Elektromos áramkörök és hálózatok, Kirchhoff törvényei

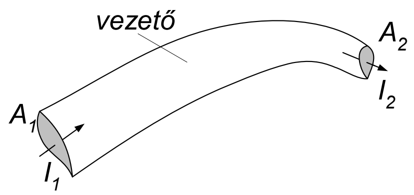
A gyakorlatban az elektromos áram különböző vezetőrendszerekben folyik. Igen fontos, hogy az áramot fenntartó telepek ismeretében a vezetőrendszerek részeiben folyó áramokat számítással is meg tudjuk határozni, hiszen ez teszi lehetővé az áramot felhasználó eszközök megtervezését. A legegyszerűbb eset az, ha az áramot egyetlen zárt hurokból álló *áramkörben* kell vizsgálnunk, az esetek többségében azonban az elektromos áram bonyolult vezetőrendszerekben ún. *hálózatokban* folyik. A hálózatokban rendszerint áramelágazások, más néven *csomópontok* is vannak, a csomópontok közötti vezetőszakaszok, az ún. *ágak* pedig különféle áramköri elemeket (ellenállások, telepek) tartalmaznak. Egy hálózat vizsgálatánál két alapvető kérdés merül fel:

- Milyen törvény szabja meg, hogy az elágazásoknál az áramerősség hogyan oszlik meg az egyes ágakban?
- Érvényes-e az elektrosztatika I. alaptörvénye az áramkörökben, és ha érvényes, akkor ennek milyen következményei vannak az áramokra vonatkozóan?

Itt csak olyan áramkörökkel foglalkozunk, amelyekben az áram az áramkör bármely helyén időben nem változik (különböző helyeken az áramerősségek lehetnek eltérőek, de értékük nem változhat meg). Az ilyen áramokat *időben állandó*- vagy *stacionárius áramoknak* nevezzük.

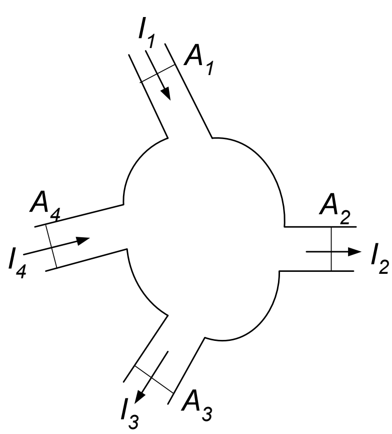
A töltésmegmaradás törvénye időben állandó áramokra, Kirchhoff I. törvénye

A tapasztalatok azt mutatják, hogy egy vezetőben – különleges körülményektől eltekintve – elektromos töltés nem keletkezik, és nem tűnik el, vagyis a töltés mennyisége megmarad. Ebből következik, hogy ha egy vezetőben időben állandó áram folyik, akkor a vezető egy keresztmetszetén (ábra) Δt idő alatt átment $\Delta Q_1 = I_1 \Delta t$ töltéssel elvileg két dolog történhet:



- A töltés a többi keresztmetszeten (pl. a *2* keresztmetszeten) is ugyanennyi idő alatt megy át, tehát $\Delta Q_1 = I_1 \Delta t = \Delta Q_2 = I_2 \Delta t$. Ez azt jelenti, hogy $I_1 = I_2$, vagyis a vezető minden keresztmetszetén ugyanakkora az áramerősség.
- A töltés egy része a vezetőnek az *1* és *2* felülete közti térfogatban marad, és a *2* felületen kisebb – de időben állandó – áram megy tovább. Ilyenkor az említett térfogatban a töltés mennyisége időben növekedne, a töltés ott felhalmozódna.

A második lehetőség azonban nem valósulhat meg. Ennek oka az, hogy időben állandó áram csak akkor jöhet létre, ha a vezetőben az elektromos térerősség időben állandó ($I \sim E$). A töltés fokozatos felhalmozódása azonban időben változó erőteret, és így időben változó áramot eredményezne. Ezért időben állandó áram esetén a vezetőben nem lehetséges töltésfelhalmozódás. Ez azt jelenti, hogy marad az – a tapasztalat által is megerősített – lehetőség, hogy állandó áram esetén egy vezető bármely két keresztmetszetén ugyanakkora az áramerősség:



$$I_1 = I_2.$$

Hasonló meggondolásokat tehetünk egy csomópont esetében is (ábra), ahol vezetők csatlakoznak egymáshoz. Mivel töltésfelhalmozódás nem lehetséges, itt is érvényes, hogy Δt idő alatt a befolyó áramok (I_1, I_4) által a csomópontba bevitt töltésnek meg kell egyeznie a kifolyó (I_2, I_3) áramok által onnan kivitt töltéssel,

$$I_1\Delta t + I_4\Delta t = I_2\Delta t + I_3\Delta t\,,$$

vagyis

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3\,.$$

Eszerint állandó áramok esetén egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével.
Ha az áramoknak előjelet adunk, és a csomópontba befolyó áramokat pozitívnak-, az onnan kifolyó áramokat pedig negatívnak tekintjük (I_1, I_4>0 és I_2, I_3<0), akkor az egyenlet így alakul:

$$I_1 + I_4 + I_2 + I_3 = 0\,.$$

Ezek az összefüggések természetesen akárhány áram esetén érvényesek, vagyis általánosan a

$$\sum_n I_n = 0$$

alakba írhatók. Ez *Kirchhoff I. törvénye*, amely a töltésmegmaradás törvényét fejezi ki. A törvénynek ebbe az alakjába az áramokat – a fenti megállapodás szerint – előjeles mennyiségekként kell behelyettesíteni.

*********************** ************************* **********************

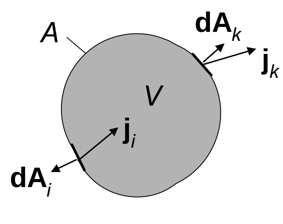
Kirchhoff I. törvénye speciális esete egy általános, mindenféle áramlás (transzportfolyamat) esetére érvényes törvénynek, amelyhez az alábbi módon juthatunk el.
Tegyük fel, hogy egy térrészben valamilyen mennyiség (pl. tömeg, töltés, energia, stb.) egyik helyről a másikra áramlik. Az áramló mennyiséget jelöljük Ω-val, és az áramlás jellemzésére – az elektromos áramnál bevezetett jellemzők analógiájára – vezessük be az Ω mennyiség $I_\Omega = \dfrac{d\Omega}{dt}$ áramerősségét és $\mathbf{j}_\Omega = \dfrac{d\Omega}{dA_N}\mathbf{u}_T$ áramsűrűségét (itt $\mathbf{u}_T$ az áramlás irányába mutató egységvektor, dA_N az áramlás irányára merőleges elemi felület).
Válasszunk ki az áramlásban egy tetszőleges V térfogatot, és írjuk fel a térfogatban felhalmozódó Ω_V mennyiség időbeli változásának $\dfrac{d\Omega_V}{dt}$ sebességét.
A változás két okból következhet be:

– A V térfogatba befolyó vagy onnan kifolyó áramok miatt.
– A V térfogatban esetleg jelenlévő források miatt, amelyek az Ω mennyiséget termelik, vagy eltüntetik (utóbbi esetben gyakran nyelőkről beszélünk).

Először az áramok hatását vizsgáljuk meg. Láttuk, hogy tetszőleges felületen átfolyó áramot az

$$I = \int_A \mathbf{j}_\Omega \mathbf{dA}$$

összefüggés adja meg. Ez az összefüggés érvényes a V térfogatot határoló A zárt felületre is, csupán azt kell figyelembe venni, hogy a térfogatba beáramló töltés pozitiv töltésváltozást okoz, a felületvektor kifelé irányítása miatt viszont a "$\mathbf{j}_\Omega\mathbf{dA}$" szorzat ilyenkor negatív (az ábrán pl. az *i*-edik felületelemen). Hasonlóan: a kifolyó áram negatív töltésváltozást okoz, a "$\mathbf{j}_\Omega\mathbf{dA}$" szorzat viszont ilyenkor pozitív (az ábrán pl. az *k*-adik felületelemen). Ennek megfelelően az A zárt felületen átfolyó áram az



áramsűrűséggel kifejezve:

$$I = -\oint_A \mathbf{j}_\Omega \mathbf{dA} .$$

Ez a mennyiség a térfogatba befolyó- és onnan kifolyó áramok előjeles összegét, vagyis a térfogatban a töltésfelhalmozódás sebességének egyik összetevőjét adja meg:

$$\left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_1 = -\oint_A \mathbf{j}_\Omega \mathbf{dA} .$$

Az Ω mennyiség keletkezésének vagy eltűnésének hatását akkor tudjuk figyelembe venni, ha ismerjük a V térfogaton belül a *forráserősséget*, vagyis az Ω mennyiség keletkezésének (eltűnésének) $F_\Omega = \frac{d\Omega_V^{forrás}}{dt} = \left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_2$ sebességét (az F_Ω forráserősség pozitív, ha az Ω mennyiség keletkezik, és negatív, ha eltűnik).

A két hatás eredményeként a V térfogatban bekövetkező változás sebességét a

$$\frac{d\Omega_V}{dt} = \left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\Omega_V}{dt}\right)_2 ,$$

vagyis a

$$\frac{d\Omega_V}{dt} = -\oint_A \mathbf{j}_\Omega \mathbf{dA} + F_\Omega$$

egyenlet adja meg. Ezt az áramló mennyiségre vonatkozó általános összefüggést *kontinuitási egyenletnek* nevezik.

Előfordul, hogy a források a V térfogaton belül nem egyenletesen oszlanak el. Ilyenkor egy lokális jellemzőt vezethetünk be, amely megadja egy elemi térfogatban lévő forrás és az elemi térfogat

$$f_\Omega = \frac{dF_\Omega}{dV}$$

hányadosát, az ún. *forrássűrűséget*. A forrássűrűség helyfüggését ismerve egy V térfogatban a teljes forráserősség:

$$F_\Omega = \int_V f_\Omega dV .$$

Ezzel a kontinuitási egyenlet a

$$\frac{d\Omega_V}{dt} = -\oint_A \mathbf{j}_\Omega \mathbf{dA} + \int_V f_\Omega dV$$

alakot ölti.

Az általános kontinuitási egyenletből konkrét áramló mennyiség esetén az adott áramlásra vonatkozó összefüggések kaphatók (így lehet levezetni pl. a folyadékok áramlására vonatkozó, ismert kontinuitási egyenletet is). Mi most az elektromos áramra alkalmazzuk az általános egyenletet, és levezetjük Kirchhoff I. törvényét, amit fizikai meggondolások alapján korábban már megkaptunk. Ekkor az általános egyenletben az áramló mennyiség az elektromos töltés, tehát $\Omega = Q$ és $\mathbf{j}_\Omega = \mathbf{j}$, így az egyenletnek erre az esetre érvényes alakja:

$$\frac{dQ_V}{dt} = -\oint_A \mathbf{j} \mathbf{dA} + \int_V f_Q dV .$$

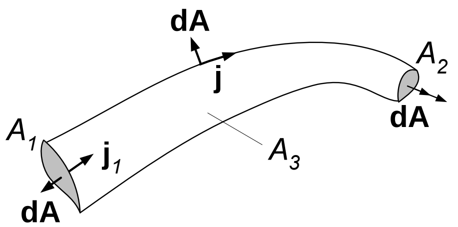
Mivel elektromos töltést kelteni és eltüntetni a tapasztalat szerint nem lehet, $f_Q = 0$, így az egyenletben nem szerepelhet forrás, tehát

$$\frac{dQ_V}{dt} = -\oint_A \mathbf{j} \mathbf{dA} .$$

Egyelőre csak időben állandó (stacionárius) áramokkal foglalkozunk, ekkor pedig a korábbi meggondolásaink szerint egy térfogatban nem lehet töltésfelhalmozódás, ezért $\frac{dQ_V}{dt} = 0$. Ennek megfelelően az időben állandó (stacionárius) áramokra a kontinuitási egyenlet a

$$\oint_A \mathbf{j}d\mathbf{A} = 0$$

alakban érvényes. Ez azt jelenti, hogy az A zárt felület által határolt térfogatba be- és kifolyó áramok nagysága azonos.



Ennek a következménye az, hogy egy vezető (pl. egy drót) különböző keresztmetszetein ugyanaz az áram folyik. A zárt felület most az $A1$, $A2$ keresztmetszetekből és az $A3$ palástfelületből áll (ábra). A kontinuitási egyenlet erre az esetre így alakul:

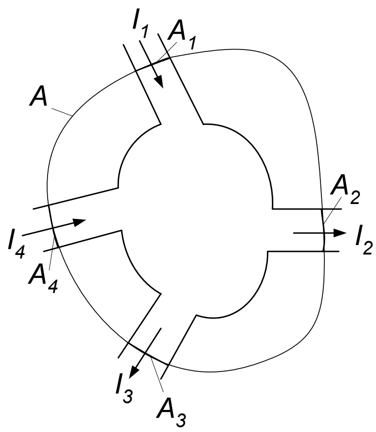
$$\oint_A \mathbf{j}d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_{A_3} \mathbf{j}d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{j}d\mathbf{A} = 0 .$$

Itt felhasználtuk azt a tényt, hogy a vezető palástján az áramsűrűség-vektor merőleges a felületvektorra, így $\oint_{A_3} \mathbf{j}d\mathbf{A} = 0$.

Felhasználva az áram és az áramsűrűség között fennálló összefüggést, a fenti egyenletből a korábban kapott összefüggéssel azonos eredményt kapunk:

$$-I_1 - I_2 = 0 ,$$
$$I_1 + I_2 = 0 .$$

Vagyis az áramok előjeles összege nulla, az egyik felületen befolyó áram a másikon kifolyik.



Hasonlóan járhatunk el egy áramelágazásnál (ábra). Itt a zárt A felületnek csak azokon a részein van áram, ahol vezetőt metsz át, ezért a zárt felületre vett integrál így alakul:

$$\oint_A \mathbf{j}d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_{A_2} \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_{A_3} \mathbf{j}d\mathbf{A} + \int_{A_4} \mathbf{j}d\mathbf{A} + ... = 0 ,$$

amiből következik, hogy

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + ... = 0 .$$

Általánosan

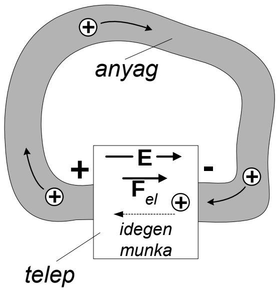
$$\sum_n I_n = 0 ,$$

vagyis megkaptuk a Kirchhoff I. törvénye néven korábban már megismert összefüggést.

*********************** *************************** **********************

Az elektrosztatika I. alaptörvénye állandó áramokra, Kirchhoff II. törvénye

Korábban megállapítottuk: ahhoz, hogy egy vezetőben állandó áramot tartsunk fenn, egy speciális eszközre (áramforrás, más néven telep) van szükség, ami biztosítja a töltések körforgását (ábra). Ebben az eszközben a töltéseket az ott kialakult $\mathbf{E}$ elektromos erőtérrel, és az általa kifejtett $\mathbf{F}_{el}$ erővel szemben kell mozgatni, ami többnyire valamilyen külső hatás által végzett munka árán valósítható meg. Ez a külső hatás általában az elektromosságtól „idegen" (pl. kémiai) folyamatok felhasználásával működik, ami az elektromosságtanba nehezen építhető be. Ezért a telep működését egy fiktív, elektromos modellel írjuk le.



Egy q pozitív töltésnek a telep egyik oldaláról a másikra történő átviteléhez szükséges W^* idegen munkát egy idegen $\mathbf{E}^*$ elektromos térerősség munkájaként fogjuk fel, amit a

$$W^* = \int q\mathbf{E}^*\mathbf{dr} = q\int \mathbf{E}^*\mathbf{dr}$$

kifejezéssel adunk meg. Látható, hogy ez a munka az átvitt töltés, és egy, a telepre jellemző mennyiség szorzataként írható fel. A telepre jellemző mennyiség ebből úgy kapható meg, hogy az „idegen” munkát elosztjuk az átvitt töltéssel:

$$\varepsilon = \frac{W^*}{q} = \int \mathbf{E}^*\mathbf{dr}\,.$$

Az így kapott ε jellemzőt a telep *elektromotoros erejének* nevezik. Az elnevezés nem szerencsés, hiszen ε nem erő-, hanem potenciálkülönbség- (feszültség-) jellegű mennyiség, egysége *1 V*.

Az elektromotoros erő egy áramkörbe be nem kapcsolt telep esetén az idegen térerősségnek megfelelő feszültséget hoz létre a telep két pólusa között, amit az

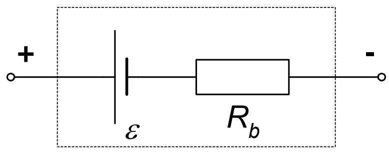
$$U^* = -\int \mathbf{E}^*\mathbf{dr} = -\varepsilon$$

összefüggés ad meg. Ezt a feszültséget gyakran *generátorfeszültségnek* nevezik.

A fenti definíciókból kiderül, hogy a két mennyiség nagysága megegyezik, előjelük viszont ellentétes. Mivel $\mathbf{E}^*$ a telep negatív pólusától a pozitív felé mutat, az elektromotoros erőt akkor tekintjük pozitívnak, ha a telepen az $\mathbf{E}^*$-gal egy irányban – vagyis a negatív pólustól a pozitív felé – haladunk át. A generátorfeszültség viszont akkor pozitív, ha a telepen a pozitív pólustól a negatív felé haladunk át.

Egy telepre kapcsolt áramkör rendszerint nagy ellenállású- és az ezeket összekötő, elhanyagolható ellenállású szakaszokból áll. Mivel egy vezető végei közti potenciálkülönbség arányos a vezető ellenállásával, az igen kis ellenállású szakaszok, az ún. *vezetékek* végei közti potenciálkülönbség elhanyagolható a nagy ellenállású szakaszok, az ún. *ellenállások* végei közti potenciálkülönbségek mellett.

Mivel a telep az áramkör része, a telep által létrehozott áram magán a telepen is átfolyik, és a telepnek saját ellenállása, ún. *belső ellenállása* is van, amit az áramkör vizsgálatánál figyelembe kell venni. A belső ellenállás egyik következménye az, hogy a telep két pólusa között mérhető feszültség nagysága eltér az elektromotoros erő nagyságától, ezért a telepet az áramkörökben úgy modellezik, hogy az a töltésmozgást biztosító ideális elektromotoros erőből (ε) és a telep ellenállását képviselő belső ellenállásból (R_b) áll (ábra).



Idegen térerősség jelenléte esetén az Ohm-törvényben is figyelembe kell venni ezt a hatást, tehát ilyen helyen az eredeti, $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ alak helyett a

$$\mathbf{j} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*\right)$$

kifejezés lép érvénybe (γ a vezetőképesség). Ebből a valódi térerősséget kifejezve az alábbi összefüggést kapjuk:

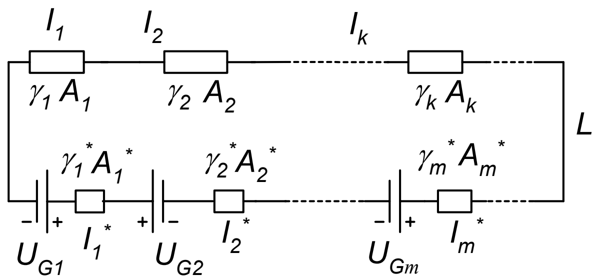
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\gamma} - \mathbf{E}^*\,.$$

Egy áramkörben folyó áram és az egyes áramköri elemeken kialakult feszültségek között az Ohm-törvény és az elektrosztatika I. alaptörvénye segítségével kaphatunk

összefüggést. Azt, hogy az elektrosztatika I. alaptörvénye érvényes-e állandó áramok esetén, a tapasztalat alapján lehet eldönteni. A kísérletek azt mutatják, hogy *az I. alaptörvény teljesül* állandó áramú áramkörök esetén is, vagyis, ha egy áramkörben körbejárunk, és a mért feszültségeket összeadjuk, akkor a teljes körüljárás végén nullát kapunk eredményül.
Konkrét összefüggések megtalálása érdekében alkalmazzuk az elektrosztatika

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0$$

I. alaptörvényét egy zárt L áramhurokra, amelyben ellenállások és telepek vannak (ábra).



Az ellenállásokat és telepeket összekötő vezetékek ellenállását elhanyagolhatónak tételezzük fel, ezért az integrálban ezeknek a kis ellenállású szakaszoknak a járulékát elhanyagolhatjuk (itt ugyanaz az áram folyik, mint másutt, de az ellenállás, és így a potenciálkülönbség is kicsi). A nagy ellenállású részeket – az ellenállásokat – hasáboknak képzeljük, amelyeknek hossza l_1, l_2,…keresztmetszete A_1, A_2,…vezetőképessége γ_1, γ_2,…, a rajtuk átfolyó áram erőssége I_1, I_2,…A belső ellenállásokra vonatkozó, megfelelő adatokat csillaggal különböztetjük meg a többitől.
A zárt hurokban érvényes, hogy

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{r} = \oint_L \left(\frac{\mathbf{j}}{\gamma} - \mathbf{E}^* \right) d\mathbf{r} = 0 \,.$$

Ebből következik, hogy

$$\oint_L \frac{\mathbf{j}}{\gamma} d\mathbf{r} - \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{r} = 0 \,.$$

Ha az ellenállás-szakaszokat *„k”* indexszel, a telepeket *„m”* indexszel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_k \left(\int_k \frac{\mathbf{j}_k}{\gamma_k} d\mathbf{r} \right) + \sum_m \left(\int_m \frac{\mathbf{j}_m^*}{\gamma_m^*} d\mathbf{r} \right) - \sum_m \varepsilon_m = 0 \,.$$

A második összeg azért jelent meg, mert a telepeknek is van vezetőképessége. Az integrálás az indexszel jelölt szakaszokon történik.
Ha az L zárt hurkot az áramiránnyal egyező irányban járjuk körbe, akkor vezetőkben $\mathbf{j} \| d\mathbf{r}$, és az egyenlet így írható

$$\sum_k \left(\int_k \frac{j_k}{\gamma_k} dr \right) + \sum_m \left(\int_m \frac{j_m^*}{\gamma_m^*} dr \right) - \sum_m \varepsilon_m = 0 \,.$$

Ha az árammal ellentétesen haladunk, akkor az összegzésben szereplő tagok negatívok lesznek, de ellenkezőre változik az elektromotoros erők előjele is, ezért az így kapott egyenlet egyenértékű a korábbival. Ez más szóval azt jelenti, hogy a *körüljárás iránya önkényesen megválasztható*, ettől a végeredmény nem függ.
Az egyenlet tovább alakítható, ha megvizsgáljuk az integrálban szereplő mennyiségeket. Ha az ellenállásokat egyenletes keresztmetszetű, hasáb alakú vezetőszakaszoknak tekintjük, akkor az egyenlet baloldalán szereplő – egy-egy vezetőszakaszra vonatkozó – integrálok így alakíthatók át:

$$\int_k \frac{j_k}{\gamma_k} dr = \frac{I_k}{\gamma_k A_k} \int_k dr = \frac{I_k l_k}{\gamma_k A_k} = I_k R_k$$

$$\int_m \frac{j_m^*}{\gamma_m^*} dr = \frac{I_m^*}{\gamma_m^* A_m^*} \int_m dr = \frac{I_m^* l_m^*}{\gamma_m^* A_m^*} = I_m R_{bm} .$$

Itt felhasználtuk, hogy egy hasáb alakú, A keresztmetszetű, l hosszúságú vezetőszakasz ellenállása $R = \frac{l}{\gamma A}$, és hogy $j = \frac{I}{A}$. A telepeken átfolyó áramok jelölésénél elhagytuk a csillagot, mert az egyenletekben ezeket az m index különbözteti meg a többi áramtól.

Mindezt figyelembe véve, a fenti egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m R_{bm} - \sum_m \varepsilon_m = 0 ,$$

illetve

$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m R_{bm} = \sum_m \varepsilon_m$$

Ez az összefüggés *Kirchhoff II. törvényének* egyik alakja. Itt R_k a vizsgált áramhurok k-adik ellenállása, I_k a k-adik ellenálláson folyó áram, ε_m a hurok m-edik telepének elektromotoros ereje, R_{bm} az m-edik telep belső ellenállása.

A törvény szerint, ha egy zárt áramhurokban körbejárunk, és megfelelő előjelekkel összeadjuk az ellenállásokra vonatkozó IR szorzatokat és a telepek elektromotoros erőit, akkor a két összeg egymással megegyezik.

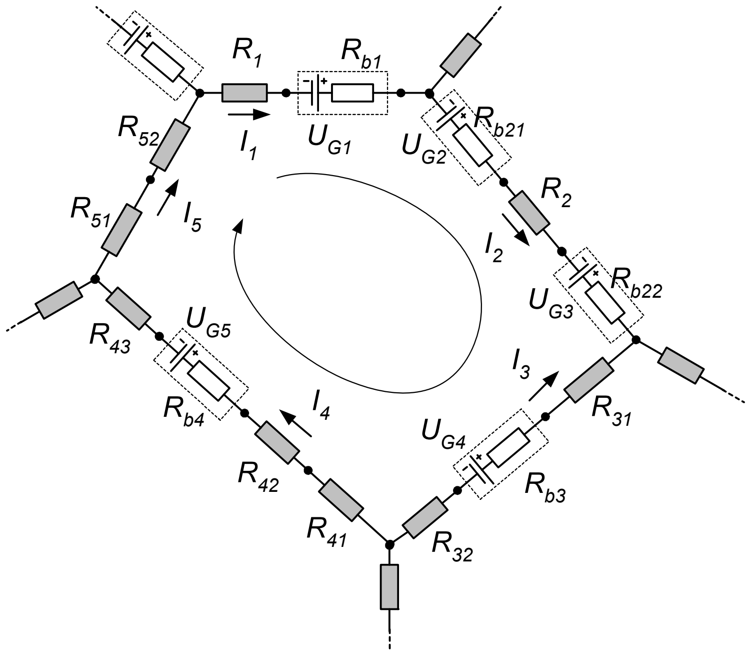
Kirchhoff II. törvényét gyakran a generátorfeszültségekkel írják fel, és ekkor – figyelembe véve a $\varepsilon_m = -U_m^*$ összefüggést – az alábbi alakot kapjuk:

$$\sum_k I_k R_k + \sum_m I_m R_{bm} + \sum_m U_m^* = 0 .$$

A törvény alkalmazásánál fontos az alábbiak ismerete:

- A levezetés során nem tételeztük fel, hogy minden áramköri elemen ugyanakkora áram folyik át, tehát a törvény bonyolult, elágazásokat is tartalmazó hálózatban, tetszőlegesen kiválasztott zárt hurokra fennáll.
- Láttuk, hogy a törvény alkalmazása során a körüljárást önkényesen választhatjuk meg.
- Az is könnyen belátható, hogy a számítás elején az áramirányok is tetszőlegesen megválaszthatók, mert a helytelen választás nem okoz nagy problémát: az egyenletből kiszámított áram(ok) nagyságára ilyenkor helyes értéket kapunk, csak a rosszul választott áramirány esetén az áramra negatív érték adódik. Így utólag a helyes áramirányokat is meg tudjuk állapítani.
- A körüljárás során azt az áramot tekintjük pozitívnak, amely a körüljárással azonos irányban folyik, az ellenkező irányú áram (és így az IR tag is) negatív.
- A generátorfeszültség akkor pozitív, ha a körbejárás során a telepen a pozitív pólusból a negatív felé haladunk, fordított haladásnál a generátorfeszültség negatív. (Az elektromotoros erő előjele ennek ellenkezője).
- Kimutatható, hogy tetszőleges hálózat esetén annyi független egyenlet írható fel, amennyi az ágak (vagyis az ismeretlen áramok) száma, így a telepek és az ellenállások ismeretében az áramok mindig kiszámíthatók.

A törvény alkalmazását olyan zárt hurok esetén mutatjuk be, amelyet egy bonyolult, elágazásokat is tartalmazó hálózatban választottunk ki (ábra alább). A hurkot a csomópontok *ágakra* bontják. Egy ágon belül az áram mindenütt azonos, de a hurok különböző ágaiban az áramok eltérőek lehetnek. Ezért egy hurokban elvileg annyiféle áram folyhat, amennyi a hurok körüljárásakor érintett ágak száma. Az ellenállásokat és a telepeket ismertnek tételezzük fel.



A számítás során az $I_1, I_2 \ldots$ illetve $U_{G1}, U_{G2}, \ldots$ szimbólumok az áramok- és a generátorfeszültségek nagyságát jelölik ($I > 0$ és $U_G = \left|U^*\right|$), az előjelekre elfogadott megállapodást az egyenletbe beírt előjelekkel vesszük figyelembe.

Az ágakban felvett áramirányok- és a megadott körüljárás esetén az itt látható hurokra a következő egyenlet írható fel:

$$I_1R_1 - U_{G1} + I_1R_{b1} - U_{G2} + I_2R_2 + I_2(R_{b21} + R_{b22}) - U_{G3} - I_3(R_{31} + R_{32}) -$$
$$- I_3R_{b3} + U_{G4} + I_4(R_{41} + R_{42} + R_{43}) + I_4R_{b4} + U_{G5} + I_5(R_{51} + R_{52}) = 0.$$

Ha az egyazon ágban lévő külső- és belső ellenállásokat az összegükkel helyettesítjük

$$R_{b21} + R_{b22} = R_{b2},\ R_{31} + R_{32} = R_3\ ,\ R_{41} + R_{42} + R_{43} = R_4,\ R_{51} + R_{52} = R_5,$$

akkor az egyszerűbb

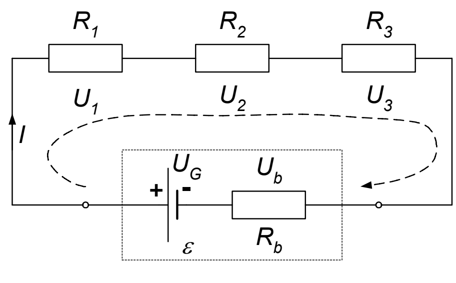
$$I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4 - I_5R_5 + I_1R_{b1} + I_2R_{b2} - I_3R_{b3} + I_4R_{b4} -$$
$$- U_{G1} - U_{G2} - U_{G3} + U_{G4} + U_{G5} = 0$$

egyenletet kapjuk.

Vegyük észre, hogy az áram meghatározása szempontjából az egyes ágakban található ellenállásokat, amelyeken ugyanaz az áram folyik át (ezek ún. *sorba kapcsolt* ellenállások), helyettesíthetjük az ellenállások összegével, ami az ellenállások *eredőjeként* fogható fel.

A Kirchhoff-törvények alkalmazása

Alkalmazzuk a törvényt először egy egyszerű, egyetlen áramhurokból álló áramkörre, amelyben egy telep, vezetékek és ellenállások vannak (ábra). Ha az áramkört az áram haladásának irányában járjuk körbe (az ábrán a



szaggatott vonal jelzi a körüljárást), és I az áram nagyságát, U_G pedig a generátorfeszültség $U_G = |U^*|$ nagyságát jelenti ($I, U_G > 0$), akkor a fenti előjel-megállapodás szerint az IR szorzatok (ellenállásokon eső feszültségek) pozitívak, a telep generátorfeszültsége pedig negatív. Ennek megfelelően Kirchhoff II. törvénye az

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_b - U_G = 0$$

illetve az

$$U_G = IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_b$$

alakot ölti.
Mivel az áramkörben nincs elágazás, az ellenállásokon ugyanaz az áram folyik át (Kirchhoff I. törvénye). Ha bevezetjük az

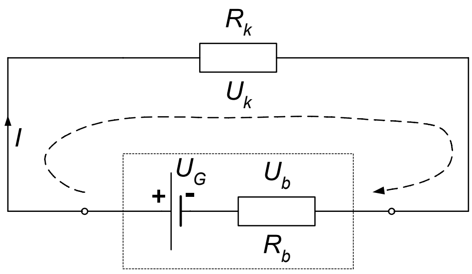
$$R_1 + R_2 + R_3 = R_k$$

eredő ellenállást, akkor az egyenlet egyszerűbb alakba írható:

$$U_G = IR_k + IR_b$$

Az itt bevezetett R_k ellenállás a telepen kívüli ellenállások összege az áramkörben, amit *külső ellenállásnak* is nevezhetünk.

Az eredő ellenállás bevezetésével a fenti áramkör egyszerűsíthető, amint az a mellékelt ábrán látható.



Az áramkörre felírt egyenletből kiszámíthatjuk az áramot:

$$I = \frac{U_G}{R_k + R_b}.$$

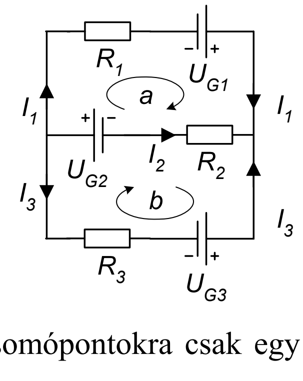
A telep sarkai (kapcsai) közti feszültséget *kapocsfeszültségnek* nevezik, és rendszerint U_K-val jelölik. Ez esetünkben megegyezik a külső ellenállás végei közötti feszültséggel, tehát

$$U_K = IR$$

illetve a huroktörvény alapján

$$U_K = U_G - IR_b.$$

Ebben az egyszerű esetben tehát $U_K < U_G$, vagyis a kapocsfeszültség kisebb, mint a generátorfeszültség (elektromotoros erő). A kettő csak akkor egyezik meg, ha a körben nem folyik áram ($I=0$), mert ekkor a fenti egyenletből azt kapjuk, hogy $U_K = U_G$.



Bonyolultabb áramkör esetén több egyenlet felírása szükséges. Az ábrán látható esetben pl. az áramkör 3 ágból áll. Mivel egy ág minden pontján azonos az áramerősség, az ábrán látható esetben 3 különböző áramérték lehetséges. Ezek meghatározásához 3 független egyenletre van szükség.
A csomóponti törvényből a baloldali csomópontra azt kapjuk, hogy

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

A másik csomópontra ugyanez az egyenlet adódik, tehát a csomópontokra csak egy független egyenlet írható fel.
Az ábrán a-val jelölt hurokra az

$$I_1R_1 - U_{G1} - I_2R_2 - U_{G2} = 0$$

egyenletet, a *b*-vel jelölt hurokra pedig az

$$U_{G2} + I_2 R_2 + U_{G3} - I_3 R_3 = 0$$

egyenletet kapjuk.

A harmadik lehetséges hurok az áramkör külső kontúrja lenne, de könnyen belátható, hogy az erre felírt hurokegyenlet az *a* és *b* hurokra felírt egyenletek összege, vagyis nem független egyenlet.

A *3* ismeretlen áram meghatározásához tehát – a várakozásnak megfelelően – *3* független egyenletet tudtunk felírni, így az áramértékek egyértelműen meghatározhatók.

Példaként számítsuk ki a fenti hálózatban folyó áramokat, ha $R_1 = 1ohm, R_2 = 2ohm, R_3 = 3ohm$ és $U_{G1} = 1V, U_{G2} = 1V, U_{G3} = 1V$.

Behelyettesítés után az

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$I_1 - 1 + 2I_2 - 1 = 0$$
$$1 - 2I_2 + 1 - 3I_3 = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, aminek megoldása: $I_1 = \frac{6}{11}A, I_2 = -\frac{8}{11}A, I_3 = \frac{2}{11}A$. Mivel az I_2 áramra negatív értéket kaptunk, ennek irányát rosszul vettük fel: a középső ágban az áram a feltételezettel ellenkező irányú (nagysága a számított érték nagyságával azonos).

Bonyolultabb hálózatokban általában nem igaz, hogy a kapocsfeszültség mindig kisebb, mint a generátorfeszültség. Ennek az az oka, hogy ilyenkor egy telep belső ellenállásán más telepek által keltett áramok is átfolynak, és az így létrejött feszültség módosítja a kapocsfeszültséget. Ha pl. a telepen a saját áramával ellentétes irányú áram folyik át, akkor a kapocsfeszültség nagyobb lehet, mint az elektromotoros erő.

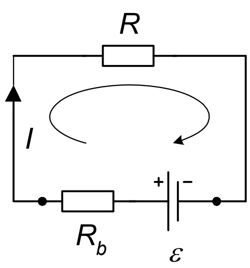
A Kirchhoff-törvények segítségével számos hasznos összefüggés vezethető le. Így például könnyen bebizonyítható, hogy egymással sorba- vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállások helyettesíthetők egy ellenállással, amelyen átfolyó áram és a végei közt mért feszültség azonos az eredeti ellenállásokon átfolyó árammal és az ellenállássor végei közötti feszültséggel. A megfelelő helyettesítő (eredő) ellenállások az alábbi összefüggésekből kaphatók:

$$R_e^{soros} = \sum_i R_i \qquad \frac{1}{R_e^{párh}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

(a soros eredményt korábban már beláttuk).

Energiaviszonyok elektromos áramkörben

A vezetőben folyó állandó áramot a telepben zajló idegen folyamat által végzett munka tartja fenn. A töltések mozgatására fordított energia a töltések mozgása során hővé alakul. Ezt az energiamérleget az ábrán látható, egyszerű áramkör vizsgálatával könnyen számszerűsíthetjük.



Az áramkörre felírva Kirchhoff II. törvényét, az

$$\varepsilon = IR + IR_b$$

összefüggést kapjuk. Ebből úgy kaphatunk Δt időtartamra vonatkozó energiamérleget, hogy megszorozzuk $I\Delta t$ -vel. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon I\Delta t & = & I^2 R\Delta t & + & I^2 R_b\Delta t \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \textit{telep} & & \textit{hasznos} & & \textit{elveszett} \end{array}$$

A baloldalon a telepben működő *idegen hatás* (az ε elektromotoros erő) által Δt idő alatt végzett *munka* ($W_{össz}$) áll, ami a jobboldalon álló munkákra fordítódik. A jobboldal első tagja a külső ellenálláson (az ún. *fogyasztón*) ugyanennyi idő alatt hővé alakuló energia, amit *hasznos munkának* (W_h) neveznek (ezt lehet pl. világításra, fűtésre, motor hajtására használni). A jobboldal második tagja a telepben ugyanezen idő alatt hővé alakult energia, ami nem hasznosítható, ez tehát *elveszett energia* (W_{veszt}). Az energiamérleg ezekkel a jelölésekkel:

$$W_{össz} = W_h + W_{veszt}$$

Hasonló összefüggést kapunk a teljesítményekre is, ha a munkák összefüggését elosztjuk a Δt idővel:

$$\varepsilon I = I^2 R + I^2 R_b .$$

A fenti jelölésekkel a teljesítménymérleg:

$$P_{össz} = P_h + P_{veszt} .$$

Innen kiszámítható az energiahasznosítás hatásfoka:

$$\eta = \frac{P_h}{P_{össz}} = \frac{R}{R + R_b} .$$

Látható, hogy a hatásfok akkor lenne *1*, ha a telepnek nem lenne belső ellenállása. Mivel ez a gyakorlatban nem valósítható meg, a hatásfok mindig kisebb *1*-nél.

Egy telep működésének fontos jellemzője, hogy adott külső ellenállás esetén mennyi a belőle kivehető hasznos teljesítmény. Ezt a

$$P_h = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{\left(R + R_b\right)^2} R$$

összefüggésből számíthatjuk ki. Látható, hogy a hasznos teljesítmény nem csak a telep adataitól (ε, R_b) függ, hanem az alkalmazott külső ellenállástól is: $P_h = P_h(R)$. Mivel ez a függvény nagy- és kis R értékeknél egyaránt nullához tart, várható, hogy valamilyen R értéknél maximuma van. A maximumhely feltétele a differenciálhányados eltűnése:

$$\frac{dP_h}{dR} = \varepsilon^2 \frac{R_b - R}{\left(R + R_b\right)^3} = 0 .$$

Maximum tehát akkor van, ha $R = R_b$, vagyis a legnagyobb hasznos teljesítmény akkor vehető ki a telepből, ha a külső ellenállás egyenlő a telep belső ellenállásával. A hasznos teljesítmény növelése érdekében tehát a fogyasztót az ellenállás szempontjából *illeszteni* kell az áramforráshoz.

Megjegyzés:
Eddig mindig feltételeztük, hogy az áramköri elemeket összekötő vezetékek ellenállása nulla (pontosabban: elhanyagolható). Felmerül a kérdés, hogy valódi, ellenállással rendelkező vezetékek esetén hogyan jut el az energia a fogyasztóhoz, hiszen az elektromos erőtér munkája ilyenkor a vezetőben termikus energiává (hővé) alakul. A választ a vezető körül kialakuló elektromos erőtér vizsgálata adja meg. A véges (nem nulla) ellenállású vezetőben az elektromos térerősség nem merőleges a vezető felületére, hanem – ahogy korábban

megállapítottuk – van egy áramirányú, tangenciális- és egy felületre merőleges normális komponense. A hővé alakuló energiarész a tangenciális komponens által végzett munkából származik, a normális komponens a töltéseken nem végez munkát, és – mint később látni fogjuk – az energiaszállítás éppen ezzel a normális irányú erőtérrel hozható kapcsolatba.