felállított általános törvényekre van szükség.

Az elektromos erőtér szemléltetése, erővonalkép

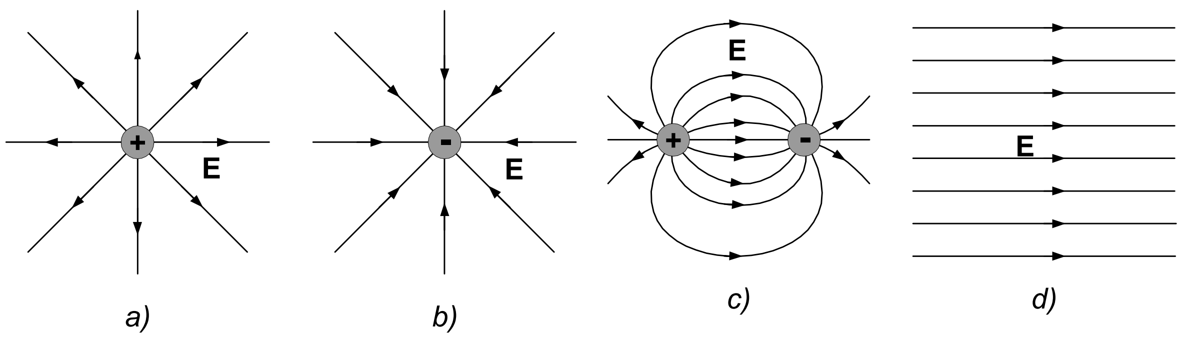
Az elektromos erőtérben a tér minden pontjához tartozik egy vektor, az **E** elektromos térerősségvektor, amely az elektromos erőteret (az ott fellépő erőhatást) jellemzi. Sok esetben nagyon hasznos, ha az erőtér jellegét szemléletessé tudjuk tenni, vagyis azt valamilyen módon ábrázoljuk.

Az erőtér szemléletes megjelenítésének egy lehetséges módja az, hogy különböző pontokhoz tartozó térerősségvektorokat lerajzoljuk, ahogy az pontszerű negatív- és pozitív elektromos töltés által létrehozott erőtérben az ábrán látható. Így egy térerősség-térképet kapunk, amely az egyes pontokban mutatja a térerősség nagyságát és irányát.



Ennél áttekinthetőbb és hasznosabb ábrázolást kapunk a *térerősségvonalak* bevezetésével. A térerősségvonalakat úgy kapjuk, hogy a berajzolt térerősségvektorokhoz olyan görbéket szerkesztünk, amelyekhez egy pontban húzott érintő az adott ponthoz tartozó térerősségvektor irányába mutat. A térerősségvonalnak irányt is adunk, ami megegyezik a hozzátartozó térerősségvektorok irányával. Más szóval, a térerősségvonal az elektromos erőtér "irányváltozásait" követi és szemlélteti.

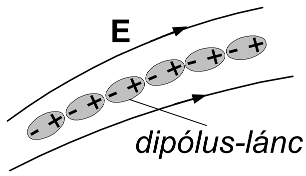
Az alábbi ábrán vázlatosan bemutatjuk az előző ábrán is szereplő ponttöltések (*a)* és *b)* ábra) és egymáshoz közel elhelyezett pozitív és negatív elektromos töltés – egy ún. dipólus (*c)* ábra) – által létrehozott erőtér térerősségvonalait (másik szokásos elnevezéssel *elektromos erővonalait*). Bemutatunk továbbá egy fontos szerepet játszó speciális esetet, amikor egy bizonyos térrészben minden pontban azonos a térerősségvektor (*d)* ábra). Az



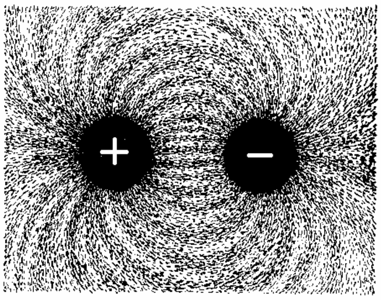
a) *b)* *c)* *d)*

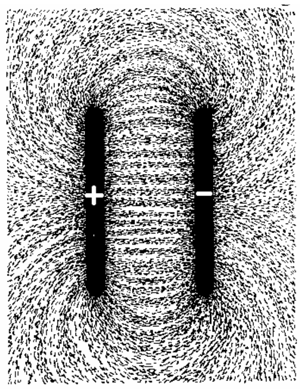
ilyen erőteret, (vagy egy erőtér ilyen tartományát) *homogén erőtérnek* nevezik. Homogén erőtérben a térerősségvonalak párhuzamos egyenesek.

Ezeket az erővonalakat egyszerűbb esetekben (pl. ponttöltés vagy ponttöltésekből álló töltésrendszerek) esetén meghatározhatjuk a térerősségvektorok kiszámításával, de az erővonalkép kísérletek segítségével is megvizsgálható. Erre az ad lehetőséget, hogy szigetelő anyagszemcsék elektromos erőtérben dipólusokká válnak. Ha ezeket a dipólusokat folyadékba betéve mozgásképessé tesszük, akkor kölcsönhatásuk miatt rendeződnek: a dipólusok beállnak a térerősség irányába, ugyanakkor ellentétes végükkel egymáshoz csatlakoznak, és láncokat képezve, kirajzolják az elektromos erőtér erővonalait (ábra).



KÍSÉRLET:
Egy üvegedénybe daraszemcséket tartalmazó olajat teszünk, majd az edény aljára ponttöltést, dipólust, síklapot vagy kondenzátort modellező fém elektródokat helyezünk el, és azokat feltöltjük (feszültséget kapcsolunk rájuk). Ekkor a daraszemcsék megmutatják a különböző töltések körül kialakuló elektromos erőtér erővonalait. Az üvegedényt vetítő gépre téve, a kapott térerősség-ábra jól láthatóvá tehető. Az alábbi ábrákon a valóságos képhez hasonló grafika látható, amely egy dipólus és két ellentétes töltésű, párhuzamos síklap elektromos erőterét mutatja.



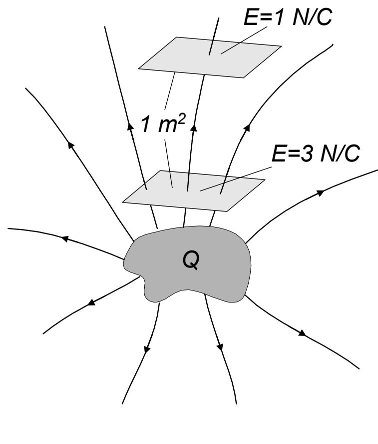


Az ábrákon bemutatott esetek azt sugallják, hogy a térerősségvonalak sűrűségével az elektromos térerősség nagysága is jellemezhető. Az erővonalábrákon ugyanis világosan látható, hogy a térerősségvektor nagyságának csökkenése irányában haladva (pl. a ponttöltéstől távolodva) a térerősségvonalak ritkulnak. A térerősségvonal-képbe elvileg tetszőleges számú térerősségvonalat berajzolhatunk, de célszerűnek látszik, hogy a térerősség nagyságának egyértelmű jellemzése érdekében valamilyen megállapodást fogadjuk el a berajzolt erővonalak sűrűségére vonatkozóan. Az általánosan elfogadott megállapodás a következő: a térerősségvonal-képet mindig úgy szerkesztjük meg, hogy bármely pontban *a térerősségvonalakra merőleges egységnyi felületet annyi térerősségvonal metssze át, amennyi ott a térerősségvektor számértéke*. Ez más szóval azt jelenti, hogy a térerősség számértéke az egységnyi (térerősségre merőleges) felületen átmenő erővonalak számát adja meg. Eszerint a megállapodás szerint egy elektromos erőtérben az **E** térerősségű helyen a térerősségvonalakra merőleges ΔA_N nagyságú felületen át rajzolandó erővonalak $N_{\Delta A}$ számát az

$$(E)_{számért.} = \frac{\Delta N_{\Delta A}}{(\Delta A_N)_{számért.}}$$

összefüggésből kaphatjuk meg:

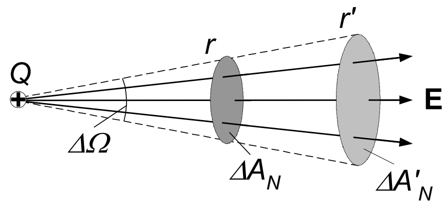
$$\Delta N_{\Delta A} = (E)_{számért.}(\Delta A_N)_{számért.}$$



Az ilyen módon elkészített térerősségvonal-képről a térerősség nagysága az ábrán látható módon olvasható le. Nyilvánvaló, hogy homogén erőtérben egy adott helyen a fenti szabály szerint megrajzolt erővonalsűrűség a tér bármelyik pontjában ugyanaz lesz, és a térerősségre merőleges felületet átmetsző erővonalak száma a fenti módon tetszőleges méretű felület esetén kiszámítható.

Felmerül azonban a kérdés, hogy nem homogén erőtérben (pl. egy ponttöltés erőterében) igaz-e az, hogy ha egy adott helyen a szabály szerint megrajzoljuk az erővonalakat, majd ezeket meghosszabbítjuk, akkor az erővonalkép másutt is meg fog felelni a szabálynak?
Próbáljuk megrajzolni a fenti definíció alapján egy pontszerű, pozitív Q ponttöltés körül kialakuló erőtér erővonalképét. Ehhez meg kell határoznunk, hogy a töltés elektromos erőterét szemléltető sugárirányú erővonalakat milyen sűrűn kell berajzolnunk, hogy az erővonal-ábra a térerősség nagyságát is tükrözze. Ebben az erőtérben a térerősség sugárirányú és gömbszimmetrikus, a töltéstől r távolságban a térerősség mindenütt azonos nagyságú. Emiatt, a térerősségre merőleges ΔA_N felületként felvehetjük a töltés körül elképzelt r sugarú gömbfelület egy elemi $\Delta\Omega$ térszög által kimetszett részét (ábra). A térerősség nagysága itt

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$



a felületelem nagysága pedig a

$$\frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \frac{\Delta A_N}{4r^2\pi}$$

összefüggésből kapható meg (4π a teljes térszög):

$$\Delta A_N = r^2 \Delta\Omega$$

(ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a térszög $\Delta\Omega = \frac{\Delta A_N}{r^2}$ definícióját használjuk). Így az elfogadott megállapodás szerint a kiválasztott elemi felületen áthaladó erővonalak száma:

$$\Delta N_{\Delta A} = (E\Delta A_N)_{számért.} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}r^2\Delta\Omega\right)_{számért.} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega\right)_{számért.}.$$

Vegyük észre, hogy a szükséges erővonalak száma nem függ r-től, ezért, ha a számolást elvégezzük arra az elemi felületre, amelyet *ugyanez* a $\Delta\Omega$ térszög metsz ki egy az előzőtől eltérő r' sugarú gömbfelületből (ábra), akkor a berajzolandó erővonalak $N'_{\Delta A}$ számára azt kapjuk, hogy

$$\Delta N'_{\Delta A} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega\right)_{számért.} = \Delta N_{\Delta A}.$$

Ez azt jelenti, hogy az erővonalak a kiválasztott térszögön belül megszakítás nélkül továbbrajzolhatók, nem kell új erővonalakat beiktatni vagy erővonalakat megszakítani.
Mivel a fenti meggondolás tetszőleges térszögre igaz, a ponttöltés erőterére általában is érvényes, hogy az erőteret – a ponttöltés helyét kivéve – mindenütt megszakítatlan, folytonos erővonalakkal lehet ábrázolni. Érdemes megjegyezni, hogy ez az eredmény annak a speciális körülménynek a következménye, hogy pontszerű töltések elektrosztatikus kölcsönhatása – és ennek következtében egy ponttöltés térerőssége – $1/r^2$-es távolságfüggést mutat. Ezért esik ki a számolásból az r^2, vagyis az erővonalszámnak az r-től való függése.
További meggondolásokból (és a tapasztalatból) az is kiderül, hogy a fenti megállapítás nem csak ponttöltések, hanem tetszőleges töltéseloszlások erőterére is igaz: *az elektrosztatikus erőtér erővonalai megszakítás nélkül, folytonos vonalakként rajzolhatók fel.*

Számítsuk ki most, hogy egy pozitív Q ponttöltésből összesen mennyi erővonalnak kell kiindulni az erővonalak ábrázolására elfogadott szabály szerint. A ponttöltés, mint középpont körül egy r sugarú gömböt felvéve (a gömbfelület mindenütt merőleges a sugárirányú térerősségre), a korábban felírt összefüggés szerint a teljes gömbfelületen átmenő összes erővonalak N_e száma:

$$N_e = (E4r^2\pi)_{számért.} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}4r^2\pi\right)_{számért.} = \left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} .$$

A gömbfelületet metsző erővonalak száma tehát arányos a Q töltés nagyságával. Mivel az erővonalak folytonosak, ez azt jelenti, hogy egy pozitív Q ponttöltésből kiinduló erővonalak száma is ugyanennyi. Ebből az a fontos következtetés adódik, hogy ha *a Q ponttöltést nem gömb alakú, zárt felülettel vesszük körül, a felületet metsző erővonalak száma akkor is ugyanannyi lesz*, mégpedig

$$N_e = \left(\frac{Q}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} .$$

(A zárt felületre vonatkozóan itt annyi megszorítás van, hogy az állítás csak olyan felületre igaz, amelyet a töltésből kiinduló bármely erővonal csak egyszer metsz.)

Ha a töltés negatív, akkor az erővonalak száma ugyanennyi, csak most az erővonalak nem a töltésből indulnak ki, hanem abba érkeznek meg.

Ha ugyanabban a pontban $Q_1>0$ pozitív- és $Q_2<0$ negatív töltést helyezünk el, akkor az eredő térerősség nagyságát a töltésektől r távolságban az

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1-|Q_2|}{r^2}$$

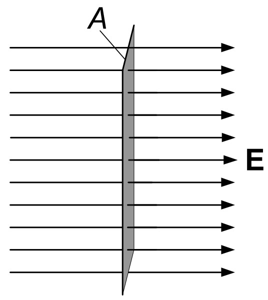
összefüggés adja meg. Ilyenkor a töltéselrendezésből kiinduló, és a töltéseket körülvevő zárt felületet metsző erővonalak száma

$$N_e = \left(\frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} = \left(\frac{Q_1}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} + \left(\frac{Q_2}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} = \left(\frac{Q_1}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} - \left(\frac{|Q_2|}{\varepsilon_0}\right)_{számért.} .$$

Ez a szám úgy is felfogható, hogy a zárt felületből kifelé haladó erővonalak számát pozitívnak-, a zárt felületbe befelé haladó erővonalak számát negatívnak tekintjük, és kiszámítjuk az erővonalszámok algebrai összegét (a kifelé- és befelé haladó erővonalak számának különbségét). Ellenkező előjelű ponttöltések egyidejű jelenléte esetén tehát a töltéseket körülvevő felületet metsző *erővonalak előjeles összege* arányos a felületbe bezárt *eredő töltéssel*.

Ha a zárt felületet metsző erővonalak számát nem pontszerű töltések esetén megvizsgáljuk, akkor kiderül, hogy a fenti megállapítás tetszőleges töltéseloszlások erőterére is igaz. Ezt a tapasztalatot érdemes valamilyen praktikusan használható matematikai formában megfogalmazni. Ehhez azonban szükség van egy olyan mennyiségre, amelynek segítségével automatikusan megkapható egy felületet egyik- illetve másik oldalról átmetsző erővonalak számának különbsége. Ez a mennyiség a fluxus, amit a következő pontban vezetünk be.

Fluxus elektromos erőtérben, az elektrosztatikus erőtér II. alaptörvénye



A felületet metsző erővonalakat előjelesen összeszámláló a mennyiséget az egyszerűség kedvéért először homogén elektromos erőtérben vezetjük be. Az E homogén erőtérben a térerősségre merőleges A felületet (ábra) átmetsző erővonalak számát megadó EA mennyiség az *elektromos erőtérnek az A felületre vonatkozó fluxusa*, és jelölésére rendszerint a Φ_E^A szimbólumot használják:

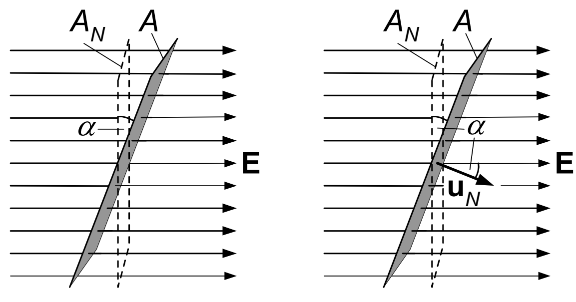
$$\Phi_E^A = EA$$

Az alsó index arra utal, hogy ez az elektromos térerősség fluxusa, a felső index pedig azt mutatja, hogy a fluxus az A felületre vonatkozik. Az így definiált fluxus – a szemléletes jelentését megadó erővonalszámtól eltérően – nem dimenzió nélküli szám, hanem Nm^2/C egységben megadott *fizikai mennyiség*.

A vizsgált felület azonban nem mindig merőleges a térerősségre. Ilyenkor a fluxust (és a felületet metsző erővonalak számát) úgy kapjuk meg, hogy a felületnek a térerősségre merőleges A_N vetületét szorozzuk meg a térerősséggel (*a)* ábra)

$$\Phi_E^A = EA_N = EA\cos\alpha \, .$$

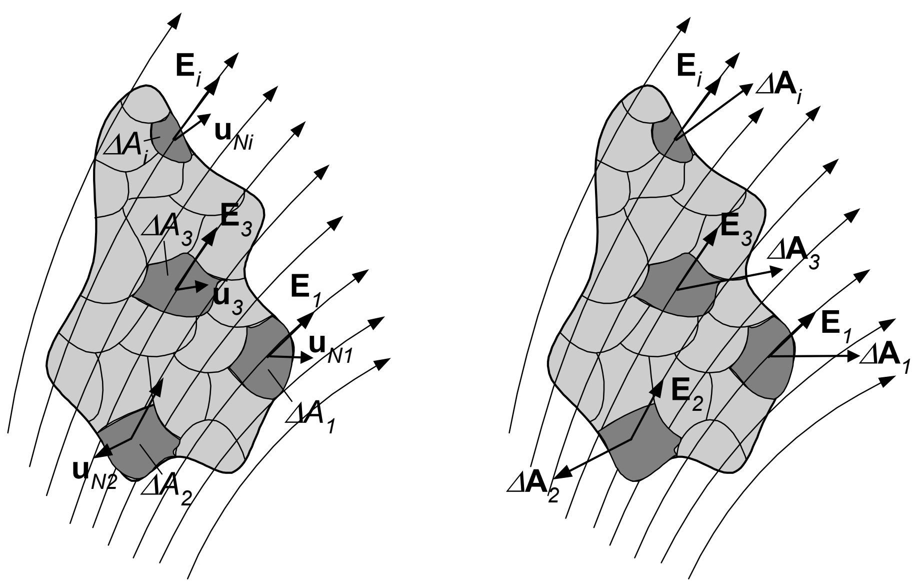
Ebben az esetben a fluxus kiszámítása úgy is történhet, hogy a felület állását a felületre merőleges $\mathbf{u}_N$ *egységvektorral* adjuk meg (*b)* ábra). Ekkor a fenti kifejezés úgy is felfogható, mint az $\mathbf{E}$ vektor és az $A\mathbf{u}_N$ vektor skaláris szorzata (ugyanis α éppen e két vektor által bezárt szög):



a) *b)*

$$\Phi_E^A = \mathbf{E}A\mathbf{u}_N = EA\cos\alpha \, .$$

A legáltalánosabb – és eléggé gyakori – eset az, hogy az erőtér nem homogén, tehát a térerősség helyről-helyre változik, és a felület sem sík. Ilyenkor a szokásos eljárást követjük: a felületet olyan kis elemi részekre (ΔA_i) osztjuk, amelyeken belül a térerősség ($\mathbf{E}_i$) már közelítőleg állandónak tekinthető, és amely közelítőleg sík, tehát az állása megadható a rá merőleges $\mathbf{u}_{Ni}$ egységvektorral (*a)* ábra). Az egyes felületelemekre



a) *b)*

vonatkozó fluxust így a $\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \Delta A_i \mathbf{u}_{Ni}$ kifejezés adja meg.

Ez a kifejezés rövidebben is felírható, ha bevezetjük a *felületvektort*: ezt olyan vektorként definiáljuk, amely merőleges a felületre, és nagysága a felület nagyságával egyenlő.

Eszerint a ΔA_i felületelem felületvektora $\Delta\mathbf{A}_i = \Delta A_i \mathbf{u}_{Ni}$. Ezzel a felületelemre vonatkozó fluxus (*b)* ábra)

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i .$$

A teljes felületre vonatkozó fluxus közelítőleg az elemi $\Delta\Phi_i$ fluxusok összege, vagyis:

$$\Phi_E^A \approx \sum \Delta\Phi_i = \sum \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i .$$

ahol i a felületelem sorszáma.
Az A felületre vonatkozó fluxus pontos értékét úgy kapjuk meg, hogy a felület felosztását egyre finomabbá tesszük (ekkor egyre inkább igaz lesz, hogy a felületelemen belül a térerősség már nem változik, és a felületelem síknak tekinthető), és megkeressük az így kiszámított összeg határértékét:

$$\Phi_E^A = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \Delta\Phi_i = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{E}d\mathbf{A} .$$

A matematikában az ilyen határérték neve: az $\mathbf{E}$ vektornak A felületre vett *felületi integrálja*, amelynek jelölésére az egyenlet jobboldalán álló integrál-szimbólumot használják. Kiszámításának módszereivel a matematika foglalkozik, az általunk vizsgálandó egyszerű esetekben azonban ezekre az ismeretekre nem lesz szükségünk: ezt az integrál-szimbólumot a továbbiakban egy igen finom felosztáson végrehajtott összegzésként kezelhetjük.
Ha a térerősségvonal-képet a tárgyalt megállapodás szerint rajzoljuk meg, akkor egyszerű esetekben az így definiált fluxus számértéke valóban megadja a ΔA felületelemet átmetsző térerősségvonalak számát. A fluxus azonban több, mint egyszerű térerősségvonal-szám:

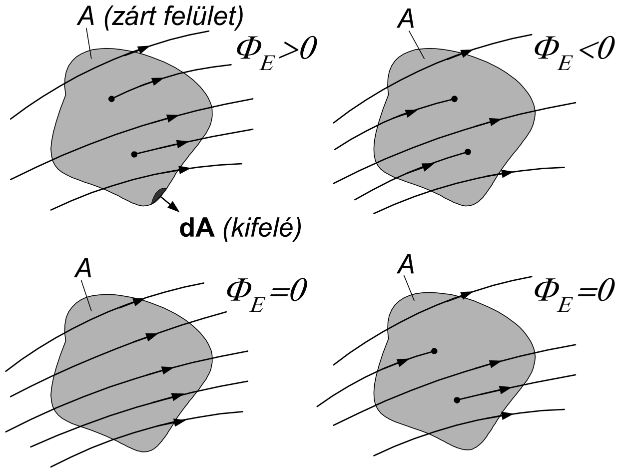
- egyrészt azért, mert a fluxus láthatóan dimenzióval és egységgel rendelkező fizikai mennyiség, amely az elektromos erőteret jellemzi (tehát nem darabszám, mint a metsző erővonalak száma),
- másrészt azért, mert a fluxusnak előjele van, hiszen ha a térerősség és a felületvektor szöge α, akkor skaláris szorzat ismert tulajdonsága miatt a fluxus az $\alpha<90^0$ esetben pozitív, az $\alpha>90^0$ esetben pedig negatív (az előző ábrán pl. az *1* felületelemre vonatkozó fluxus pozitív, a *2* felületelemre vonatkozó fluxus pedig negatív).

Eddig a fluxust hallgatólagosan mindig nyílt (tehát egy görbével határolt, pl. téglalap alakú) felületekre értelmeztük. Vizsgáljuk meg most, hogy egy *zárt felületre* (pl. egy krumpli héjára) hogyan lehet a fluxust kiszámítani. A definíció és az eljárás most is ugyanaz, mint egy nyílt felület esetén, csak el kell döntenünk, hogy az egyes felületelemek felületvektorait a zárt felületbe befelé (a krumpli belseje felé) vagy onnan kifelé irányítjuk. Ettől függni fog a kiszámított fluxus előjele, de a nagysága nem. A szokás az, hogy a felületvektort a zárt felületből kifelé mutató vektornak tekintik. Eszerint a definíció szerint a zárt felületbe befelé mutató elektromos térerősség esetén a fluxus negatív, a felületből kifelé mutató térerősség esetén pedig pozitív. A teljes zárt felületre vonatkozó fluxust ezek után a korábbiakhoz hasonlóan (elemi felületekre vonatkozó fluxusok összegeként) kaphatjuk meg. A *zárt felület* tényét a jelölésben is kiemelik, a fluxust jelölő felületi integrálban az integrál jelre egy *kört* rajzolnak:

$$\Phi_E^{zárt} = \oint_A \mathbf{E}d\mathbf{A} .$$

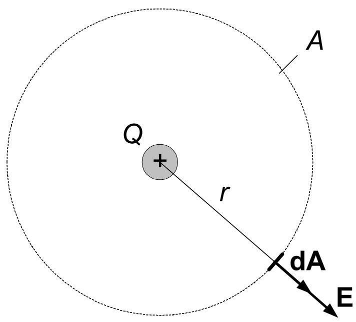
A fluxus geometriai jelentésének megfelelően ennek a mennyiségnek a számértéke a zárt felületet átmetsző erővonalak összegét adja meg. Ez az összeg azonban előjeles összeg: a

zárt felület által határolt térfogatból (a krumpliból) kifelé mutató erővonalakat a fluxusban pozitív előjellel, a térfogatba (a krumpliba) kívülről befelé mutató erővonalakat pedig negatív előjellel vesszük figyelembe. Ezért a zárt felületre vett fluxus számértéke a felület belsejéből kilépő és a felület belsejébe belépő *erővonalak számának a különbségét* adja meg. Ez azt jelenti, hogy egy zárt felületre vett fluxus csak akkor különbözhet nullától, ha a felületen belül erővonalak kezdődnek vagy végződnek, és a kezdődő és végződő erővonalak száma különböző.
Szemléltetésül a mellékelt sematikus ábrán bemutatjuk a zárt felületre vett fluxus néhány esetét.



Érdemes ezt a szemléletes – de egyelőre csupán elméleti érdekességnek tűnő – eredményt összevetni az elektromos erővonalakra vonatkozó tapasztalatokkal.

Mind a térerősségre vonatkozó számítások (pl. ponttöltések esetén), mind pedig a kísérletek azt mutatják, hogy az elektrosztatikus erőtérben az erővonalak töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek. Vagyis egy zárt felületre vonatkozó fluxus akkor lesz nullától különböző, ha a felület töltést zár körül. A kérdés az, hogy ez a fluxus hogyan függ a bezárt töltés nagyságától.
Erre a kérdésre egy speciális esetben már tudjuk a választ: láttuk, hogy egy Q ponttöltésből a Q/ε_0 számértékével megegyező számú erővonal indul ki, tehát a töltést körülvevő felületet metsző erővonalak száma és a fluxus számértéke is ennyi. A fluxus kiszámításának gyakorlása kedvéért azonban most határozzuk meg, hogy egy pozitív Q ponttöltés által keltett elektromos erőtérben mennyi a fluxus egy olyan r sugarú gömbfelületen, amelynek középpontja a töltéssel esik egybe (ábra).



Mivel a ponttöltés erőterében a térerősség sugárirányú, és a gömbfelület bármely elemi részének felületvektora is sugárirányú, a térerősség és a felületvektor a felület minden helyén párhuzamos egymással. Ebből – a skaláris szorzatra vonatkozó szabály szerint – következik, hogy $\mathbf{EdA} = EdA$. Másrészt a térerősség nagysága a gömbfelület minden pontján ugyanakkora, tehát E kiemelhető, így a gömbfelületre vett fluxus:

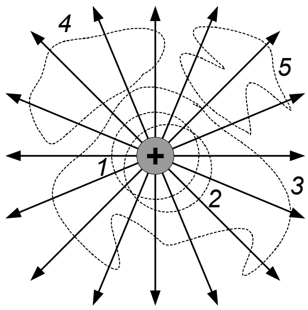
$$\Phi_E^{zárt} = \oint_A \mathbf{EdA} = \oint_A EdA = E\oint_A dA = E4r^2\pi .$$

Az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy a gömbfelület felületelemeinek összege a gömb felületével egyenlő.
A fenti kifejezésbe a ponttöltés ismert térerősségét beírva a várakozásnak megfelelően a

$$\Phi_E^{zárt} = \oint_A \mathbf{EdA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}4r^2\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

eredményt kapjuk. Vagyis ebben a speciális esetben a zárt felületre vett fluxus arányos a felület által bezárt ponttöltés nagyságával. (Itt látszik az ε_0 állandó bevezetésének egyik formai előnye: a törvényből kiesett a 4π szorzó.)

Korábban láttuk, hogy a szabályosan megrajzolt erővonalképen egy ponttöltésből kiinduló erővonalak száma csak a ponttöltés nagyságától függ. Ebből következik, hogy a zárt felületet metsző erővonalak száma – és így a fluxus – akkor sem változik meg, ha a töltést bezáró zárt felület alakját vagy elhelyezkedését megváltoztatjuk.



Ezt szemlélteti a mellékelt ábra, amelyen jól látható, hogy az eredeti, koncentrikus gömbfelületet (*1*), az eltolt gömbfelületet (*2*) és egy tetszőleges alakú, a töltést körülvevő zárt felületet (*3*) metsző erővonalak előjeles összege (az ábrán 16), és így a fluxus is ugyanaz. Vagyis a fenti összefüggés *tetszőleges alakú, a ponttöltést körülvevő felület esetén érvényes*. Ha a zárt felületet úgy vesszük fel, hogy nem zárja körül a ponttöltést (*4,5*), akkor a térfogatba bemenő és az abból kimenő erővonalak száma megegyezik, és a fluxus nulla lesz.

****

Itt már valóban tetszőleges alakú lehet a zárt felület. A fluxus bevezetésével ugyanis megszűnik az a probléma is, hogy bonyolultabb felület esetén egy erővonal kettőnél többször is metszheti a felületet: a zárt felület által határolt térfogatból kilépő majd oda újra belépő erővonalak a fluxusban nem adnak járulékot. Ez látható a fenti ábra *3* felületénél, ahol a metszések előjeles összege a gömbfelületekhez hasonlóan *16*, és az *5* felületnél, ahol ez az összeg nulla (nincs bezárt töltés).

****

Az is könnyen belátható, hogy több ponttöltés esetén az egyes töltések által keltett erőterekben a metsző erővonalak számai és így a fluxusok is összeadódnak, így a zárt felületre vett fluxus kifejezésében a zárt felület belsejében lévő töltések összege szerepel. Mivel pedig bármilyen töltésalakzat felosztható pontszerű töltésekre, az állítás tetszőleges töltésekre igaz.

Ha a felületen belül negatív töltések is vannak, akkor azok a térfogatba befelé mutató térerősséget keltenek, és ennek az erőtérnek az erővonalai a térfogatba befelé mutatnak. A fluxus kiszámításánál ezek negatív járulékot adnak, így végül megállapíthatjuk, hogy a zárt felületre vett fluxusban a felületen *belül elhelyezkedő töltések előjeles összege* ($\sum Q$) szerepel, ezért érvényes az alábbi összefüggés

$$\oint_A \mathbf{E}d\mathbf{A} = \frac{\sum Q}{\varepsilon_0}.$$

Ez az összefüggés *tetszőleges zárt felületre, és tetszőleges töltéseloszlásra* igaz. Ha a zárt felület nem zár be töltést vagy a bezárt töltések előjeles összege nulla, akkor a jobboldalon nulla áll: a zárt felületre vett fluxus nulla. Ezt a törvényt gyakran az *elektrosztatika Gauss-törvényének*, vagy az *elektrosztatikus erőtér II. alaptörvényének* nevezik.

A törvény lényegében azt a tapasztalatot foglalja össze matematikai formában, hogy az elektrosztatikus erőtérben az erővonalak töltéseken kezdődnek és végződnek, kezdő- és végpontjuk között pedig folytonos vonalak. Ez a megállapítás úgy is megfogalmazható, hogy *az elektrosztatikus erőtér forrása a töltés*.

****

Az elektrosztatikus erőtérben egy zárt felületre vonatkozó $\Phi_E^{zárt}$ fluxust gyakran a zárt felület által határolt térrész *forráserősségének* nevezik. Az elnevezés a fluxus geometriai jelentésével hozható összefüggésbe. Ha a felület belsejében lévő eredő töltés pozitív, akkor a forráserősség számértéke a térrészből kilépő – ott

„keletkező” – erővonalak számát adja meg, negatív eredő töltés esetén pedig a térrészbe bemenő – ott „eltűnő” – erővonalak számával egyenlő.
****

Ha a zárt felületen belül folytonos eloszlású töltés van, akkor a teljes töltést a *térfogati töltéssűrűség* segítségével határozhatjuk meg. Ha egy elemi ΔV térfogatban ΔQ töltés van, akkor ott a térfogati töltéssűrűség közelítő értéke $\rho \approx \frac{\Delta Q}{\Delta V}$. A töltéssűrűség egy pontban érvényes értékét úgy kapjuk meg, hogy a pont körül felvett térfogatot egyre csökkentjük, és meghatározzuk a $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$ határértéket. Ez az adott pontban a térfogati töltéssűrűség, amely előjeles mennyiség, előjele az adott helyen lévő töltés előjelével egyezik meg.
Ha a töltéssűrűséget a zárt felület által határolt térfogat minden pontjában ismerjük, akkor a zárt felület által körülzárt Q töltés meghatározására a szokásos eljárást alkalmazzuk: a teljes V térfogatot elemi ΔV_i térfogatokra osztjuk, a $\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i$ összefüggés segítségével kiszámítjuk a töltést az egyes térfogatelemekben, majd az így kapott töltéseket összeadjuk (előjelesen):

$$Q \approx \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i \,.$$

Ezzel megkaptuk a töltés közelítő értékét. A töltés pontos értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a V térfogat felosztását egyre finomítjuk (az elemi térfogatokat egyre kisebbre választjuk), és kiszámítjuk a fenti összeg határértékét, amelynek jelölésére az alábbi egyenlet jobboldalán álló szimbólumot használják:

$$Q = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i = \int_V \rho dV \,.$$

Az itt használt integrált a benne szereplő, helytől függő $\rho(x, y, z)$ függvény V térfogatra vett térfogati integráljának nevezik. Egy ilyen integrál kiszámításának részletes szabályaival itt nem foglalkozunk, számunkra elegendő az integrál szemléletes, igen finom felosztáson elvégzett összegzésként történő értelmezése.
A folytonos töltéseloszlásból származó töltésnek térfogati integrállal történő kiszámításával az elektrosztatika Gauss-törvénye az általánosabb

$$\oint_A \mathbf{E}d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

alakba írható.
****