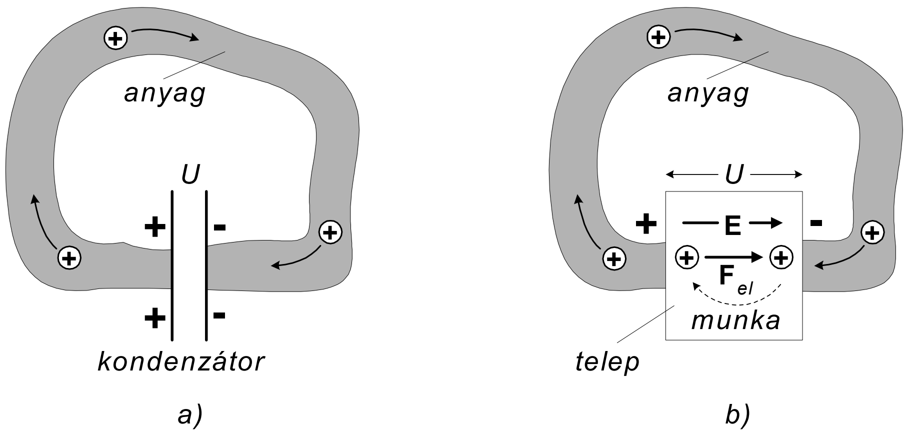
Elektromos áram

A tapasztalat szerint az elektromos töltések az anyagokban kisebb vagy nagyobb mértékben hosszú távú mozgásra képesek. A töltések egyirányú, hosszútávú mozgását *elektromos áramnak* nevezik. A különböző anyagokban különböző *töltéshordozó* részecskék mozoghatnak (elektronok, ionok), és a töltésmozgás különböző *mechanizmusokkal* valósulhat meg.

Ahhoz, hogy egy anyagban töltésáramlás induljon el, az anyag belsejében elektromos erőteret – pontjai között elektromos potenciálkülönbséget – kell létrehozni. Azt a jelenséget, hogy az anyagban elektromos erőtér hatására elektromos áram jön létre *elektromos vezetésnek* nevezik. Adott elektromos térerősség hatására a különböző anyagokban különböző erősségű töltésáramlás jön létre, vagyis az anyagok az elektromos vezetés szempontjából különböző *tulajdonságúak*.

Ahhoz, hogy a töltéshordozók állandóan egy irányban mozogjanak, vagyis az anyagban állandó elektromos áram jöjjön létre, benne állandó elektromos erőteret (potenciálkülönbséget) kell fenntartani, és biztosítani kell, hogy mindig legyenek mozgásképes töltéshordozók.

Elektromos teret (potenciálkülönbséget) egy anyagban létrehozhatunk pl. úgy, hogy két végét egy feltöltött kondenzátor két fegyverzetéhez kapcsoljuk (*a)* ábra). Ekkor az anyagban az *U* potenciálkülönbség hatására létrejön egy elektromos áram, de ez az áram előbb-utóbb



megszünteti a potenciálkülönbséget: ha pl. az anyagban a pozitív töltések tudnak mozogni, akkor a magasabb potenciálú (pozitív töltésű) oldalról a pozitív töltések átmennek az alacsonyabb potenciálú (negatív töltésű) oldalra, ahol semlegesítik a negatív töltéseket (a kondenzátor „kisül”), így az áram is megszűnik.

Az állandó áram fenntartásához a kondenzátor helyére tehát egy olyan eszközt kell elhelyezni, amely a negatív oldalra megérkező pozitív töltéseket visszaviszi a pozitív oldalra, ezzel fenntartja a potenciálkülönbséget, és egyúttal biztosítja, hogy a pozitív töltések újra körbemenjenek az anyagban. Ilyen eszközök léteznek, ezeket a továbbiakban *áramforrásnak* vagy *feszültségforrásnak* nevezzük. Az áramforrás működésének alapelve a *b)* ábrán látható, ahol ismét pozitív töltéshordozókat tételeztünk fel. Az áramforrás a töltésmozgást akadályozó (az ábrán $\mathbf{F}_{el}$ erőt kifejtő) elektromos erőtér ($\mathbf{E}$) ellenében *munkavégzés* útján a pozitív töltéseket a telep belsejében visszaviszi a telep pozitív oldalára, és így az áram állandóan fennmarad. Az áramforrások működéséhez szükséges munka többféle folyamat segítségével biztosítható, leggyakrabban speciális kémiai reakcióból származik. Az áramforrások működésével később foglalkozunk.

Az elektromos áram alaptörvényei

Most – anélkül, hogy az egyes vezetési mechanizmusokat, az egyes anyagok vezetési tulajdonságait megvizsgálnánk – az elektromos áram általános leírására alkalmas mennyiségekkel, az elektromos áramra vonatkozó általános törvényekkel foglalkozunk. Egyelőre azt tételezzük fel, hogy a töltéshordozó részecskék pozitív töltésűek, mert – történeti okok miatt – az áramra vonatkozó megállapodások is pozitív töltéshordozók esetére vonatkoznak.

Alapfogalmak, az elektromos áram jellemzése

Az áram közelítő jellemzésére használhatjuk a vezető keresztmetszetén egy irányban átfolyt töltés (ΔQ) és az átfolyási idő (Δt) hányadosát:

$$I \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Az így definiált I mennyiség a Δt időtartamra vonatkozó átlagos *elektromos áramerősség*.
Ha az áramerősséget egy adott időpillanatban akarjuk megadni, akkor az

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt},$$

mennyiséget használhatjuk, amit pillanatnyi elektromos áramerősségnek nevezünk[1]. Ha az áramerősség időben nem változik, akkor az elektromos áramot *időben állandó-*, idegen szóval *stacionárius áramnak* nevezik.
Az áramerősség a keresztmetszetre vonatkozó átlagos mennyiség (a keresztmetszet különböző részein különböző lehet a töltésáramlás üteme). A keresztmetszeten belüli lokális töltésáramlás jellemzésére vezették be az áramsűrűséget, amelynek nagyságát közelítőleg egy az áramlás irányára merőleges $\Delta A_\perp$ nagyságú elemi felületelemen átfolyó ΔI áram és a felület hányadosa adja meg (*a)* ábra):

$$j \approx \frac{\Delta I}{\Delta A_\perp}.$$

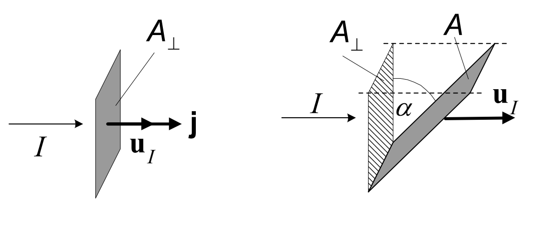
A felület egy pontjában az áramsűrűség pontos értékét a már ismert módon kapjuk:

$$j = \frac{dI}{dA_\perp} I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A_\perp} = \frac{dI}{dA_\perp}$$

(az áramsűrűség számértéke: egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladt töltés).
Ha az áramsűrűséggel egyúttal az áram irányát is jellemezni akarjuk, akkor olyan vektorként definiálhatjuk, amelynek iránya az áramlás irányával egyezik meg (*a*) ábra):

$$\mathbf{j} = j\mathbf{u}_I = \frac{dI}{dA_\perp}\mathbf{u}_I,$$

ahol $\mathbf{u}_I$ az áram irányába – vagyis a pozitív töltések mozgásirányába – mutató egységvektor.



a) b)

---

[1] A definícióban egy differenciálhányados szerepel, ami matematikailag a következőképpen értendő. A vezető adott helyén átmenő össztöltés az idő függvénye, azaz $Q = Q(t)$ (ha pl. a töltések mindig ugyanabban az irányban mozognak, akkor Q a t-nek monoton növekvő függvénye). Egy Δt idő alatt átment ΔQ töltést ennek a függvénynek a $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ megváltozása adja meg. Az áramerősség tehát $I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{dQ(t)}{dt}$, vagyis a $Q(t)$ függvény t szerinti differenciálhányadosa.

Az a tény, hogy annak idején az áram irányát a térerősséggel azonos irányban mozgó töltések – vagyis a pozitív töltések – mozgási irányaként definiálták, azzal a következménnyel jár, hogy ha a töltéshordozók negatív töltésűek (ez a helyzet pl. a fémekben), akkor az áram iránya ellentétes a töltéshordozók tényleges mozgási irányával.

Ha a felületelem nem merőleges az áramlás irányára (*b)* ábra), akkor $\Delta A_{\perp} = \Delta A \cos\alpha$ miatt

$$j \approx \frac{\Delta I}{\Delta A \cos\alpha} \qquad \text{illetve} \qquad j = \frac{dI}{dA \cos\alpha}.$$

Ugyanez vektori alakban

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dA\cos\alpha}\mathbf{u}_I .$$

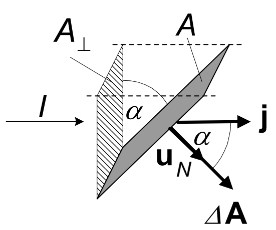
Ennek alapján egy ΔA felületelemen átfolyó ΔI áram kifejezhető az áramsűrűség nagyságával is

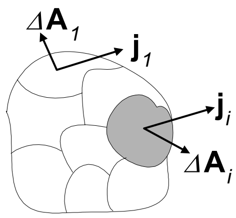
$$\Delta I = j\Delta A \cos\alpha .$$

Ezzel egy véges felületen átfolyó teljes áram is megadható, ha az egyes felületelemeken átfolyó ΔI áramokat összeadjuk:

$$I \approx \sum_i j_i \Delta A_i \cos\alpha_i$$

Ha bevezetjük a felületelemre merőleges $\Delta\mathbf{A} = \Delta A\mathbf{u}_N$ felületvektort (baloldali ábra), akkor látható, hogy az α szög éppen a felületvektor és az áramsűrűség-vektor által bezárt szög. Ezért az elemi felületen átfolyó áram e két vektor skaláris szorzataként is felírható:





$$\Delta I = \mathbf{j}\Delta\mathbf{A} .$$

Véges A felületen átfolyó teljes áram ennek alapján (jobboldali ábra):

$$I = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \mathbf{j}_i \Delta\mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{j}d\mathbf{A} .$$

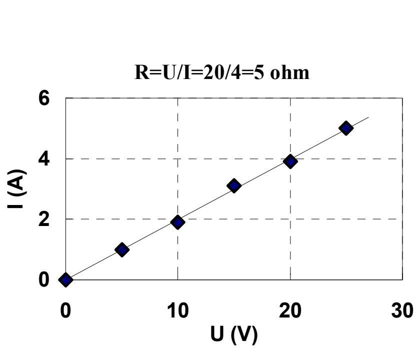
Ohm törvény, elektromos ellenállás, vezetőképesség

Az áramot okozó U potenciálkülönbség (feszültség) és az I áramerősség között a mérések szerint (ábra) lineáris összefüggés van:

$$I \sim U ,$$

szokásos alakjában

$$I = \frac{1}{R}U \qquad \text{illetve} \qquad U = IR .$$



Itt R adott vezető és adott körülmények között állandó, értéke az I–U grafikonból meghatározható. Az összefüggés Ohm-törvény néven ismert. Az R jellemző a vezető elektromos ellenállása, ami függ az anyagi minőségtől, a vezető geometriai adataitól és a körülményektől (pl. hőmérséklet). A definíció alapján az ellenállás egysége: *V/A*, amit *ohm*-nak neveznek.

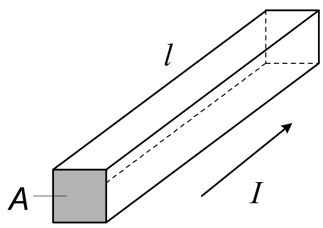
Az ellenállás elnevezés onnan származik, hogy értékének növelésekor – egyébként azonos körülmények között – a vezetőn folyó áram csökken, vagyis a vezetőnek az árammal szemben tanúsított „ellenállása” nő.

KÍSÉRLETEK:

- Ha egy izzólámpán és a hozzá kapcsolt rövid üvegrúdon át egy teleppel áramot hozunk létre, akkor az izzólámpa nem világít, mert az üveg nagy ellenállása miatt nem folyik át rajta elég nagy áram. Ha az üvegrudat felizzítjuk, a lámpa kigyullad, ami azt mutatja, hogy az áram megnőtt, vagyis az üveg ellenállása a hőmérséklet növelésekor csökken.
- Tiszta (desztillált) vízbe két – nem érintkező – fémlemezt teszünk. Ha egy izzólámpán és a fémlemezekkel a vízen át egy teleppel áramot hozunk létre, akkor az izzó nem világít. A vízbe sót szórva a lámpa kigyullad: a sós víz ellenállása sokkal kisebb, mint a tiszta vízé.
- Ha egy fémszálon és a hozzá kapcsolt izzólámpán át egy teleppel áramot hozunk létre, akkor az izzólámpa világít, mert a rajta átfolyó áram elég nagy a felizzításához. Ha a fémszálat felmelegítjük, a lámpa kialszik, ami azt mutatja, hogy az áram lecsökkent, vagyis a fémszál ellenállása a hőmérséklet növelésekor növekszik.

Egy vezető ellenállása a mérések szerint függ a vezető anyagától, a vezető geometriai adataitól (méret) és a fizikai körülményektől (pl. hőmérséklet). Egyenletes keresztmetszetű vezető ellenállása Ohm mérései szerint arányos a vezető hosszával (l) és fordítva arányos a vezető keresztmetszetével (A):

$$R \sim \frac{l}{A} .$$



Az arányossági tényezőt ρ-val jelölve, az ellenállás

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

(néha ezt a törvényt is Ohm-törvénynek nevezik).

A ρ arányossági tényező a vezető geometriai adataitól már nem függ, csak a vezető anyagától. Ezt az anyagjellemzőt a vezető *fajlagos ellenállásának* nevezik (egysége: $ohm \cdot m$).

KÍSÉRLET:

- vezető dróton állandó áramot átfolyatva a feszültség a drót mentén a mért drótszakasz hosszával arányos, mert $U \sim R$ és $R \sim l$.

Hasáb alakú vezető méreteit és ellenállását megmérve, fajlagos ellenállása kiszámítható:

$$\rho = \frac{RA}{l} .$$

Az Ohm-törvénynek egy másik alakját kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy egyenletes A keresztmetszetű, l hosszúságú vezető esetén a vezető végei közti feszültség a térerősséggel, az áram pedig az áramsűrűséggel az alábbi módon fejezhető ki:

$$U = El \qquad \textit{és} \qquad I = jA .$$

Emiatt az $U = IR$ Ohm-törvény alapján

$$j = \frac{l}{RA} E = \frac{1}{\rho} E .$$

Bevezetve a $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$ jelölést a

$$j = \gamma E$$

összefüggést kapjuk.
A fajlagos ellenállás reciprokaként definiált γ szintén csak a vezető anyagi minőségétől függ; ez a vezető *fajlagos vezetőképessége* (egysége $1/(ohm \cdot m)=ohm^{-1}m^{-1}$). Az elnevezés azzal kapcsolatos, hogy ha γ nagy, akkor az anyag jól vezet (ellenállása kicsi).
A fajlagos vezetőképességgel (rövidebben: a vezetőképességgel) az áramsűrűség és térerősség összefüggése vektori alakban

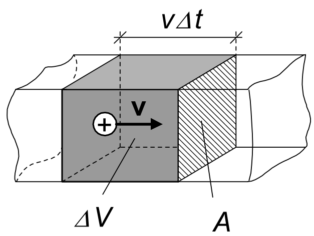
$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} ,$$

amit *differenciális Ohm-törvénynek* neveznek. Az Ohm-törvénynek ez az alakja – amit hasáb alakú vezetőnél vezettünk le – általánosan érvényes: egy vezető tetszőleges helyén megadja a térerősség és az áramsűrűség összefüggését (lokális törvény).

Az elektromos áram molekuláris modellje

Meglepő tapasztalati tény, hogy állandó feszültség (tehát állandó elektromos térerősség) állandó áramot hoz létre. Ez azt sugallja, hogy a töltések valamilyen okból állandó átlagos sebességgel mozognak. Vizsgáljuk meg most, hogy az áramerősségre milyen összefüggést kapunk, ha a töltéshordozók mozgásából kiindulva, molekuláris adatokkal próbáljuk kiszámítani.
A v sebességgel mozgó töltéshordozók közül egy A felületen Δt idő alatt azok haladnak át, amelyek benne vannak a

$$\Delta V = Av\Delta t$$



térfogatban (ábra). Ha a töltéshordozók töltése q, térfogati darabsűrűsége $n = \dfrac{\Delta N}{\Delta V}$ (n számértéke az egységnyi térfogatban lévő töltéshordozók számával egyenlő), akkor az áthaladt töltés

$$\Delta Q = q\Delta N = qn\Delta V = qnAv\Delta t .$$

Az áram ennek alapján

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv .$$

Eszerint az áramerősség csak akkor lehet állandó, ha a töltéshordozók sebessége állandó.
Az áramsűrűség nagysága a molekuláris adatokkal kifejezve

$$j = \frac{I}{A} = qnv .$$

Mivel pozitív töltéshordozók esetén az áram iránya a töltéshordozók sebességének irányával egyezik, az áramsűrűség-vektorra azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} .$$

(Itt az áramirány definíciója miatt a $\mathbf{v}$ sebességvektor iránya akkor is a pozitív töltések mozgásirányával egyezik, ha a töltéshordozók negatív töltésűek)
Ha ezt az összefüggést összehasonlítjuk a korábban kapott

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

differenciális Ohm-törvénnyel, akkor láthatjuk, hogy teljesülni kell a

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{E}$$

összefüggésnek, vagyis az Ohm törvény csak akkor teljesülhet, ha a töltések átlagsebessége a térerősséggel arányos.

A fenti tapasztalatok pontos magyarázata a klasszikus fizika törvényeivel nem adható meg, de a valóságot közelítő, szemléletes képet kaphatunk egy egyszerű *klasszikus modell* segítségével. A modell szerint a töltések mozgását valamilyen fékező erő akadályozza, ami hasonló a ”viszkózus közegben” mozgó testre ható közegellenálláshoz. Egy q töltésre az elektromos erőtér által kifejtett $\mathbf{F}_{el} = q\mathbf{E}$ erő mellett eszerint egy olyan fékező erő lép fel, amely a sebességével arányos, és azzal ellentétes irányú: $\mathbf{F}_{fék} = -k\mathbf{v}$. Ekkor a mozgásegyenlet

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{fék} = q\mathbf{E} - k\mathbf{v}.$$

A fékező erő növekvő sebességgel nő, így előbb-utóbb eléri az elektromos erőtér által kifejtett erő értékét. Ekkor az eredő erő – és így a gyorsulás is – nulla lesz, és a mozgásegyenletből a kialakult állandó végsebesség ($\mathbf{v}_\infty$) megkapható:

$$q\mathbf{E} - k\mathbf{v}_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_\infty = \frac{q}{k}\mathbf{E}.$$

Itt k állandó a töltéshordozók mozgási mechanizmusától függő jellemző, amely a fenti egyszerű modellből nem határozható meg.

****

A töltéshordozókra felírt mozgásegyenlet általában is megoldható, hiszen kicsit átrendezve a $\mathbf{v}$ sebességre egy differenciálegyenletet kapunk

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{k}{m}\mathbf{v} = \frac{q}{m}\mathbf{E},$$

amelynek megoldása $\mathbf{v}(0)=0$ kezdeti feltétellel (a töltések nyugalomból indulnak)

$$\mathbf{v} = \frac{q\mathbf{E}}{k}\left(1 - exp\left\{-\frac{k}{m}t\right\}\right).$$

A töltéshordozók sebessége az elektromos erőtér bekapcsolása után exponenciálisan nő. Az állandósult állapot beállásának sebességét az exponensben szereplő k/m hányados szabja meg. Jó vezetőkben a sebesség igen rövid idő (nagyságrendben 10^{-10} s) alatt – gyakorlatilag a feszültség bekapcsolása után azonnal – eléri az állandósult értékét. Az időfüggő megoldásból természetesen ugyanazt kapjuk, mint a korábbi megfontolásból: állandósult állapotban, vagyis a $t \to \infty$ esetben $\mathbf{v}_\infty = \frac{q}{k}\mathbf{E}$.

****

A „viszkózus” modell a valóságos viszonyokat nagyon leegyszerűsíti, de valóban azt a – tapasztalat által megerősített – eredményt adja, hogy a töltések végsebessége (ezt a továbbiakban $\mathbf{v}$-vel jelöljük) arányos a térerősséggel: $\mathbf{v} \sim \mathbf{E}$, és a mozgási sebesség állandó, ha a térerősség (és így a potenciálkülönbség is) állandó. Az arányossági tényező ebből a modellből nem kapható meg, ezt méréssel határozhatjuk meg. Ha a szokásoknak megfelelően ezt az állandót μ-vel jelöljük, akkor az összefüggést az általánosan használt

$$\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$$

alakba írhatjuk. A μ arányossági tényezőt a töltéshordozó *mozgékonyságának* nevezik (minél nagyobb a μ értéke, annál gyorsabban mozog a töltéshordozó adott térerősség hatására).

Az áramsűrűség ennek megfelelően a

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} = qn\mu\mathbf{E}$$

alakba írható. Ez az Ohm-törvény molekuláris adatokkal kifejezett alakja. Ezt összevetve a $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ összefüggéssel, azt kapjuk, hogy

$$\gamma = qn\mu,$$

vagyis az anyagok *vezetőképességét* a benne lévő töltéshordozók töltése, a töltéshordozók térfogati sűrűsége és a töltéshordozók mozgékonysága szabja meg.

Hőfejlődés árammal átjárt vezetőben, a Joule-törvény

A töltéshordozók az elektromos erőtér által folyamatosan végzett munka ellenére állandó átlagsebességgel mozognak, vagyis az erőtér által végzett munka a vezetőben mechanikai értelemben eltűnik, a vezető belső energiáját növeli ("hővé alakul").
Mivel egy ΔQ nagyságú töltésnek U potenciálkülönbségű helyek közötti átmeneténél az elektromos erőtér munkája

$$\Delta W = \Delta Q U\ ,$$

az átfolyt töltés pedig az áramerősséggel kifejezhető ($\Delta Q = I\Delta t$), a Δt idő alatt fejlődő hő

$$\Delta W = IU\Delta t\ .$$

Egy hosszabb t idő alatt fejlődő hőt a

$$W = IUt$$

összefüggés adja meg. Ez a *Joule-törvény*, a fejlődő hőt pedig *Joule-hőnek* nevezik.
A hővé alakult teljesítmény ennek megfelelően

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = IU\ .$$

A hővé alakult elektromos munka illetve teljesítmény a *molekuláris modellből* is kiszámítható, ha figyelembe vesszük, hogy egy töltéshordozó mozgása során az elektromos erőtér teljesítménye

$$P_1 = Fv = qEv\ .$$

Egy V térfogatú vezetőben egyidejűleg nV számú töltéshordozó mozog (n a töltéshordozók térfogati darabsűrűsége), így az összes teljesítmény:

$$P = nVP_1 = nqvEAl = jEAl = IU\ .$$

Itt felhasználtuk, hogy az l hosszúságú, A keresztmetszetű vezető térfogata $V = A \cdot l$.
A teljes munka (illetve a belső energia növekménye, szokásos kifejezéssel a keletkezett hő) t idő alatt:

$$W = Pt = IUt\ .$$

Ami azonos a korábban más úton kapott *Joule-törvénnyel*.
A teljesítmény kifejezhető lokális mennyiségekkel is:

$$P = nVP_1 = nqvEV = nq\mu E^2 V = \gamma E^2 V\ .$$

Az egységnyi térfogatban "elveszett" teljesítmény ennek alapján

$$p = \frac{P}{V} = \gamma E^2 = jE\ .$$