Az elektromágneses indukció

Elektromágneses indukció néven azokat a jelenségeket szokás összefoglalni, amelyekben egy vezető hurokban mágneses erőtér jelenlétében – a szokásos telepek nélkül – elektromos áram jön létre. Az áram oka az, hogy ilyenkor a vezető hurokban elektromotoros erő, és így elektromos erőtér keletkezik.
A létrejött elektromotoros erőt *indukált elektromotoros erőnek* (gyakran *indukált feszültségnek*), a kialakult elektromos erőteret *indukált elektromos erőtérnek*, a vezetőkben ilyenkor megjelenő elektromos áramot pedig *indukált áramnak* nevezik
A jelenségeket, létrejöttük körülményeinek megfelelően, két csoportra szokták osztani: ha az elektromotoros erő nyugvó vezetőben, változó mágneses erőtér hatására jön létre, akkor *nyugalmi indukcióról*-, ha pedig állandó mágneses erőtérben mozgó vezetőben keletkezik, akkor *mozgási indukcióról* beszélünk.
Előre bocsátjuk, hogy az elektromágneses indukció említett két fajtájában csupán az a közös, hogy mindkét esetben elektromos erőtér jön létre. A jelenség értelmezése és a létrejött elektromos erőtér jellege a két esetben alapvetően különbözik egymástól. A nyugalmi indukciót például az eddigi ismereteink alapján nem tudjuk megmagyarázni, ez egy alapvetően új jelenség. A mozgási indukció ezzel szemben könnyen értelmezhető a mozgó töltésre mágneses erőtérben fellépő erőhatás segítségével.
Először a nyugalmi indukcióval foglalkozunk, vagyis azzal az esettel, amikor a mágneses erőtér változik, de a vezetők nyugalomban vannak vagy egyáltalán nincsenek is jelen vezetők. Ezután tárgyaljuk a mozgási indukciót, vagyis azt az esetet, amikor állandó mágneses erőtérben vezetők mozognak.

Nyugalmi indukció, a Faraday–Lenz-törvény

Számos tapasztalat mutatja, hogy egy rögzített vezető hurokban vagy tekercsben áram jön létre, ha a vezető hurok környezetében változik a mágneses erőtér. Ez egyszerű kísérletekkel demonstrálható.

KÍSÉRLET_1:

- Sok menetet tartalmazó tekercshez érzékeny árammérőt kapcsolunk, majd a tekercs közepén lévő hengeres üregbe egy másik tekercset tolunk be, amelyet egy kapcsolón keresztül áramforráshoz kapcsolunk. Ezzel a tekerccsel mágneses erőteret tudunk létrehozni a külső tekercs belsejében. Ha a belső tekercsben bekapcsoljuk az áramot, akkor a külső tekercshez kapcsolt árammérő rövid ideig áramot mutat, vagyis a mágneses erőtér bekapcsolásával a külső tekercsben indukált áramot hoztunk létre.
- Ha a belső tekercsben az áram állandósul, akkor az indukált áram megszűnik. Ha most a belső tekercsben az áramot kikapcsoljuk, akkor a külső tekercsben ismét indukált áramlökés jön létre, amely ellentétes irányú, mint a bekapcsoláskor észlelt indukált áram.
- Megfigyelhetjük, hogy az indukált áram annál nagyobb, minél nagyobb a kapcsoláskor létrejött áramváltozás (és a mágneses erőtér vele együtt járó változása).
- Ha a belső tekercs áramát folyamatosan változtatjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az indukált áram annál nagyobb, minél gyorsabb az áram (illetve a mágneses erőtér) változása.

KÍSÉRLET_2:

- Sok menetet tartalmazó tekercshez érzékeny árammérőt kapcsolunk, majd a tekercs közepén lévő hengeres üregbe betoljuk egy erős mágnes egyik pólusát. Az árammérő a mozgás ideje alatt áramot mutat, vagyis a mágnes mozgatásával indukált áramot hoztunk létre.
- Ha a mágnesnek ugyanezt a pólusát kihúzzuk a tekercsből, akkor ellenkező irányú áram indukálódik.
- Megfigyelhető, hogy az indukált áram nagysága a mágnes mozgatásának sebességével nő.

Ezek a kísérletek azt mutatják, hogy ha egy vezető hurokban megváltozik a mágneses erőtér, akkor abban indukált áram jön létre függetlenül attól, hogy a mágneses tér változását állandó mágnes mozgatásával vagy egy elektromágnes áramának változtatásával értük el.
A kísérletekből az is látszik, hogy indukált áramot csak a mágneses erőtér változása idején tapasztalunk, és az indukált áram annál nagyobb, minél gyorsabban változik a mágneses erőtér.
Az elvégzett kísérletek alapján sejthető, hogy egy nyugvó vezető hurokban létrejött indukált áram a mágneses indukcióvektor nagyságának változásával és a változás sebességével van összefüggésben. Ezt további nagyszámú tapasztalat is megerősíti, és pontosítja: az indukált áram (I_{ind}) nagysága arányos az indukcióvektor változási sebességével, azaz

$$\left|I_{ind}\right| \sim \left|\frac{dB}{dt}\right| .$$

A Faraday–Lenz-törvény

Ahhoz, hogy egy áramkörben tartósan áram folyjon, ott elektromotoros erőnek kell jelen lenni. Ebből az következik, hogy az áramkörben elsődlegesen egy indukált elektromotoros erő jön létre, és ez hozza létre az indukált áramot, ami függ a vezető hurok ellenállásától is. Emiatt célszerűbb az indukált elektromotoros erőre vonatkozó összefüggést keresni. Mivel az áram és a feszültség adott áramkörben egymással arányos, a tapasztalatok alapján írhatjuk, hogy

$$\left|\varepsilon_{ind}\right| \sim \left|\frac{dB}{dt}\right| .$$

A tapasztalat szerint az indukált elektromotoros erő arányos a rögzített vezető hurok A felületének nagyságával is

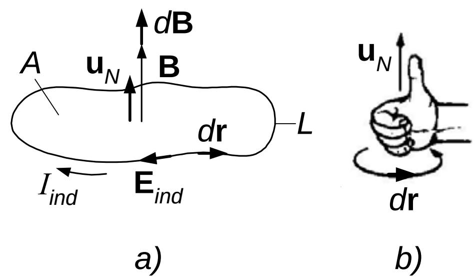
$$\left|\varepsilon_{ind}\right| \sim A\left|\frac{dB}{dt}\right| = \left|\frac{AdB}{dt}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| ,$$

vagyis arányos a hurok felületére vonatkozó Φ_B indukciófluxus változási sebességével. Részletesebb kísérleti vizsgálatokból az is kiderült, hogy az *SI* rendszerben a fenti összefüggésben az arányossági tényező éppen *1*, tehát azt írhatjuk, hogy

$$\left|\varepsilon_{ind}\right| = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = .$$

Ahhoz, hogy az abszolútérték-jeleket elhagyhassuk, meg kell vizsgálnunk a bal- és jobboldalon álló mennyiségek előjeleit. Az egyszerűség kedvéért itt feltételezzük, hogy a vezető hurok síkbeli görbe, és az indukcióvektor változása ($d\mathbf{B}$) a hurok egész felületén ugyanolyan.

A kísérletek tanúsága szerint az *a)* ábrán látható áramhurokban az indukcióvektor berajzolt $d\mathbf{B}$ *változása* esetén az óramutató járásával egyirányú indukált áram (I_{ind}) jön létre. Ez azt jelenti, hogy a hurokban ugyanilyen irányú indukált elektromos erőtérnek ($\mathbf{E}_{ind}$) kell kialakulni, hiszen a tapasztalt irányban ez mozgatja a pozitív töltéseket.



Az elektromotoros erő előjelének meghatározásához be kell vezetni egy körüljárási irányt (az *a)* ábrán az áramiránnyal ellenkező irányt választottunk), majd az L vezetőhurok mentén ki kell számítani az $\mathbf{E}_{ind}d\mathbf{r}$ mennyiségek összegét. A jobboldalon álló fluxusváltozás kiszámításhoz rögzíteni kell az $\mathbf{u}_N$ felület-egységvektor irányát (az *a)* ábrán felfelé mutat), és ki kell számítani a $d\mathbf{B}A\mathbf{u}_N$ mennyiséget.

Ha a körüljárást és a felület-egységvektort az *a)* ábrán látható módon választjuk, akkor $\mathbf{E}_{ind}d\mathbf{r} < 0$, és $d\mathbf{B}A\mathbf{u}_N > 0$, ezért az indukált elektromotoros erőt megadó összefüggés baloldalán negatív-, a jobboldalán pedig pozitív szám áll. Ezért az egyenlet akkor helyes, ha az $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ alakban írjuk fel. Ha a körüljárási irány és a felületvektor közül az egyiket ellenkező irányban vesszük fel, akkor a helyes összefüggés $\varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi_B}{dt}$ lesz. Ez azt jelenti, hogy az összefüggés csak akkor lesz egyértelmű, ha az egyébként tetszőlegesen választható körüljárás- és felület-normálvektor irányát meghatározott módon rendeljük egymáshoz. Az elfogadott eljárás az, hogy a két irányt a *b)* ábrán látható *jobbkéz-szabály* szerint választjuk meg.

Az *a)* ábrán a két irányt éppen így jelöltük ki, vagyis a megállapodást követve az *indukált elektromotoros erőt* megadó összefüggés előjelhelyesen az alábbi módon írható fel:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}\right).$$

(Megjegyezzük, hogy ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha a $d\mathbf{B}$ vektort ellenkező irányúnak tételezzük fel, mert ekkor mind az $\mathbf{E}$, mind a $d\mathbf{B}$ ellenkező irányú lesz.)

Ha az elektromotoros erőt is részletesen felírjuk, akkor az összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}\right)$$

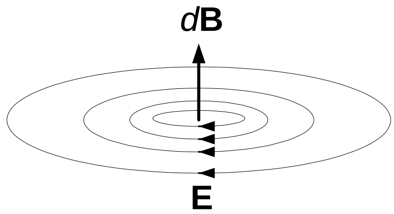
Ez a *Faraday-féle indukciótörvény*[1].

Az *a)* ábra alapján könnyen megállapítható, hogy a létrejött indukált áram a vezetőhurok belsejében olyan mágneses teret hoz létre, amely ellentétes a $d\mathbf{B}$ változással, vagyis az indukált áramot okozó változást csökkenteni igyekszik. Ezt a

[1] A törvényt M. Faraday angol fizikus ismerte fel.

szabályt először *Lenz*[2] ismerte fel, ezért *Lenz-törvénynek* nevezik, és a fenti indukciótörvényre is gyakran a *Faraday–Lenz-törvény* elnevezést használják.

A indukciótörvényből megállapítható, hogy a vezető hurokban létrejött elektromos erőtér nem konzervatív, erővonalai önmagukban záródnak. Ez az elektromos erőtér mozgatja körbe a töltéseket a vezető hurokban.
Felmerül a kérdés, hogy mi történik, ha a változó mágneses erőtérben nincs vezető hurok, amelyben az indukált áram létrejönne. A tapasztalat azt mutatja, hogy *elektromos erőtér ekkor is létrejön*, és ez a mágneses tér változása által létrehozott indukált elektromos tér a sztatikus tértől eltérő tulajdonságokkal rendelkezik. Erővonalai zárt hurkokat alkotnak, amelyek a mágneses indukcióvektor *megváltozását*, a $d\mathbf{B}$ vektort veszik körül. A keletkező tér irányát az ábra mutatja (balkéz-szabály).



Az indukált elektromos erőtér jellegéből következik, hogy nem lehet konzervatív, tehát az elektrosztatikában felírt $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0$ törvény változó erőterek esetén nem érvényes, helyette a Faraday–Lenz-törvényt kell használni. Ez a törvény azonban határesetként tartalmazza az elektrosztatika I. alaptörvényét is, hiszen állandó terek esetén a fluxusváltozás – és ezzel az egyenlet jobboldala – nulla. Ebből következik, hogy a mindig érvényes alaptörvény a

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_A \mathbf{B}d\mathbf{A}\right)$$

Faraday–Lenz-törvény, amely az elektrosztatika I. alaptörvényének változó terek esetén is érvényes általánosítása.

Örvényáramok

A Lenz-törvényt számos tapasztalat igazolja. Ezzel a törvénnyel magyarázható pl. változó mágneses erőtérbe helyezett, kiterjedt vezetőkben az ún. *örvényáramok* kialakulása miatt fellépő számos jelenség.
Az örvényáramok a vezetőben zárt hurkok mentén kialakuló áramok, amelyek azért lépnek fel, mert az indukált elektromos erőtér erővonalai zárt hurkok, és a vezetőben lévő mozgásképes töltések ezek mentén mozognak.

KÍSÉRLETEK:

- Lengethetően felfüggesztett alumínium karikához, a felületére merőlegesen erős mágnest közelítve, a karika a mágnes mozgásirányában kilendül (csökkenti a mágnes hozzá viszonyított sebességét), és a mágnes ide-oda mozgatásával jelentős amplitúdójú lengésbe hozható. Ha ugyanezt a kísérletet olyan alumínium karikával végezzük el, amely nem folytonos, hanem egy helyen meg van szakítva, a jelenség nem lép fel.
- Alumínium lemezből készült ingát erős mágneses térben kilendítve, a lengés igen gyorsan lecsillapodik. Ha a kísérletet olyan lemez-ingával végezzük el, amelyet fésűszerűen bevagdostunk, akkor a csillapodás látványosan csökken.

[2] H.F.E. Lenz német származású orosz fizikus volt.

- Egy tekercs meghosszabbított, függőleges helyzetű vasmagjára a vasmagon csúszni képes alumínium karikát teszünk, és a tekercset egy kapcsolón keresztül váltakozó feszültségű áramforráshoz kapcsoljuk. Ha az áramot bekapcsoljuk, akkor a karika lerepül a vasmagról (*Thomson-ágyú*). Ha ugyanezt a kísérletet megszakított alumínium karikával végezzük el, a jelenség nem lép fel. A tekercs áramerősségének szabályozásával elérhető, hogy a folytonos karika egy bizonyos magasságban lebegjen. Egy idő múlva a karika felmelegszik.
- Függőleges réz csőben könnyen mozgó, nem mágneses fémhengert ejtünk le, és megfigyeljük az esési időt. Ha ugyanebben a csőben egy henger alakú mágnest ejtünk le, akkor az esési idő látványosan megnő.

Ezek a jelenségek az örvényáramok kialakulásával magyarázhatók.
A lengő alumínium karika azért mozdul el a közeledő mágnes irányában, mert a közeledő mágnes inhomogén erőtere miatt változik a karikára vonatkozó indukciófluxus. A létrejött indukált feszültség a karikában örvényáramot hoz létre, amely annál nagyobb, minél gyorsabban közeledik a mágnes a karikához. A Lenz-törvény értelmében az indukált áram olyan hatást kelt, ami csökkenteni igyekszik az indukált áramot. Ez úgy következik be, hogy a karika elmozdul a mozgó mágnes elől, így csökkentve a karika és a mágnes relatív sebességét. A megszakított karikában nem tud kialakulni örvényáram, ezért a jelenség nem jön létre.
Az alumínium lemezből készült ingában a lemez mozgása miatt jön létre indukált feszültség, ami a lemezben örvényáramokat okoz. Az örvényáramok olyanok, hogy az őket létrehozó hatást, vagyis a lemez mozgását akadályozzák, ezért csillapodik az inga lengése. A bevagdosott ingában az örvényáramok nem tudnak kialakulni, ezért ekkor gyakorlatilag nincs csillapodás.
A Thomson-ágyú működésének magyarázata szintén az, hogy a váltakozó áram által létrehozott váltakozó mágneses erőtérben az alumínium gyűrűben örvényáram lép fel, és a Lenz-törvénynek megfelelően a gyűrű le akar menni az indukált áramot okozó vasmagról.
A mágnesnek rézcsőben történő ejtésénél a mágnes mozgása miatt a csőben örvényáramok jönnek létre, amelyek akadályozzák az őket létrehozó hatást, vagyis a mágnes mozgását. A nem mágneses anyag ejtésekor nincs indukált örvényáram, így fékezés sem lép fel.
Az örvényáramok által okozott veszteségek kiküszöbölése érdekében készítik a transzformátorok vasmagját egymástól elszigetelt, összeragasztott lemezekből és nem tömör anyagból.

Kölcsönös indukció és önindukció

Ha egy árammal átjárt vezető hurok (*1*) mellett egy másik vezető hurkot (*2*) helyezünk el, akkor az *1* hurok I_1 árama által keltett mágneses erőtér a *2* hurok helyén is megjelenik. Ezért, ha az *1* hurokban változik az áram, akkor a *2* hurok környezetében is változik a mágneses erőtér, és a *2* hurokban elektromotoros erő (és áram) indukálódik. A gondolatmenet fordítva is érvényes: a *2* hurokban folyó I_2 áram változása az *1* hurokban hoz létre indukált elektromotoros erőt (és áramot). Ezt a jelenséget *kölcsönös indukciónak* nevezik, és ez teszi lehetővé, hogy időben változó elektromos jeleket egyik áramkörből a másikba úgy vigyünk át, hogy a két áramkör között nincs vezetővel létrehozott kapcsolat. Az ilyen áramköröket *csatolt áramköröknek* is nevezik.
A *2* hurokban létrejött indukált elektromotoros erőt az

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

összefüggés adja meg, ahol Φ_{B2} a *2* hurokra vonatkozó indukciófluxus. Ha ezt az *1* hurokban folyó áram hozza létre, akkor

$$\Phi_{B2} = M_{21} I_1 ,$$

hiszen az I_1 áram által keltett mágneses indukció- és így a létrehozott indukciófluxus is arányos az árammal. Az M_{21} arányossági tényező az áramhurkok geometriai jellemzőitől (pl. alak, egymástól mért távolság) függ. Ennek alapján a *2* hurokban létrejött indukált elektromotoros erő

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_2}{dt} .$$

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk az I_2 áram változása miatt az *1* hurokban létrejött indukált elektromotoros erőt:

$$\Phi_{B1} = M_{12} I_2$$

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} .$$

Kimutatható, hogy a két együttható egyenlő egymással, ezért, ha bevezetjük az $M_{21} = M_{12} = M$ jelölést, akkor a kölcsönös indukció miatt a két hurokban fellépő indukált elektromotoros erők az

$$\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

alakba írhatók. Az *M* állandót a rendszer *kölcsönös indukciós együtthatójának* nevezik.

Számítsuk ki a kölcsönös indukciós együtthatót abban az egyszerű esetben, amikor a két áramkör két egymásba tekercselt, azonos *l* hosszúságú és azonos *A* keresztmetszetű, N_1 és N_2 menetszámú tekercs.

A *2* tekercsben az *1* tekercs I_1 árama által keltett $B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$ mágneses indukció fluxusa

$$\Phi_{B2} = N_2 A B_1 = N_2 A \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} I_1 .$$

Ebből következik, hogy a kölcsönös indukciós együttható:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} .$$

Indukált feszültség nem csak két kölcsönható áramhurokban lép fel, hanem egyetlen hurokban is, ha benne változik az áramerősség. Itt arról van szó, hogy a hurok benne van a saját mágneses erőterében, ezért, ha az változik, akkor benne elektromotoros erő indukálódik. A jelenséget, amely igen fontos szerepet játszik a váltóáramú áramkörökben, *önindukciónak* nevezik.

Mivel az áramhurokban a mágneses indukciót itt a hurok saját *I* árama hozza létre, a fluxust a

$$\Phi_B = LI$$

összefüggés adja meg, ahol *L* a geometriai viszonyoktól függő állandó, amit *önindukciós együtthatónak* (néha egyszerűen „önindukciónak”) neveznek.

Az áramkörben indukált elektromotoros erő eszerint

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Mivel a tekercs a váltakozó áramú áramkörökben igen fontos áramköri elem, számítsuk ki egy N menetű, l hosszúságú, A keresztmetszetű tekercs önindukciós együtthatóját.
A tekercs saját árama által létrehozott mágneses indukció nagysága:

$$B = \frac{\mu NI}{l}.$$

Az egy menetre vonatkozó fluxus

$$\Phi_{B1} = BA = \frac{\mu NA}{l} I,$$

a teljes fluxus pedig

$$\Phi_B = N\Phi_{B1} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I.$$

Ebből következik, hogy az önindukciós együttható

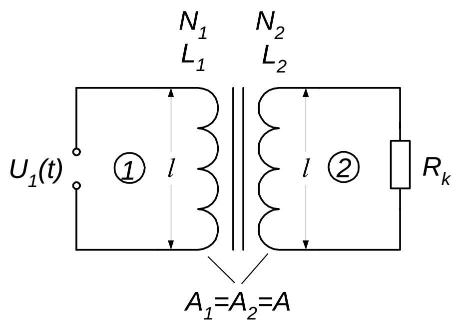
$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}.$$

Az önindukciós együttható legegyszerűbben és leghatékonyabban a menetszám növelésével – és mint később látni fogjuk – a tekercsben elhelyezett vasmaggal (a μ értékének növelésével) növelhető.

A transzformátor alapelve

A csatolt áramkörök alkalmazásának egyik közismert példája a transzformátor, amelyben két tekercs kölcsönös indukciója segítségével – a tekercsek mentszámának megfelelő megválasztásával – adott amplitúdójú váltakozó feszültségből kisebb vagy nagyobb amplitúdójú feszültséget kaphatunk.

Egyszerűsített transzformátor-modellként használjuk azt az elrendezést, amelyben a kölcsönös indukciós együtthatót kiszámítottuk: a vizsgált két áramkörben (az ábrán *1* és *2*) két egymásba tekercselt, azonos l hosszúságú és azonos A keresztmetszetű, N_1 és N_2 menetszámú (és ennek megfelelően különböző L_1 és L_2 önindukciójú) tekercs van. Az ábrán látható szimbólumon a két hullámos vonal jelképezi a tekercseket, a két párhuzamos vonal pedig azt jelzi, hogy a két tekercs vasmagra van tekercselve.



Tegyük fel, hogy az *1* áramkörben egy változó $U_1(t)$ feszültségű áramforrás, a *2* áramkörben egy R_k ellenállású fogyasztó van. A vezetékek és a tekercsek (ohmikus) ellenállása elhanyagolható, ugyancsak elhanyagolhatók az áramkörökben fellépő kapacitások és a tekercseken kívüli induktivitások is.

Egy ilyen veszteségmentes, ideális transzformátor esetén az *1* áramkörbe betáplált U_1- és a *2* áramkörben létrejött U_2 feszültség-amplitúdók hányadosára fennáll, hogy

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

***************** ****************** *******************

A fenti egyszerűsített transzformátor-modell esetén viszonylag egyszerűen kiszámítható a két kölcsönható tekercsben létrejött feszültségek hányadosa.

Mivel a két tekercs egymásra van tekercselve, az indukcióvektor, és így az egy menetre vonatkozó ϕ_B indukciófluxus mindkét tekercsben azonos: $\phi_{B1} = \phi_{B2} = \phi_B$. Ezzel a jelöléssel az egyes tekercsekben az indukciófluxus

$$\Phi_{B1} = N_1\phi_B \qquad \text{és} \qquad \Phi_{B2} = N_2\phi_B$$

A két áramkörre felírva Kirchhoff II. törvényét, az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$U_1 - \frac{d\Phi_{B1}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 - N_1\frac{d\phi_B}{dt} = 0$$

$$R_k I_2 - \frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_k I_2 - N_2\frac{d\phi_B}{dt} = 0$$

A fluxust a tekercsekben folyó áramok hozzák létre, vagyis

$$\phi_B = \frac{\mu N_1 I_1}{l}A + \frac{\mu N_2 I_2}{l}A .$$

Ezzel az egyenleteink az alábbi alakot öltik:

$$U_1 - N_1\frac{\mu N_1 A}{l}\frac{dI_1}{dt} - N_1\frac{\mu N_2 A}{l}\frac{dI_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 - L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$R_k I_2 - N_2\frac{\mu N_1 A}{l}\frac{dI_1}{dt} - N_2\frac{\mu N_2 A}{l}\frac{dI_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_k I_2 - M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt} = 0.$$

A *2* áramkörben a kölcsönös indukcióból és az önindukcióból származó feszültség nagysága:

$$U_2 = -M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}\frac{N_1 M}{N_2}\frac{dI_1}{dt} - \frac{N_2}{N_1}\frac{N_1}{N_2}L_2\frac{dI_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1}L_1\frac{dI_1}{dt} - \frac{N_2}{N_1}M\frac{dI_2}{dt} .$$

Figyelembe véve az *1* áramkörre felírt egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1}\left(L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}\right) = -\frac{N_2}{N_1}U_1 .$$

A „-” jel azt mutatja, hogy a két feszültség ellenkező fázisban van.

Ha a feszültségek nagyságát U_1 és U_2-vel jelöljük, akkor a korábban felírt összefüggést kapjuk:

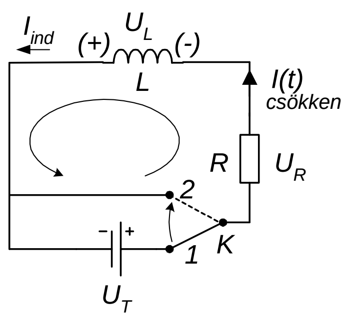
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} .$$

***************** ****************** *******************

Tranziens jelenségek induktivitást tartalmazó áramkörben

Ha egy induktivitást tartalmazó áramkörben az áram valamilyen okból megváltozik, akkor az induktivitás ezt a változást akadályozni igyekszik (Lenz-törvény). Ennek a következménye az, hogy egy ilyen áramkörben az áram bekapcsolása vagy kikapcsolása után az egyensúlyi áram nem azonnal áll be, hanem csak egy hosszabb-rövidebb átmeneti időszak után. Most ilyen átmeneti – idegen szóval *tranziens* – jelenségeket vizsgálunk meg.

Az áram kikapcsolása



Első példánkban egy induktivitást tartalmazó áramkörben a telep lekapcsolásának hatását vizsgáljuk. Az ábrán látható áramkörben eredetileg (kapcsoló *1* állása) a telep által létrehozott $I_0 = \frac{U_T}{R}$ áram folyt (az induktivitás ellenállása elhanyagolható). Ezután a telepet a kapcsoló segítségével leválasztjuk az áramkörről, és egyidejűleg

zárjuk is a telep nélküli áramkört (kapcsoló *2* állása). Az időt az átkapcsolás pillanatától ($t=0$) mérjük.
Az áramkör vizsgálatának kezdetén még az eredeti áram folyik, tehát $I(0)=I_0$, viszont feszültségforrás már nincs az áramkörben, tehát $U_T=0$ (ezek a probléma megoldásához szükséges ún. *kezdeti feltételek*).
Azt várjuk, hogy az áram megszűnik, hiszen az áramkörben nincs már telep, de az induktivitás jelenléte miatt az áram csak fokozatosan csökken nullára. Mivel a tapasztalat szerint a Kirchhoff-törvények nem túl gyorsan változó áramok esetén, bármely időpillanatban, változatlan formában érvényesek, az áram időbeli változását ezek segítségével fogjuk meghatározni.
Az I. (csomóponti) törvény szerint egy t időpillanatban az áramkör minden pontján ugyanakkora és ugyanolyan irányú $I(t)$ áram folyik. A II. (hurok-) törvény felírásához választani kell az áramhurokban egy körüljárási irányt (az ábrán az óramutató járásával ellentétes), fel kell tételezni egy pillanatnyi áramirányt, és azt, hogy az adott t időpillanatban az áram nő vagy csökken (mindezek tetszőlegesen választhatók, a választás a végeredményt nem befolyásolja). Az általunk választott körüljárás és pillanatnyi áramirány az ábrán látható, az áram változásáról azt tételezzük fel, hogy ebben a pillanatban éppen csökken.
A II. törvény szerint a hurokban körbejárva a feszültségek előjeles összegére fennáll, hogy

$$U_R + U_L = 0 .$$

Az ellenálláson eső feszültséget az $U = IR$ Ohm-törvényből, az induktivitáson eső feszültséget az $U_L = L\frac{dI}{dt}$ önindukciós törvényből kaphatjuk meg, de meg kell vizsgálni a feszültségek előjelét. Az ellenálláson az áram irányában haladunk át, vagyis az áthaladásnál a potenciál csökken, $U_R < 0$, ezért

$$U_R = -IR$$

(itt I az áram nagysága, tehát pozitív szám).
Az önindukciós feszültség csökkenő áram esetén az áram növekedését okozza, vagyis a csökkenő árammal azonos irányú áramot indít (az ábrán I_{ind}). Az induktivitás tehát olyan „telepként” működik, amelynek polaritását az ábrán zárójelben feltüntettük. Ha ezen a „telepen” a körüljárás irányában áthaladunk, akkor potenciálnövekedést tapasztalunk, vagyis $U_L > 0$. Mivel feltételezésünk szerint az áram csökken, $dI < 0$, ezért U_L csak akkor lesz pozitív, ha az

$$U_L = -L\frac{dI}{dt}$$

alakban írjuk be.
A fenti kifejezéseket a huroktörvénybe beírva, a

$$U_R + U_L = -IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

összefüggést kapjuk. Az egyenletet egyszerűsítve, és figyelembe véve, hogy az áramerősség időben változik, tehát $I = I(t)$, a probléma megoldásához felhasználható egyenlet az alábbi alakot ölti

$$RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = 0 .$$

Ebből az egyenletből kell „kitalálnunk” az $I\,(t)$ függvény konkrét alakját.

A probléma az, hogy az egyenletben a meghatározandó $I(t)$ függvény mellett annak differenciálhányadosa is szerepel (ez egy ún. *differenciálegyenlet*). A differenciálegyenletek megoldásának módszereit a matematika tárgyban részletesen tárgyalják, ennek az egyenletnek a megoldása azonban nem igényel speciális ismereteket. Első lépésként rendezzük át az egyenletet az alábbi módon:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt .$$

Ezzel elértük, hogy a két változó mennyiség (I és t) közül az egyenlet egyik oldalán csak az I, a másik oldalán pedig csak a t szerepel. (Ezt úgy szokták megfogalmazni, hogy sikerült a változókat szétválasztani, ezért az ilyen típusú differenciálegyenleteket *szétválasztható* differenciálegyenleteknek nevezik.) Ezek után a két oldalt a megfelelő változó szerint integráljuk az adott mennyiség határai között (az idő szerint 0 és t, az áramerősség szerint az ennek megfelelő $I(0) = I_0$ és $I(t) = I$ között):

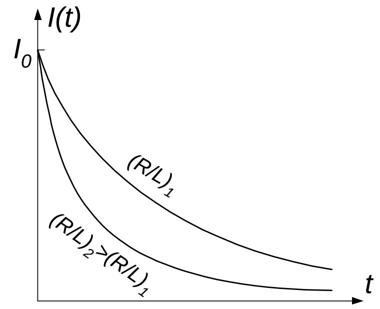
$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_{0}^{t} \frac{R}{L}dt .$$

Az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$ln\frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t .$$

Az $I(t)$ függvényt innen a logaritmus eliminálása és rendezés után kapjuk:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} .$$

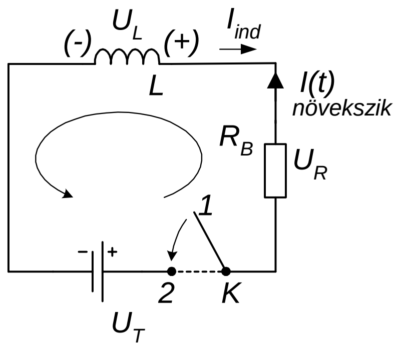


Eszerint az áram valóban nem azonnal tűnik el a telep lekapcsolása után, hanem exponenciálisan csökken a nulla érték felé (ábra).
Az áram csökkenésének kezdeti meredekségét a

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{R}{L}I_0$$

kifejezés adja meg.
Látható, hogy az áram csökkenése annál meredekebb, minél kisebb az L induktivitás, ami érthető, hiszen az áram megszűnésének lelassulását éppen az induktivitás okozza.
Kevésbé nyilvánvaló, hogy adott induktivitás esetén az áram csökkenése annál gyorsabb, minél nagyobb a körben az R ellenállás. Ezért, ha az áramkört a telep lekapcsolása után nem zárjuk, hanem megszakítjuk, akkor a körben igen nagy ellenállás jelenik meg, és az áram csökkenésének meredeksége nagyon nagy lesz. Tudjuk, hogy az önindukció jelensége miatt megjelenő indukált elektromotoros erő nagysága éppen az áramváltozás sebességével arányos: $|\varepsilon_{ind}| \sim \left|\frac{dI}{dt}\right|$. Ez az oka annak, hogy egy áramkör megszakításakor igen nagy – gyakran az áramkörben jelenlévő eredeti feszültségnél sokkal nagyobb – indukált feszültség keletkezik, ami a kapcsoló egymástól eltávolodó fém részei között szikrát hozhat létre (száraz levegőben $1\ mm$-es szikra létrehozásához durván $1000\ V$ feszültség szükséges).

Az áram bekapcsolása



Második példaként az áram bekapcsolását vizsgáljuk, ugyancsak egy induktivitást tartalmazó áramkörben. Az ábrán a megszakított áramkörbe (kapcsoló *1* állása) bekapcsoljuk a telepet (kapcsoló *2* állása). Az időt a bekapcsolás pillanatától mérjük, ekkor a körben áram még nem folyik, tehát $I(0)=0$, a telep viszont már az áramkörben van.

Most Kirchhoff II. törvénye az

$$U_R + U_L + U_T = 0$$

alakban írható fel. A kikapcsolásnál követett gondolatmenetet megismételve, a megoldandó egyenlet

$$-IR - L\frac{dI}{dt} + U_T = 0 .$$

Az egyenletet L-lel elosztjuk, majd átrendezzük annak érdekében, hogy a változókat szétválasszuk:

$$\frac{dI}{U_T - RI} = \frac{1}{L}t .$$

Ezután az egyenlet két oldalát integráljuk:

$$\int_0^I \frac{dI}{U_T - RI} = \int_0^t \frac{1}{L}t .$$

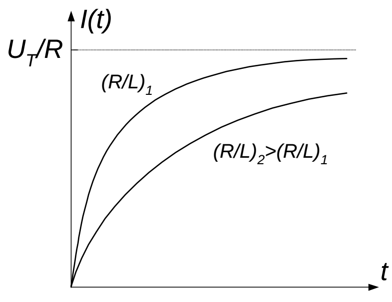
Az integrálás után azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{R}ln\frac{U_T - RI}{U_T} = \frac{1}{L}t .$$

A logaritmust eliminálva, majd az egyenletet rendezve, megkapjuk az áramerősség időfüggését:

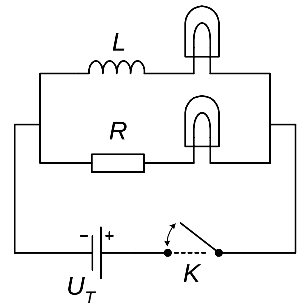
$$I(t) = \frac{U_T}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

A bekapcsolásnál tehát az induktivitás akadályozza az áram növekedését, ami miatt az áram nem tudja azonnal felvenni az ellenállásnak és a telepnek megfelelő $\frac{U_T}{R}$ értéket (ábra), azt csak fokozatosan éri el. Az emelkedés annál lassúbb, minél kisebb az $\frac{R}{L}$ hányados, vagyis adott ellenállás mellett minél nagyobb az induktivitás. Ez érthető, hiszen a lassú emelkedés oka éppen az induktivitás jelenléte.



Az induktivitás hatása néhány egyszerű kísérlettel is szemléltethető.

KÍSÉRLET:
Két párhuzamosan kapcsolt, azonos izzólámpát egy telepre kapcsolunk, majd az egyik izzóval egy nagy induktivitású (L) tekercset-, a másikkal egy kis induktivitású ellenállást (R) kapcsolunk sorba. A feszültséget és az ellenállást úgy állítjuk be, hogy mindkét izzó világítson. Ezután a telephez vezető vezetéket megszakítjuk, ekkor az izzók kialszanak. Ha most a telepet ismét bekapcsoljuk, akkor azt észleljük, hogy a tekercset tartalmazó ágban az izzó jól megfigyelhetően később gyullad fel, mint a másik ágban.



Ez a kísérlet látványosan megmutatja, hogy az egyensúlyi áram kialakulása az induktivitás jelenléte miatt késik.

KÍSÉRLET:
Ha az előző kísérletnél használt áramkörbe a telep helyett egy váltakozó feszültségű generátort kapcsolunk, akkor az izzók periodikusan felgyulladnak és kialszanak. Jól megfigyelhető azonban, hogy a két ágban a periodikus változás nem ugyanabban az ütemben történik: a két periodikus változás között fáziseltolódás van.

Ez a kísérlet is az induktivitásnak a változást késleltető hatását mutatja: az induktivitást tartalmazó ágban az áram változása késik a másik ág áramának változásához képest, ezért a különböző induktivitású ágakban a változások időben eltolva, fáziskülönbséggel zajlanak. Ennek a ténynek nagy jelentősége van a váltóáramú áramkörökben.

A mágneses erőtér energiája

Az elektromos erőtér tárgyalásánál láttuk, hogy a létrehozásakor végzett munka árán az erőtérhez rendelhető energia jelenik meg. Tudjuk, hogy a mágneses erőtér létrehozásához is munkavégzés (pl. elektromos áram keltése) szükséges. Kérdés, hogy ez a munka is megjelenik-e valamilyen mágneses energia formájában. Az induktivitást tartalmazó áramkörökre vonatkozó tapasztalatok azt sugallják, hogy ilyen energia létrejön, hiszen pl. a kikapcsolásnál a tekercs mágneses erőtere fokozatosan szűnik meg, és az áramkörben a kikapcsolás után is fenntartja az áramot.
A tekercsben felhalmozott energia meghatározásához használjuk fel a bekapcsolási jelenségnél tárgyalt áramkört (ábra), amelyre Kirchhoff II. törvénye szerint fennáll az

$$-IR - L\frac{dI}{dt} + U_0 = 0$$

összefüggés. Ebből a dt idő alatt végzett munkát Idt-vel való szorzással kaphatjuk meg:

$$-I^2Rdt - LI\frac{dI}{dt}dt + U_0Idt = 0\,,$$

amiből átrendezéssel az

$$\begin{array}{ccccc} U_0 I dt & = & I^2 R dt & + & LI\dfrac{dI}{dt}dt \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \textit{áramforrás munkája} & & \textit{Joule-hő} & & ??? \end{array}$$

egyenletet kapjuk. Ebben az egyenletben az egyes tagokat megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy a baloldalon az áramforrás által dt idő alatt végzett munka áll, a jobboldal első tagja pedig az ellenálláson hővé alakuló munkát (Joule-hő) adja meg. Látható, hogy a telep munkájának csak egy része alakul át termikus energiává, a maradékot a jobboldal második tagja képviseli. Kézenfekvőnek látszik, hogy ez a tag adja meg a tekercsben a mágneses erőtérnek a dt idő alatt bekövetkező változásával összefüggő $dE_{mágn}$ energiaváltozást, amit a *mágneses erőtér energiájának* tulajdonítunk:

$$dE_{mágn} = LI\frac{dI}{dt}dt = LIdI\ .$$

A dt idő alatt bekövetkező energiaváltozásból kiszámíthatjuk, hogy mekkora az $E_{mágn}$ mágneses energia akkor, ha a tekercsben I áram folyik. Ehhez az áramerősség változását 0-tól I-ig elemi lépésekben kell végrehajtani, és összegezni (integrálni) kell az eközben bekövetkező elemi energiaváltozásokat:

$$E_{mágn} = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2}LI^2\ .$$

Ekkora energia van jelen az I árammal átjárt, L önindukciójú tekercsben.
Ahhoz, hogy az energia kifejezésére általánosabb alakot kapjunk, próbáljuk meg kiküszöbölni az összefüggésből konkrétan a tekercsre vonatkozó adatokat (L, I), és helyettesítsük azokat a tekercsben kialakult mágneses erőtér jellemzőivel.
Használjuk fel az önindukcióra kapott

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

kifejezést (N a tekercs menetszáma, A a keresztmetszete, l a hossza) és a tekercs mágneses erőterére vonatkozó

$$B = \frac{\mu NI}{l} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{Bl}{\mu N}$$

összefüggést. Ezeket a mágneses energia kifejezésébe behelyettesítve, egyszerűsítések után azt kapjuk, hogy

$$E_{mágn} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}Al = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V\ ,$$

ahol $V = Al$ a tekercs térfogata.
Ebből a kifejezésből látszik, hogy a tekercsben tárolt energia arányos azzal a térfogattal, ahol mágneses erőtértér van jelen (az itt feltételezett ideális esetben csak a tekercs belsejében van mágneses erőtér), egyébként pedig – a tekercset kitöltő adott anyag esetén – csak az erőteret jellemző mágneses indukcióvektor nagyságától függ. Már ebből a meggondolásból is sejthető, hogy ez az energia a tekercsben létrejött mágneses erőtérrel hozható kapcsolatba, de ez még világosabbá válik, ha kiszámítjuk az energia térfogati sűrűségét:

$$w_{mágn} = \frac{E_{mágn}}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}\ .$$

Ez azt jelenti, hogy a tekercs által bezárt térfogat, vagyis a mágneses erőtér bármely pontján ilyen energiasűrűség van jelen, és ez az energiasűrűség (a tekercset kitöltő adott anyag esetén) *csak az erőteret jellemző mágneses indukcióvektortól függ*.
Egyelőre a tapasztalatokra hivatkozva csak feltételezzük (később az elektrodinamikában ezt be is bizonyítják), hogy ez az összefüggés mindenféle mágneses erőtér esetén igaz: ahol mágneses erőtér van, ott ilyen energiasűrűség van jelen függetlenül attól, hogy az erőteret mi (mágnes, elektromos áram) hozta létre.
A fenti összefüggés homogén, izotróp, lineáris anyag esetén – a $B = \mu H$ összefüggés segítségével átírható a

$$w_{mágn} = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2}\mathbf{HB}$$

alakba is. A vektori írásmód itt azért lehetséges, mert ilyen anyagokban $\mathbf{B} \| \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{HB} = HB$.
Kimutatható hogy ez a vektori formában felírt összefüggés általánosan – tehát nem csak a fenti megszorítások mellett – érvényes, vagyis a mágneses erőtér energiasűrűsége általában a

$$w_{mágn} = \frac{1}{2}\mathbf{HB}$$

összefüggéssel adható meg.