

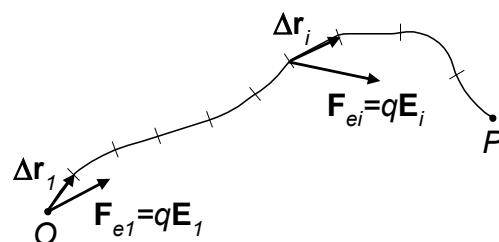
Elektromos töltés helyzeti energiája, elektromos potenciál, az elektrosztatika I. alaptörvénye

A mechanikában láttuk, hogy konzervatív erőterben helyzeti energia vezethető be. Azt a kérdést, hogy az elektrosztatikus erőter konzervatív vagy nem, csak a tapasztalat segítségével lehet eldönteni. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az elektrosztatikus erőter konzervatív, tehát egy elektromos töltésnek az elektromos erőterben helyzeti energiája van.

A helyzeti energiát itt is a mechanikában definiált módon, az erőter által végzett munka segítségével adjuk meg, amely konzervatív erőterben nem függ az elmozduló töltés pályájától, csak az elmozdulás kezdő- és végpontjától.

Elektromos erőterben egy q töltésnek az O pontból a P pontba történő tetszőleges pályán történő elmozdulása során (ábra) az erőter által végzett munka:

$$W_{\text{erőter}} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{F}_{ei} \Delta \mathbf{r}_i = \int_O^P \mathbf{F}_e \, d\mathbf{r} = q \int_O^P \mathbf{E} \, d\mathbf{r}.$$



A helyzeti energia definíciójának megfelelően az erőterben lévő q töltés helyzeti (potenciális) energiája a P pontban, az O pontra vonatkozóan:

$$E_h^O(P) = -W_{\text{erőter}} = -q \int_O^P \mathbf{E} \, d\mathbf{r}.$$

Mint említettük, a két pont közötti elmozdulás pályáját nem kell megadni, hiszen ez a munka konzervatív erőterben nem függ a pályától. Mint minden helyzeti energia, egy töltés elektrosztatikus helyzeti energiája is függ a vonatkoztatási ponttól.

A q töltés helyzeti energiája nem csak a helytől és a jelenlévő erőterétől függ, hanem – érthető módon – magától a töltéstől is. A helyzeti energia azonban *arányos* a töltéssel, ezért, ha a helyzeti energiát elosztjuk a töltéssel, akkor a töltéstől független mennyiséget kapunk:

$$U^O(P) = U_{Op} = \frac{E_h^O(P)}{q} = - \int_O^P \mathbf{E} \, d\mathbf{r}.$$

Ez a mennyiség már csak az erőterétől és a P pontnak az O vonatkoztatási ponthoz viszonyított helyzetétől függ. Ezzel az eljárással tehát az erőter bármely P pontjához hozzárendelhetünk egy skaláris mennyiséget (számszerűleg az egységnyi töltésen az OP elmozdulás során végzett munkát), amelyet az *elektrosztatikus erőter P pontbeli potenciáljának* nevezünk. Ilyen módon a töltéssel való osztás révén a töltés egy jellemző adatából, a helyzeti energiából, a tér egy jellemző adatát, a potenciált kapjuk.

A potenciál egysége, definíciójának megfelelően: $1 \frac{J}{C}$, amit *volt*-nak neveznek és

jelölésére a V betűt használják. Ezzel az egység: $1 \frac{J}{C} = 1V$.

A potenciál – hasonlóan a helyzeti energiához – mindig egy vonatkoztatási ponthoz (itt az O ponthoz) viszonyított mennyiség. Ez azonban rendszerint nem okoz nehézségeket, mert egy fizikai probléma megoldása során általában nem a helyzeti energia és a potenciál

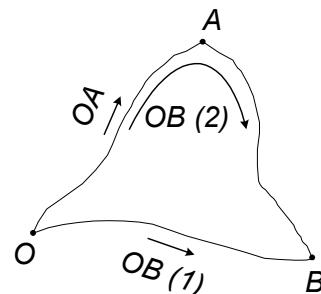
abszolút értékére van szükségünk, hanem azok megváltozására (két pontban felvett értékeik különbségére), ami viszont nem függ a vonatkoztatási ponttól, amint azt a helyzeti energiára vonatkozóan a mechanikában már kimutattuk. Bár ez az állítás nyilvánvalóan a potenciálra is igaz (a két mennyiség csupán egy állandó szorzóban különbözik egymástól), példaként itt most a potenciálra vonatkozó bizonyítást is megadjuk.

Két pont között a potenciálkülönbséget úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk az egyes pontokban a közös vonatkoztatási ponthoz viszonyított potenciált, majd kiszámítjuk ezek különbségét. Az ábrán látható B pontnak az A ponthoz viszonyított U_{AB} potenciálkülönbségét az

$$U_{AB} = U_{OB(1)} - U_{OA} = U_{OB(2)} - U_{OA}$$

kifejezés, illetve a potenciál definíciójának felhasználásával kapott

$$\begin{aligned} U_{AB} &= -\left(\int_O^A \mathbf{E} d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{r} \right) - \left(-\int_O^A \mathbf{E} d\mathbf{r} \right) = \\ &= -\int_O^A \mathbf{E} d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{r} + \int_O^A \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{r} \end{aligned}$$



összefüggés adja meg.

Ennek megfelelően egy elemi $d\mathbf{r}$ elmozdulás kezdő- és végpontja közti potenciálkülönbséget a

$$dU = -\mathbf{E} d\mathbf{r}$$

skaláris szorzat adja meg.

A mechanikában láttuk, hogy a konzervatív erőternek az a sajátja, hogy munkája független a pályától, úgy is megfogalmazható, hogy egy zárt L görbén körbejárva, a végzett összes munka nulla. Esetünkben ez azt jelenti, hogy elektrosztatikus erőterben egy q töltést egy zárt L görbén körbemozgatva, a tér által végzett összes munka nulla lesz:

$$q \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0.$$

Ebből következik, hogy a zárt görbe mentén a potenciálkülönbségeket összegezzük, akkor szintén nullát kapunk:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$$

Ezt az összefüggést gyakran az *elektrosztatika I. törvényének* nevezik, ami tehát azt fejezi ki, hogy az elektrosztatikus tér konzervatív.

Ebből a törvényből következik, hogy az elektrosztatikus tér erővonalai nem lehetnek akármilyenek. Például nem lehetségesek önmagukban záródó erővonalhurkok, mert ha zárt görbeként egy ilyen erővonalhurkot választunk, akkor erre kiszámítva a fenti körintegrált, biztosan nullától különböző eredményt kapunk. Ennek az az oka, hogy ilyenkor a térerősség és az elmozdulás a görbe minden pontján egyirányú vagy ellentétes irányú egymással, ezért az $\mathbf{E} d\mathbf{r}$ elemi skaláris szorzatok vagy mind negatívak vagy mind pozitívak, így összegük nem lehet nulla.

Potenciál konkrét erőterekben

Most néhány egyszerű esetben bemutatjuk a potenciál kiszámításának módját.

Potenciál homogén erőterben

A legegyszerűbb, ezért bonyolultabb erőterek közelítéseként gyakran használt erőter a homogén erőter, amelyben a térerősség mindenütt ugyanolyan nagyságú és irányú. Az erőteret egyenletes sűrűségű párhuzamos erővonalakkal szemléltethetjük (ábra). Homogén erőterben a potenciális energia és a potenciál meghatározása viszonylag egyszerű. Így például az ábrán látható homogén elektromos erőterben egy pozitív q elektromos töltés helyzeti energiája a P_1 pontban ($E_h^O(P_1)$), illetve az elektromos potenciál a tér ugyanezen pontjában az O ponthoz viszonyítva ($U_O(P_1)$) az alábbi módon kapható meg:

$$E_h^O(P_1) = -q \int_O^{P_1} \mathbf{E} d\mathbf{r} = qEd_1.$$

illetve

$$U^O(P_1) = \frac{E_h^O(P_1)}{q} = Ed_1.$$

(Az integrálásnál, felhasználtuk, hogy a tér munkavégzése nem függ a választott útvonaltól, ezért egy célszerű útvonalat választottunk, ahol a munka az OP_1 szakaszon nulla, hiszen itt $\mathbf{E} \perp d\mathbf{r}$.)

Mint látható, homogén térben a potenciál és a helyzeti energia is csak attól függ, hogy a vizsgált pont és a vonatkoztatási pont egymástól mért távolságának a térerősséggel párhuzamos vetülete (d_i) mekkora. Az ábrán bejelölt P_2 pontban természetesen mind a helyzeti energia, mind pedig a potenciál negatív: $E_h^O(P_2) = -qEd_2$, illetve $U^O(P_2) = -Ed_2$.

Ponttöltés potenciálja

A potenciál (illetve helyzeti energia) a térerősség integrálásával kapható meg. Következő példaként (ábra) számítsuk ki egy pozitív Q ponttöltés által létrehozott elektromos erőterben a potenciált a ponttöltéstől mért r távolság függvényében.

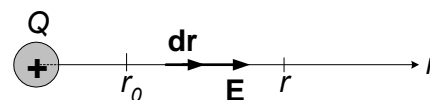
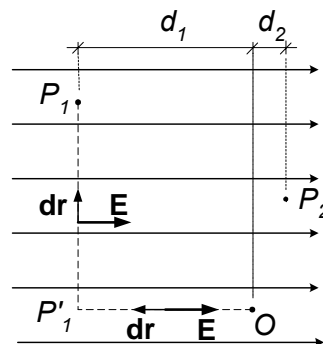
Ha a potenciál vonatkoztatási pontját az $r = r_0$ pontban vesszük fel, akkor, felhasználva a ponttöltés erőterére vonatkozó ismereteinket, a potenciál definíciója alapján írhatjuk

$$U^{r_0}(r) = -\int_{r_0}^r \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_{r_0}^r E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr.$$

Az integrálás eredménye:

$$U^{r_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Ha vonatkoztatási helyként a ponttöltéstől végtelen távoli pontot ($r_0 \Rightarrow \text{végtelen}$) választunk, akkor a leggyakrabban használt



$$U^\infty(r) = U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

alakot kapjuk (ennek jelölésére általában a külön index nélküli U használatos). Látható, hogy ezzel a választással egyben a potenciál nulla pontját is a végtelen távoli pontban vettük fel.

Két tetszőleges pont (r_1 és r_2) közötti potenciálkülönbség a fentiek alapján:

$$\Delta U_{12} = U(r_2) - U(r_1) = U_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

ahol alkalmaztuk a szokásos $\Delta U_{12} = U_{12}$ jelölést. A potenciálkülönbség – a várakozásnak megfelelően – nem függ a vonatkoztatási pont választásától.

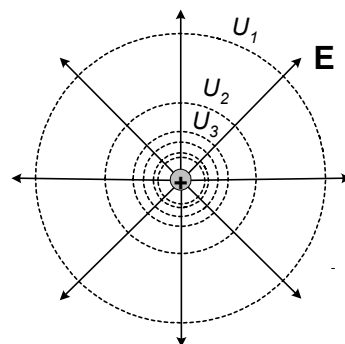
Gyakran fontos ismerni egy elektromos térben a potenciálviszonyokat, vagyis azt, hogy a potenciál milyen irányban változik, és milyen ütemben. Ezt szemléletes módon lehet bemutatni azoknak a felületeknek a berajzolásával, amelyek mentén mozogva a potenciál állandó. Ezek az *ekvipotenciális felületek*, amelyek – a potenciál definíciójából következően – a térerősségvonalakra mindenütt merőlegesek. Ha ezeket úgy rajzoljuk be, hogy a szomszédos felületek potenciálkülönbsége meghatározott érték, akkor az ábráról a potenciál nagyságának helyfüggését is leolvashatjuk (hasonlóan, ahogy a térkép szintvonalairól a magasság változásait).

Ponttöltés esetén a fenti egyenletből könnyen megkaphatjuk az ekvipotenciális felületek egyenletét:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = U_n,$$

ahol U_n különböző potenciálértékeket jelöl, amelyeket az n sorszámmal különböztethetünk meg. Az egyenletből következik, hogy az U_n potenciálértékekhez tartozó ekvipotenciális felületek gömbök (ábra), amelyeknek sugara

$$r_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 U_n}.$$



Az ábrán az egyes potenciálértékek között ugyanakkora a különbség (a potenciálok értéke rendre $1, 2, 3, \dots$ egység). A szintvonalak szemléletesen is mutatják, hogy a töltéshez közeledve a potenciál értéke egyre meredekebben emelkedik (az azonos potenciálkülönbségű görbék sűrűsödnek).

Több ponttöltés együttes erőterében a potenciál kiszámítása egyszerű, ha feltételezzük, hogy a szuperpozíció elve érvényes. Ekkor az egyes töltések által az adott helyen (pl. egy P pontban) létrehozott potenciálokat egyszerűen összeadjuk (a potenciál skaláris mennyiség):

$$U(P) = \sum_i U_i(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i},$$

ahol Q_i az i -edik ponttöltés töltése (előjelesen), r_i a távolsága a P ponttól.

Folytonos töltéeloszlás potenciálja

Egy V térfogatban folytonosan eloszló töltés potenciálját a Gauss-törvény tárgyalásánál megismert módon, a töltésnek pontszerű részekre történő osztásával kaphatjuk meg. Ha a ρ térfogati töltéssűrűséget mindenütt ismerjük, akkor egy P pont körül felvett elemi dV térfogatban lévő töltést ki tudjuk számítani a $dQ = \rho dV$ összefüggéssel. Ha feltételezzük, hogy érvényes a szuperpozíció

elvé – és vákuumban, időben állandó erőter esetén a tapasztalat szerint érvényes – akkor a pontszerűnek tekintett elemi részöltések által létrehozott potenciál:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r},$$

ahol r a dV térfogatelem a távolsága a P ponttól.

Hasonló módon járunk el, ha a töltés egy A felületen oszlik el folytonosan, és a felület minden pontjában ismerjük a σ felületi töltéssűrűséget. Ennek definíciója a következő: ha egy elemi ΔA

felületen ΔQ töltés van, akkor ott a felületi töltéssűrűség közelítő értéke $\sigma \approx \frac{\Delta Q}{\Delta A}$. A felületi

töltéssűrűség egy pontban érvényes értékét úgy kapjuk meg, hogy a pont körül felvett felületet egyre

csökkentjük, és meghatározzuk a $\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$ határértéket. Ez az adott pontban a felületi

töltéssűrűség, amely előjeles mennyiség, előjele az adott helyen lévő töltés előjelével egyezik meg.

Ha az A felületet elemi dA részekre osztjuk, akkor az egyes felületelemeken lévő, pontszerűnek tekinthető töltés: $dQ = \sigma dA$, így a felületen elhelyezkedő töltés által okozott potenciál egy P pontban

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma dA}{r},$$

ahol r a dA felületelem a távolsága a P ponttól.

Elektromos térerősség számítása a potenciál helyfüggésének ismeretében

A mechanikában láttuk, hogy egy konzervatív erőterben a helyzeti energia helyfüggésének ismeretében meghatározható egy tömegpontra ható erő. Ugyanez az elektromos kölcsönhatás esetén is megtehető. Ha az elektromos erőterben egy q töltés helyzeti energiája csak az x -koordináta függvénye, akkor a

$$dE_h(x) = -F_{ex} dx$$

összefüggésből a töltésre ható erő x -komponense

$$F_{ex} = -\frac{dE_h(x)}{dx}.$$

Mivel a töltésre ható erő x komponense elektromos erőterben $F_x = qE_x$, a fenti összefüggésből a térerősség is megkapható:

$$E_x = -\frac{1}{q} \frac{dE_h(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{E_h(x)}{q} \right) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Általános (három dimenziós) esetben a potenciál mindhárom koordinátától függ, azaz $U = U(x, y, z)$.

Ennek a függvénynek az elemi megváltozása egy $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$ elemi elmozdulásnál a három koordináta mentén történő elmozdulások közben bekövetkező változások összegeként írható fel:

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Másrészt a potenciál megváltozása kifejezhető a térerősséggel is:

$$dU(x, y, z) = -\mathbf{E} d\mathbf{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz).$$

A két kifejezés összehasonlításából kapjuk, hogy

$$E_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z},$$

vagyis a térerősség a potenciál helyfüggésének ismeretében kiszámítható.

Elektromos töltések kölcsönhatási energiája

Eddig egy töltés helyzeti energiáját egy ismeretlen forrásból származó elektromos erőterben vizsgáltuk, és feltételeztük, hogy a vizsgált töltés az erőteret nem változtatja meg. Az erőteret azonban sztatikus esetben mindig valamilyen töltés hozza létre, így a kiszámított energia a vizsgált töltés és a teret létrehozó ismeretlen töltés kölcsönhatásának a következménye. Azt is mondhatjuk, hogy ez a helyzeti energia a kölcsönható töltések közös energiája, amit *kölcsönhatási energiának* nevezünk. Az, hogy a kölcsönhatási energia valóban mindkét kölcsönható töltéshez tartozik, jól látszik két ponttöltés kölcsönhatása esetén.

Helyezzünk el két ponttöltést (Q_1 és Q_2) egymástól r távolságban, és számítsuk ki először, hogy mennyi a helyzeti energiája a Q_2 töltésnek egy Q_1 töltés által létrehozott elektromos erőterben.

A Q_1 töltéstől r távolságban a potenciál

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r},$$

a Q_2 töltés helyzeti energiája itt

$$E_{h2} = U_1 Q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

Látszik, hogy ebben az energia-kifejezésben teljesen szimmetrikus módon szerepel a két töltés, és az összefüggésben szereplő r is az egymástól mért távolság: az energia nem rendelhető hozzá kizárólagosan egyik töltéshez sem.

Még nyilvánvalóbbá válik az energia közös jellege, ha kiszámítjuk, hogy mennyi a helyzeti energiája a Q_1 töltésnek a Q_2 töltés által létrehozott elektromos erőterben. A Q_2 töltéstől r távolságban a potenciál

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r},$$

a Q_1 töltés helyzeti energiája itt

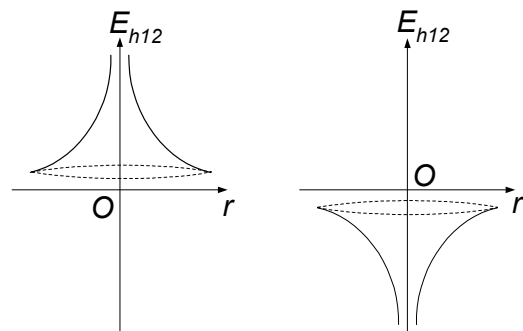
$$E_{h1} = U_2 Q_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_1}{r},$$

ami megegyezik az előző eredményünkkel.

Vagyis bármelyik töltés energiáját számoljuk ki a másik erőterében, ugyanazt az eredményt kapjuk. Ismét azt látjuk, hogy ez az energia nem rendelhető hozzá egyik töltéshez sem: ez a két ponttöltésből álló rendszer közös helyzeti energiája vagy más néven a két töltés kölcsönhatási energiája. Ezt a kölcsönhatási energiát az E_{h12} szimbólummal jelölve, egymástól r távolságban lévő ponttöltések esetén

$$E_{h12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

Mivel két töltés kölcsönhatása számos esetben igen fontos szerepet játszik (ilyen kölcsönhatás tartja össze pl. az atomban a pozitív töltésű magot és a negatív töltésű elektronokat), ennek az energiának a távolságfüggését szemléletesen is bemutatjuk a mellékelt ábrán. Az ábra a) része két



azonos előjelű ponttöltés kölcsönhatási energiáját mutatja a két töltés egymástól mért r távolságának függvényében. A $b)$ ábra ugyanezt mutatja két ellentétes előjelű ponttöltés esetén.

Az ábrákon azt is érzékeltetjük, hogy az O pontbeli töltéshez bármely irányból közelítjük a másik töltést, mindig ugyanolyan jellegű a helyzeti energia változása. Azonos töltések esetén tehát a közelített töltésnek egy helyzeti energia-hegyet kell legyőznie, vagyis a rendszer energiája a közeledésnél nő, míg ellentétes töltések esetén a közelített töltés egy helyzeti energia-gödörbe esik be, és a rendszer energiája csökken a nulla helyzeti energiának megfelelő végtelen távoli helyzethez képest. A helyzeti energia nullpontjának ilyen megválasztása az oka annak, hogy vonzó kölcsönhatás esetén a rendszer helyzeti energiája negatív.

Ha több ponttöltésből ($Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$) álló töltésrendszer kölcsönhatási energiáját akarjuk kiszámítani, akkor kiválasztunk egy töltést, és meghatározzuk a kiválasztott – pl. az i -edik Q_i – töltés helyén a többi töltés által létrehozott U_i potenciált. Az i -edik töltés helyzeti energiáját ekkor az

$$E_{hi} = Q_i U_i$$

összefüggés adja meg. A töltések teljes helyzeti energiáját, vagyis a töltésrendszer kölcsönhatási energiáját, az egyes ponttöltések helyzeti energiáinak összegéből kaphatjuk meg:

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i.$$

Az $\frac{1}{2}$ szorzóra azért van szükség, mert az összegzés során minden töltéspár kölcsönhatási energiáját kétszer vesszük figyelembe.

Mivel ponttöltésekről van szó, a helyzeti energia könnyen kiszámítható. Ha az i -edik és j -edik töltés közötti távolságot r_{ij} -vel jelöljük, akkor az i -edik töltés helyén a többi töltés által létrehozott U_i potenciál

$$U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j, j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}}.$$

Az i -edik töltés helyzeti energiája tehát

$$E_{hi} = Q_i U_i = Q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j, j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}}.$$

Az összes töltés helyzeti energiája, vagyis a töltésrendszer kölcsönhatási energiája

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(Q_i \sum_{j, j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i, j, i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}.$$

Határozzuk meg a fentiek alapján egy *vezetőn elhelyezkedő* Q töltés helyzeti energiáját. Ehhez a vezetőn lévő töltést ponttöltéseknek tekinthető apró ΔQ_i részekre osztjuk, és az így kapott töltésrendszer helyzeti energiáját számítjuk ki. Tudjuk, hogy egy vezető minden pontján azonos a potenciál. Jelöljük ezt U -val. Ekkor a potenciál a ΔQ_i résztöltés helyén is U , így ennek a töltésnek a helyzeti energiája

$$E_{hi} = \Delta Q_i U.$$

Az összes töltés helyzeti energiája pedig

$$E_{kh} = \frac{1}{2} \sum_i E_{hi} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta Q_i U = \frac{1}{2} U \sum_i \Delta Q_i = \frac{1}{2} U Q.$$

Egy vezetőn elhelyezett töltés helyzeti energiája tehát arányos a vezetőn lévő töltéssel és a vezető potenciáljával.

Egyszerű töltéselrendezések elektromos erőtere

Az elektrosztatikus tér alaptörvényei segítségével egyszerűbb töltéseloszlások által keltett elektromos erőterben a térerősség illetve az elektromos potenciál kiszámítható. Az általunk használt integrál-törvények ilyen célra csak akkor használhatók, ha a töltéseloszlásnak valamilyen szimmetriája van (pl. gömbszimmetria).

Gömbszimmetrikus töltéseloszlások tere

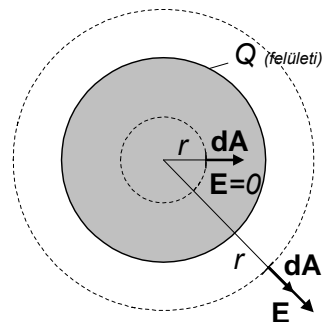
Ponttöltés

A legegyszerűbb ilyen „töltéseloszlás” a ponttöltés. Ha egy magában álló ponttöltés terére alkalmazzuk a II. alaptörvényt, akkor természetesen visszakapjuk a Coulomb törvényből kapott térerősség-kifejezést, hiszen abból „találtuk ki” a II. alaptörvényt.

Vezető gömb

Kevésbé nyilvánvaló egy R sugarú vezető gömb elektromos tere, amelyre Q pozitív töltést vittünk fel. A vezető olyan tulajdonságú anyag, amelyen az elektromos töltések szabadon elmozdulhatnak, ezért a töltések – amelyek taszítják egymást – egyensúlyban egymástól a lehető legtávolabb, tehát a gömb felületén helyezkednek el.

A számításhoz célszerűen felvett felület egy gömbfelület (a végeredmény a felület választásától nem függ), amelynek középpontja a töltött gömb középpontjával egybeesik (ábra). Mivel ez a töltéseloszlás gömbszimmetrikus, a tér is az lesz, tehát a térerősség nagysága (E) a felvett gömbfelület minden pontjában azonos, és sugárirányban kifelé mutat. Így a felületen mindenütt $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A}$, és $E = \text{állandó}$, ezért az elektrosztatika II. alaptörvénye egyszerű alakban írható fel:



$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4r^2 \pi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

A töltött gömbön belül nincs töltés, így a gömb felületén belül felvett zárt felület által bezárt töltés $Q = 0$, a gömbön kívül felvett zárt felület által bezárt töltés Q . Így a töltött gömb tere

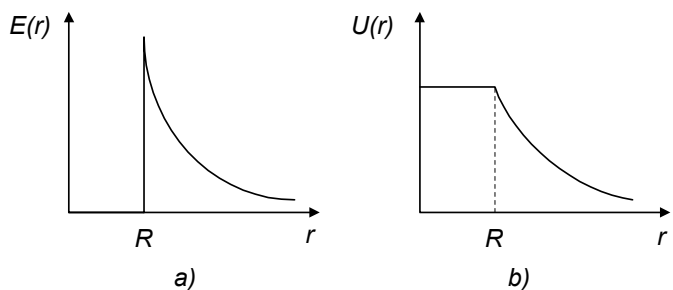
$$E = 0, \quad \text{ha } r < R$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{ha } r \geq R,$$

vagyis a töltött vezető gömb belsejében nincs elektromos tér, a gömbön kívül eső pontokban pedig a tér olyan, mintha a gömb töltése a centrumában koncentrált ponttöltés lenne (ezért lehet a ponttöltések kölcsönhatását töltött gömbök segítségével megmérni). A térerősség távolságfüggését az alábbi ábra a) része mutatja.

A potenciál most is a térerősség integrálásával kapható meg.

A gömbön kívül a térerősség a ponttöltés térerősségével azonos, ezért ott a potenciál is megegyezik a ponttöltés potenciáljával:



$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad r > R$$

A gömb felületén $r=R$, a potenciál mindenütt ugyanaz

$$U(R) = U_{gömb} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad r=R$$

A gömbön belül nincs erőtér, a potenciál ezért állandó, és azonos a gömb felületén lévő potenciállal:

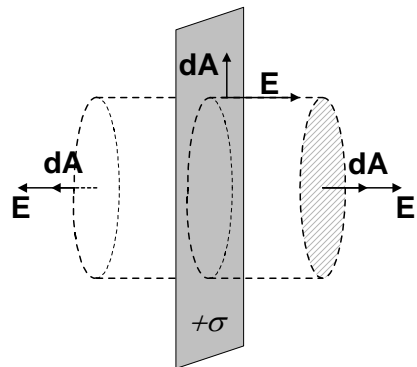
$$U_{belül} = U(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad r \leq R.$$

A potenciál távolságfüggése a fenti ábra b) részén látható.

Térerősség és potenciál töltött síkok környezetében, a síkkondenzátor

A legegyszerűbbek, ezért a valóságos terek közelítéseként gyakran használt erőterek a homogén erőterek. Az alábbiakban ilyen erőterekkel kapcsolatos számításokat ismertetünk.

Szimmetria-megfontolások alapján belátható, hogy homogén tér jön létre egy elektromosan töltött, végtelen kiterjedésű lemez két oldalán, amelyen a *felületi töltéssűrűség* (egy elemi felületen elhelyezkedő dQ töltés és a dA felület hányadosa: $\sigma = dQ/dA$) mindenütt azonos. Számítsuk ki a térerősséget (E_+), ha a lemez töltése pozitív. A térerősség az elektrosztatika II. alaptörvénye alapján egyszerűen megkapható, ha a fluxust olyan zárt felületre számítjuk ki, amelynek csak térerősséggel párhuzamos és térerősségre merőleges részei vannak (ábra). Erre a zárt felületre vett fluxus



$$\Phi_A^{zárt} = \oint \mathbf{E}_+ \cdot d\mathbf{A} = 2 \int_A E_+ dA = 2E_+ \int_A dA = 2E_+ A$$

másrészt viszont a II. alaptörvény szerint

$$\Phi_A^{zárt} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}.$$

A két egyenletből (felhasználva, hogy $\sum Q = \sigma A$) a térerősség:

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Negatívan töltött lemezre ugyanilyen nagyságú, csak ellenkező irányú térerősséget kapunk (ábra). Az eredmények szigorúan véve végtelen kiterjedésű lemezre igazak,

közéltőleg érvényesek azonban véges lemezeknél is, ha a lemeztől mért távolság sokkal kisebb, mint a lemez szélétől mért távolság.

Érdekes és fontos eset, ha két olyan lemezt helyezünk el egymással párhuzamosan és egymáshoz közel, amelyeken a töltéssűrűség azonos nagyságú, de ellentétes előjelű ($+\sigma$ és $-\sigma$). Ekkor - mint az alábbi ábra is mutatja - a két lemez között a terek egyirányúak, ezért ott a térerősség megduplázódik, a lemezeken kívül azonban a terek kioltják egymást. Így a két lemez között homogén tér jön létre, amelynek nagysága:

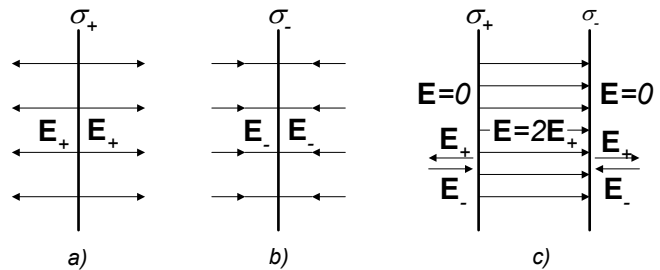
$$E = 2E_+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

iránya pedig a pozitívan töltött lemeztől a negatív felé mutat.

Mivel a kialakult erőtér homogén, könnyen kiszámíthatjuk az ellentétesen töltött párhuzamos vezető-lemezek közötti potenciálkülönbséget is. A pozitív (+) lemez U potenciálja a negatívhoz (-) képest:

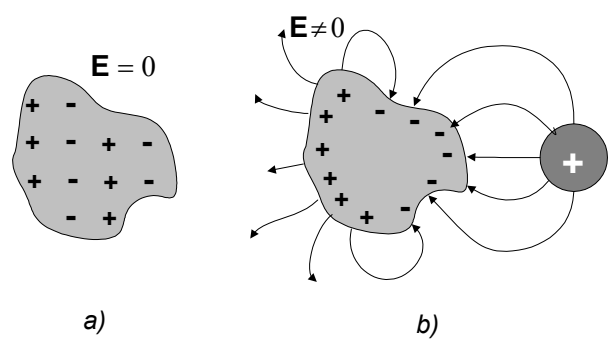
$$U = -\int_{-}^{+} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{-}^{+} E dr = E \int_{-}^{+} dr = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

ahol d a lemezek közötti távolság. (Itt felhasználtuk, hogy \mathbf{E} és $d\mathbf{r}$ ellentétes irányú, vagyis $\mathbf{E} d\mathbf{r} < 0$.) Az összefüggés jó közelítéssel véges A felületek esetén is alkalmazható, ha d kicsi a lemezek lineáris méretéhez képest.



Töltés elhelyezkedése vezetón, töltött vezető potenciálja, a kapacitás

Az elektromos kölcsönhatás kísérleti vizsgálata során láttuk, hogy egy vezetõben hosszú távú mozgásra képes töltéshordozók vannak. Ezek a töltések a vezetõben külsõ hatás jelenléte nélkül az ellenkező elõjelû töltésekkel „összekeveredve” helyezkednek el, a vezetõ kifelé elektromosan töltetlen (semleges) testként viselkedik (a) ábra). A többlet-töltést nem tartalmazó, semleges vezetõben azonban külsõ elektromos erõtérrel töltésátrendezõdés hozható létre, és ilyenkor a vezetõben szétvált töltések miatt a vezetõ nem semleges testként viselkedik: körülötte elektromos erõtér jön létre (b) ábra). Ez a jelenség az elektromos megosztás, amit korábban kísérletileg is vizsgáltunk.



Azt is láttuk, hogy egy vezetõre többlet elektromos töltést tudunk felvinni, és a vezetõben ez a töltés is mozogni tud. Mivel az azonos elõjelû töltések egymást taszítják, a többlet-töltések a vezetõn várhatóan egymástól távol próbálnak elhelyezkedni. Ennek a feltevésnek a helyességét kísérletekkel is igazolni lehet.

KÍSÉRLETEK:

Töltés elhelyezkedését vizsgáljuk vezetón. Vezetőként nyílással ellátott, belül üres fémgömböt illetve fémhengert használunk, a töltés jelenlétének vizsgálatára szolgáló eszköz egy kisméretű, szigetelt nyélre szerelt fémgolyó és egy elektrométer.

- ◆ A belül üres fémgömböt feltöltjük, majd a fémgolyóval kívülről megérintjük. Ha fémgolyót az elektrométerhez érintjük, az töltést mutat, vagyis a fémgömb külső felületén van töltés.
- ◆ A fémgolyót a nyíláson keresztül a feltöltött, üres fémgömb belső felületéhez, majd az elektrométerhez érintjük. Az elektrométer nem mutat töltést: a feltöltött fémgömb belső felületén nincs töltés.
- ◆ A fémgömböt a nyíláson keresztül belülről töltjük fel. A fenti kísérletek eredménye most is ugyanaz: a töltés ekkor is a fémgömb külső felületére megy.

KÍSÉRLET:

Ebben a kísérletben vezetőként nyílással ellátott, belül üres, két végén nyitott fémhengert használunk. A fémhenger belső és külső felületére is bodzabél elektroszkópot helyezünk el. Akárhol viszünk fel töltést a hengerre, mindig csak a külső felületre szerelt elektroszkóp mutat töltést.

A kísérletekből világosan kiderül, hogy a vezetón a töltések valóban egymástól a lehető legnagyobb távolságban, *a vezető külső felületén helyezkednek el.*

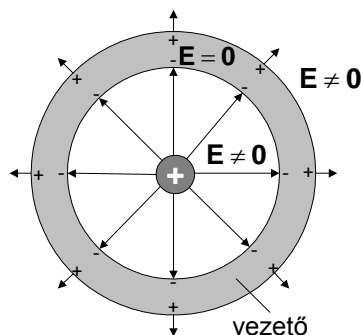
A kísérletek szerint egy vezetőre felvitt töltések igen rövid idő alatt egyensúlyi állapotba kerülnek, és nem mozognak tovább. Ebből a tapasztalatból további megállapításokra juthatunk.

- ◆ *Egyensúlyi állapotban egy vezető belsejében nem lehet elektromos erőter.* Ez azért van így, mert, ha lenne elektromos erőter, akkor annak hatására a töltések mozognának, így nem lehetne egyensúly. Ezért, ha egy vezetőben (pl. a feltöltése pillanatában) elektromos erőter alakul ki, akkor a töltések addig mozognak, amíg olyan töltéeloszlás jön létre, ami a vezetőben megszünteti az elektromos erőteret. Ez akkor is igaz, ha a vezetőt nem töltjük fel, hanem elektromos erőterbe helyezzük, ami a benne lévő töltéseket megosztja. Ilyenkor a megosztott töltések elhelyezkedése lesz olyan, hogy a vezető belsejében nem lesz elektromos erőter.

Hasonló a helyzet egy zárt, *üreges vezető* esetében is: egyensúlyi (sztatikus) állapotban *az üreg belsejében nincs elektromos erőter.* Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy egy tömör vezetőből úgy csinálhatunk üreget, hogy kivágjuk a belsejét. Ekkor olyan részt távolítunk el, amelyben nincs elektromos erőter, és amelynek jelenléte vagy hiánya az elektromos erőteret nem befolyásolja, így a kivágás után semmi sem változik meg.

Ez a tény gyakorlati szempontból igen fontos, hiszen ez azt jelenti, hogy ha egy fémdobozt időben állandó elektromos erőterbe teszünk, akkor a belsejében nem lesz elektromos erőter. A szokásos kifejezést használva: a fémdoboz *leárnyékolja* a külső elektromos erőteret.

Más a helyzet akkor, ha egy üreges vezetőben helyezünk el töltést. Ekkor a töltés maga körül elektromos erőteret hoz létre, így az üregben is lesz erőter. Ez az erőter megosztja a vezető üregfal töltéseit, és az erőter a vezetőn kívül is megjelenik (ábra).



- ◆ Mivel két pont között elektromos potenciálkülönbség csak akkor lehet, ha elektromos erőter van jelen ($dU = -\mathbf{E}d\mathbf{r}$), *egyensúlyi állapotban egy vezető minden pontjában azonos a potenciál.*
- ◆ Ha egy vezetőt feltöltünk, akkor a felületén lévő töltések a vezetőn kívül elektromos erőteret hoznak létre. A kialakult térerősség azonban a felületen csak olyan lehet, hogy *a térerősségvonalak a vezető felületére merőlegesek* (ha a térerősségnek lenne a felülettel párhuzamos komponense az elmozdítaná a töltéseket). Ez akkor is így van, ha a vezető nem töltött, de elektromos erőterben van, és a felületén a megosztás miatt van töltés.

Megjegyezzük, hogy az a tapasztalat, hogy a töltött vezetőben olyan egyensúlyi állapot jön létre, amelyben a többlet-töltések a vezető felületén helyezkednek el, és a vezető belsejében nincs elektromos erőter, nem annyira magától értetődő, mint amilyennek az a fenti kvalitatív megfontolások alapján látszik. Az elméleti számítások ugyanis azt mutatják, hogy a töltések ilyen egyensúlyi állapota csak akkor jöhet létre, ha a két ponttöltés kölcsönhatását megadó Coulomb-törvényben az erő távolságfüggése $\frac{1}{r^2}$ -es. Ezért az a tény, hogy ilyen egyensúly létrejön, a Coulomb törvényben szereplő távolságfüggés kísérleti bizonyítékának tekinthető.

Kapacitás, kondenzátorok

A különböző töltéselrendezések elektromos erőterének vizsgálatánál azt az eredményt kaptuk, hogy a magában álló (azaz más töltésektől igen messze elhelyezett) vezető gömb potenciálja arányos a rajta lévő töltéssel, az arányossági tényező pedig csak geometriai adatokat tartalmaz:

$$U_{\text{vez}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q.$$

A speciális esetben kapott eredményről kimutatható, hogy általánosan is igaz: tetszőleges alakú, magában álló, elektromosan töltött vezető végtelen távoli pontra vonatkozó potenciálja arányos a rajta lévő töltéssel: $U_{\text{vez}} \sim Q$. Ezt az arányosságot az alábbi módon szokás felírni

$$U_{\text{vez}} = \frac{1}{C} Q,$$

ahol a C állandót a vezető *kapacitásának* nevezik (minél nagyobb a C érték, annál több töltést tud tárolni a vezető adott potenciálon).

Eszerint egy R sugarú vezető gömb kapacitása a fenti egyenletek alapján:

$$C_{\text{gömb}} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Hasonló eredményre jutottunk, amikor két párhuzamos síkon azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltést helyeztünk el. A két sík közötti potenciálkülönbségre azt kaptuk, hogy

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d.$$

Ha a két töltött sík két vezető anyagból (pl. fémből) készült sík lemez, akkor az elrendezést *sikkondenzátornak* nevezzük, ami töltések tárolására alkalmas.

Ha a σ töltéssűrűséget kifejezzük a lemezekben lévő összes Q töltéssel a $\sigma = Q/A$ összefüggés segítségével, akkor a potenciálra az

$$U = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q$$

kifejezést kapjuk.

Ez az összefüggés hasonló a kapacitás definíciójára szolgáló egyenlethez (a potenciálkülönbség és a töltés arányos). Az analógia alapján bevezethetjük a síkkondenzátor kapacitását:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}.$$

Ennek az összefüggésnek átrendezett, $Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} U$ alakjából látható, hogy adott potenciálkülönbség mellett annál több töltés tárolható a kondenzátoron, minél nagyobb a kapacitása, vagyis minél nagyobb a lemezek felülete és minél kisebb a köztük lévő távolság.

A potenciálkülönbségnek – és egyúttal a kapacitásnak – a lemezek távolságától való függését kvalitatív módon könnyen igazolhatjuk az alábbi egyszerű kísérlettel.

KÍSÉRLET:

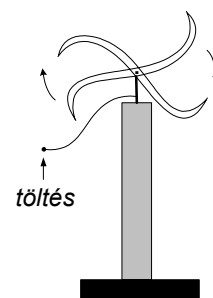
Mozgatható lemezből készült kondenzátort feltöltve és a lemezek távolságát változtatva, változik a potenciálkülönbség, amit a lemezekhez csatlakoztatott elektrométer kitérése mutat. A d növelésekor a potenciálkülönbség nő, csökkenésekor csökken, a kapott összefüggésnek megfelelően. Mivel a lemezek között a töltés nem változik, ez az eredmény egyben azt is mutatja, hogy a d távolság növelésekor a kapacitás csökken, d csökkenésekor pedig nő, amint az a fenti összefüggésből következik.

A csúcs hatás

A töltéseknek vezetőn történő elhelyezkedésével függ össze az a tapasztalat, hogy a töltött vezető kis görbületi sugarú – csúcsos – részeinél a télerősség sokkal nagyobb, mint a nagyobb görbületi sugarú – lapos – részeknél. Ezt a jelenséget egyszerű kísérletekkel bemutathatjuk.

KÍSÉRLETEK:

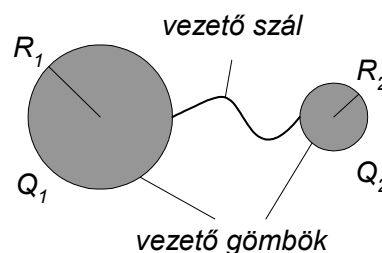
- Függőleges tengely körül forgatható, „S” alakban meghajlított, végein kihegyezett drótot (ábra) feltöltünk (pl. Van de Graaf-generátorral). A drót gyors forgásba jön, mintha a drótvégekből valami kiáramlana és a reakcióerő hajtaná az eszközt (hasonlóan, mint egyes locsolókészülékeknél a kiáramló víz).
- Nagy feszültségre feltöltött, kihegyezett fémtű olyan erős légáramlatot (ún. elektromos szelet) hoz létre, ami képes elfújni a csúcsa közelében elhelyezett gyertyát.



A jelenség magyarázata az, hogy a csúcsnál kialakuló nagy elektromos télerősség miatt a csúcs polarizálja (dipólussá alakítja), és magához vonzza a levegő semleges molekuláit. A csúcsnál a molekulák a csúccsal azonos töltést vesznek fel, ezért a csúcs eltaszítja azokat, és így jön létre a tapasztalt légáram.

A nagy elektromos télerősség kialakulása azzal függ össze, hogy a mindenütt azonos potenciálú vezetőben a csúcsnál nagyobb a felületi töltéssűrűség, mint más helyeken. Ezt számításokkal is alátámaszthatjuk, ha a vezető vékony vezető szállal összekötött két gömbbel modellezzük, amelyek közül az egyik kis-, a másik pedig nagy sugarú (ábra).

Az egyes gömbök töltését Q_1 -gyel illetve Q_2 -vel



jelölve, a két gömb felületén az azonos potenciál (a gömbök vezetővel össze vannak kötve):

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} = U_2.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

A felületi töltéssűrűség az egyes gömbökön

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \text{illetve} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}, \quad \text{amiből azt kapjuk, hogy}$$

$$\sigma_1 R_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1} = \frac{Q_2}{4\pi R_2} = \sigma_2 R_2.$$

Mivel a felület közvetlen közelében a térerősség arányos a töltéssűrűséggel: $E \sim \sigma$, ezért

$$E_1 R_1 = E_2 R_2, \quad \text{illetve} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

vagyis a kisebb sugarú (csúcsosabb) résznél nagyobb a térerősség.

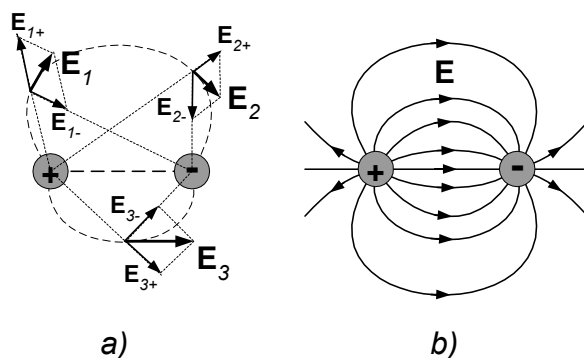
Az elektromos dipólus

Az elektromos erőtér leírása szempontjából fontos szerepet játszik az a speciális töltéselrendezés, amely egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő, pontszerű, azonos nagyságú pozitív- és negatív töltésből áll (ábra). Ez az *elektromos dipólus*. A dipólussal jól modellezhetők azok a semleges atomok vagy molekulák, amelyekben a pozitív és negatív töltések súlypontja valamilyen okból (pl. szerkezeti sajátosságok vagy külső hatás miatt) nem esik egybe. Ilyen esetekkel a későbbiekben elsősorban az anyag jelenlétében kialakuló elektromos erőtér leírásánál találkozunk.

Az elektromos dipólus erőtere

A dipólus két különálló ponttöltésből áll, ezért körülötte elektromos erőtér alakul ki. A térerősséget bármely pontban kiszámíthatjuk a szuperpozíció elve segítségével: az egyes töltések által létrehozott térerősségvektorokat összeadjuk. Ilyen szerkesztés vázlata látható a mellékelt ábrán (a) ábra), amelyen a dipólus erőterét térerősségvonalakkal is szemléltettük (b) ábra).

A térerősség helyfüggése matematikai formulával is megadható, ezt azonban itt nem vezetjük le¹.



¹ A levezetés megtalálható: Hevesi I.: Elektromosság tan c. tankönyvében (38-40. oldal)

Elektromos dipólus viselkedése elektromos erőterben

Homogén erőter

Homogén elektromos erőterben a dipólus két töltésére ellenkező irányú, azonos nagyságú erő hat, ami – a dipólusnak a térerősség irányához viszonyított helyzetétől függően – egy forgatónyomatékokat eredményez. A dipólus tehát – ha forgásképes – az erőter hatására elfordul. A dipólusra ható erőket az ábra mutatja, aminek alapján kiszámíthatjuk a dipólusra ható forgatónyomatékokat.

Látható, hogy a dipólusra ható erők eredője nulla, de fellép egy forgatónyomaték, amelynek nagysága

$$M = Fl' = Fl \sin \alpha = QEl \sin \alpha .$$

Ez a forgatónyomaték az óramutató járásával egy irányban forgat, tehát a forgatónyomaték vektor a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat.

A forgatónyomaték kifejezésében felismerhető a dipólmomentum nagysága, amit beírva, az alábbi alakot kapjuk:

$$M = d_e E \sin \alpha .$$

Ez a kifejezés két vektor nagyságának (d_e és E) és az általuk bezárt szög (α) szinuszában a szorzata, tehát egy vektorszorzat nagyságaként is felfogható. Ezzel a forgatónyomaték vektori alakját is megkaphatjuk:

$$\mathbf{M} = \mathbf{d}_e \times \mathbf{E} .$$

Ennek a nagysága megadja a forgatónyomaték nagyságát, és iránya is a valóságos forgatónyomaték irányával egyezik (a vektorszorzat eredménye a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat).

A dipólusra ható forgató nyomaték tehát a tér irányába forgatja a dipólust. A tér irányába beállt dipólusra már nem hat forgatónyomaték (a két erő egy egyenesben működik), vagyis ez a dipólus egyensúlyi helyzete.

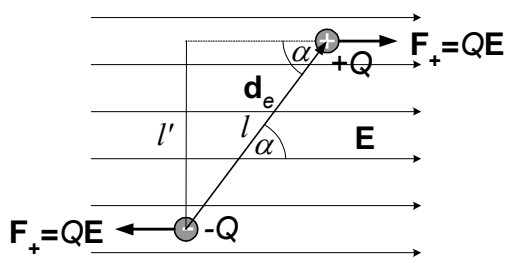
Ezt a viselkedést egy egyszerű dipólus-modell segítségével kísérletileg is bemutathatjuk.

KÍSÉRLET:

Súlyzó alakú, fémréteggel bevont testet függőleges tengely körül forgathatóan két-két cérnaszálra felfüggesztünk, amelyek közül az egyik pár alulról, a másik pár felülről rögzíti a súlyzót (a két szál biztosítja, hogy a testnek meghatározott egyensúlyi helyzete legyen, ahová külső hatás nélkül mindig visszatér). A súlyzót egy kondenzátor lemezei közé tesszük, és kezdetben úgy állítjuk be, hogy tengelye nagyjából a kondenzátor lemezeivel párhuzamosan álljon.

Ezután a kondenzátort nagy feszültségre feltöltjük. A lemezek között létrejött elektromos erőterben a súlyzó fémbevonatában megosztás révén az egyik gömb pozitív- a másik gömb negatív töltésű lesz, vagyis egy dipólus jön létre.

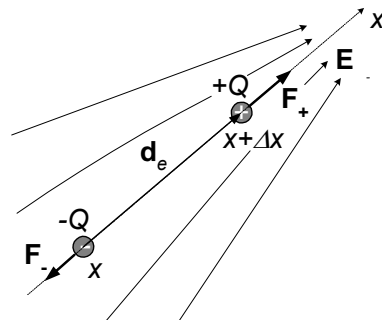
A dipólus modell az erőterben elfordul, és a kondenzátor lemezeire merőlegesen, vagyis az elektromos térerősséggel párhuzamosan áll be. Ha az erőteret megszüntetjük, akkor a dipólus visszatér az eredeti helyzetébe.



A kísérlet tehát megerősíti azt az elméleti következtetésünket, hogy a dipólus valóban a térerősség irányába fordul be.

Inhomogén erőtér

Inhomogén erőtérben a dipólus befordul az adott helyen fennálló térerősség irányába, és ekkor megszűnik a dipólusra ható forgatónyomaték. Mivel azonban a térerősség változik a hellyel, a dipólus két töltésére ható erők nem lesznek azonosak, így a dipólusra egy eredő erő lép fel, aminek hatására a dipólus – ha mozgásképes – elmozdul. Az eredő erő számítását az ábra alapján végezzük el, ahol a lokális térerősség irányába már beállt dipólus látható. Ebben az irányban vettük fel a koordinátarendszerünk x -tengelyét. A dipólus két végpontja az x - illetve $x+\Delta x$ koordinátájú helyen van, így a dipólus hossza $l=\Delta x$.



Az eredő erő, amelynek itt csak x -komponense van:

$$F_x = F_+ - F_- = QE(x + \Delta x) - QE(x).$$

Mivel feltételezzük, hogy a dipólus töltései nagyon közel vannak egymáshoz, az $E(x)$ függvény ismeretében az $E(x+\Delta x)$ értéket lineáris extrapolációval határozzuk meg:

$$E(x + \Delta x) \approx E(x) + \frac{dE(x)}{dx} \Delta x.$$

Ezt felhasználva, az eredő erőre azt kapjuk, hogy

$$F_x = QE(x) + Q \frac{dE(x)}{dx} \Delta x - QE(x) = Q \Delta x \frac{dE(x)}{dx}.$$

Figyelembe véve, hogy a dipólmomentum nagysága itt $d_e = Q \Delta x$, végül azt kapjuk, hogy

$$F_x = d_e \frac{dE(x)}{dx}.$$

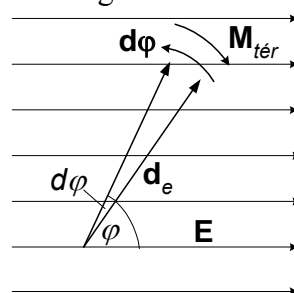
Eszerint a dipólusra ható eredő erő a dipólmomentumon kívül a térerősség változásának erősségétől – szakkifejezéssel a térerősség gradiensétől – függ, annak növekedésével nő.

A dipólus – ha ezt a körülmények lehetővé teszik – a növekvő térerősség irányában mozdul el. Ez az oka pl. annak is, hogy az inhomogén erőteret létrehozó megdörzsölt üvegrúd magához vonzza a dipólussá tett szigetelődarabkákat, vagy a megosztás miatt ugyancsak dipólusként viselkedő könnyű fémfólia-darabokat.

Elektromos dipólus helyzeti energiája elektromos erőtérben

Láttuk, hogy egyensúlyi állapotban a dipólus befordul az elektromos térerősség irányába. Ha ebből a helyzetből ki akarjuk fordítani, akkor erőt kell kifejtenünk, és munkát kell végeznünk. Ez a munkavégzés azt eredményezi, hogy a dipólus helyzeti energiára tesz szert. Most kiszámítjuk, hogy homogén elektromos erőtérben hogyan függ ez a helyzeti energia a dipólus elfordulásának nagyságától (a dipólmomentum- és a térerősségvektor közötti szögtől).

A dipólust kezdetben az egyensúly helyzetéhez (vagyis a térerősségvektorhoz) képest φ szöggel elfordítjuk, majd megnézzük, hogy egy további, igen kicsi $d\varphi$ szögelfordulásnál mekkora a helyzeti energia megváltozása (ábra). Ezután végighaladva az összes



lehetséges szögértéken, az elemi helyzeti energia-változásokat összegezzük (azért kell elemi lépésekben haladni, mert a különböző szögeknél más és más az erőter által kifejtett forgató nyomaték, és így a munka is).

Az erőter által végzett elemi munka

$$dW_{\text{ér}} = \mathbf{M}_{\text{ér}} \mathbf{d}\varphi = -M_{\text{ér}} d\varphi = -d_e E \sin \varphi d\varphi$$

(itt kihasználtuk, hogy a szögelfordulás- és a forgatónyomaték vektora párhuzamos, de ellentétes irányú, továbbá alkalmaztuk a forgatónyomatéokra korábban kapott kifejezést).

A helyzeti energia definíciójának megfelelően a dipólus helyzeti energiájának elemi megváltozása a φ szöggel jellemzett helyzetben

$$dE_h = -dW_{\text{ér}} = d_e E \sin \varphi d\varphi .$$

Tetszőleges φ helyzetig történő teljes elfordulásnál a helyzeti energia megváltozása

$$E_h = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d_e E \sin \varphi d\varphi = d_e E \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi$$

(Itt kihasználtuk, hogy az erőter homogén, tehát E az összegzésből kiemelhető).

A helyzeti energia kiszámításához meg kell adni a vonatkoztatási helyzetet, vagyis a φ_0 szöget. Vonatkoztatási helyzetként a dipólusnak azt az állását szokás megadni, amikor a dipólus merőleges a térerősségre, vagyis $\varphi_0 = \pi/2$. Ezzel a helyzeti energia

$$E_h = d_e E \int_{\pi/2}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = -d_e E [\cos \varphi]_{\pi/2}^{\varphi} = -d_e E \cos \varphi .$$

Mivel a választott vonatkoztatási szög egyben a helyzeti energia nullpontja is ($\cos \pi/2 = 0$), az egyensúlyi állapotban a dipólus helyzeti energiája negatív.

A helyzeti energia kifejezése tömörebb, vektori alakban is felírható, ha kihasználjuk azt a tényt, hogy φ a dipólmomentum-vektor és a térerősségvektor által bezárt szög, vagyis a fenti kifejezés a két vektor skaláris szorzatával egyenlő:

$$E_h = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} .$$