

Az elektrosztatika törvényei anyag jelenlétében, dielektrikumok

Az elektrosztatika alaptörvényeinek vizsgálata a kezdeti időkben levegőben történt, és a különféle töltéselrendezések elektromos erőterét azzal a feltételezéssel tárgyalták, hogy a levegő jelenléte arra semmilyen hatást nem gyakorol. Később kiderült, hogy ez a feltételezés közel jár az igazsághoz: a levegő módosító hatása valóban nagyon kicsi, ezért a megállapított törvények igen jó közelítéssel megegyeznek az üres térben (vákuumban) érvényes törvényekkel.

A valóságban azonban az elektromos töltések közötti teret különböző anyagok (gázok, folyadékok, szilárd anyagok) tölthetik ki, és nem zárható ki, hogy ezek jelenléte az elektromos erőhatásokat – és így az elektromos erőteret – módosítja. Ezt a feltételezést az a tény is megerősíti, hogy az anyagok töltött részecskékből épülnek fel, tehát várhatóan maguk is befolyásolhatják a bennük kialakuló elektromos erőteret.

Ebből a szempontból a vezetők (fémek) nem különösen érdekesek, hiszen azok belsejében sztatikus elektromos erőter nem lehet, ezért a továbbiakban csak szigetelőkkel foglalkozunk. A szigetelők jellegzetessége éppen az, hogy a töltések bennük kötődtek, hosszú távú mozgásuk erősen korlátozott, ezért bennük elektromos erőter jöhet létre.

Azt, hogy egy szigetelő valóban módosítja az elektromos erőteret, néhány egyszerű kísérlettel demonstrálhatjuk.

KÍSÉRLETEK:

- ◆ Síkkondenzátort elektrométerrel kapcsolunk össze, és feltöltjük: az elektrométer kitér. A feltöltött kondenzátorba szigetelő lapot csúsztatunk: az elektrométer kitérése csökken. Ha a lapot kihúzzuk, az elektrométer az eredeti kitérést mutatja.
- ◆ Cérnára egymás közelében fémgömböt és paraffin gömböt függesztünk fel. A fémgömböt feltöltve, az vonzza a paraffin gömböt. Ha a kísérletet úgy ismétljük meg, hogy a két gömböt ricinusolajba merítjük, akkor a gömbök taszítják egymást.
- ◆ Vízcsapból kifolyó gyenge vízszugárhoz megdörzsölt üvegrudat közelítünk: a vízszugár az üvegrúd felé eltérül (vonzás).
- ◆ Üvegpoharat egy nagyobb méretű fém pohárba tesszük, és belsejébe kisebb méretű fém poharat helyezünk el, tehát egy szigetelőt tartalmazó kondenzátort készítünk (Leydeni palack). A kondenzátort nagy feszültségre feltöltjük, majd szétszedjük, és a fém poharakat töltésmentesítjük. Ha a kondenzátort ismét összerakjuk, azon töltést találunk.

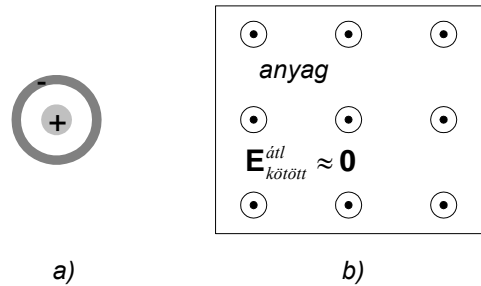
A jelenségekben egyértelmű a jelenlévő *szigetelő anyag*, más néven *dielektrikum* szerepe, ezért érdemes megvizsgálni, hogy mi történik egy szigetelőben ha elektromos erőterbe helyezjük.

A továbbiakban a különböző elektromos erőterek megkülönböztetése érdekében az erőteret létrehozó töltéseket két csoportba osztjuk. Tudjuk, hogy az anyagokban normális körülmények között azonos mennyiségű pozitív és negatív töltés van jelen. Azokat a töltéseket, amelyek az ellenkező előjelű párjaikkal együtt fordulnak elő (vagyis egy térfogatban a töltések algebrai összege nulla), *kötött töltéseknek* nevezzük. Vannak olyan módszerek (pl. dörzsölés), amelyekkel a kétféle töltést szét lehet választani, és így egy térrészben többségbe kerül az egyik előjelű töltés. Az ilyen, ellenkező előjelű töltéspárjaitól elválasztott ("megszabadított") töltést – a kialakult szokásnak megfelelően – *szabad*

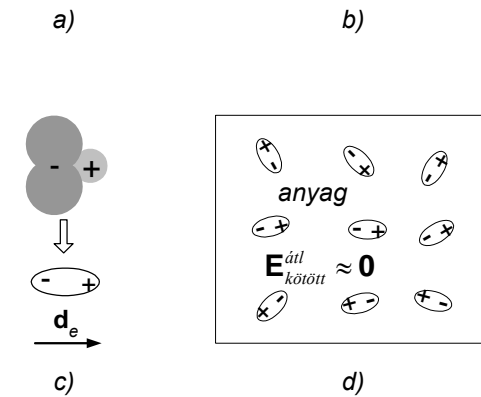
töltéseknek nevezzük (az elnevezés nem túl szerencsés, mert ezek a töltések gyakran nem mozgásképesek, tehát a szó szokásos értelmében nem biztos, hogy szabadok).

A szigetelők belsejében kialakuló elektromos tér várhatóan különbözni fog attól a tértől, amit szabad töltések (pl. egy feltöltött fémdarab) vákuumban hoztak volna létre, hiszen az anyagot alkotó kötött töltések tere módosítja azt. Ez annak ellenére így van, hogy az anyagok kifelé általában semlegesnek mutatkoznak, sőt rendszerint az anyagot alkotó kötött töltések elektromos terei is semlegesítik egymást. Az anyagokban jelenlévő kötött töltések ugyanis az alábbi két alapvető elrendezésben találhatók.

Az anyagot alkotó atomokban a kétféle töltés bizonyos esetekben gömbszimmetrikus képződményt hoz létre (a) ábra), amely csak a töltések közötti térben – vagyis az atom belsejében – hoz létre elektromos teret. Ilyenkor – külső tér nélkül – az atomok közötti térben az átlagos elektromos tér gyakorlatilag nulla (b) ábra).

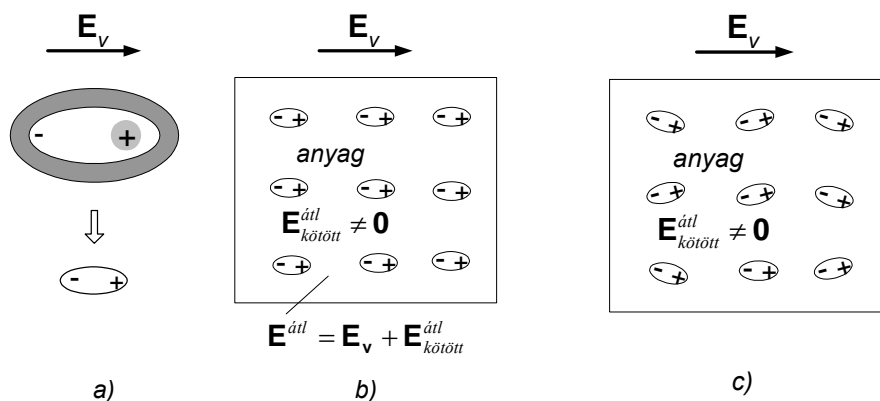


Egy másik töltéselrendeződés az, amelyben az atom vagy molekula ellenkező előjelű töltéseinek súlypontjai nem esnek egybe, vagyis a töltéselrendeződés egy dipólushoz hasonlít (c) ábra). A kötött töltések ilyen elrendezésének már "kifelé" is van elektromos tere. Az esetek többségében azonban az atomok vagy molekulák közötti térben rendszerint mégsem alakul ki hosszú távú elektromos tér, mert a molekuláris dipólusok irányukat tekintve rendszerint elhelyezkednek el, így egymás elektromos terét kioltják (d) ábra).



A helyzet azonban gyökeresen megváltozik, ha a szigetelőt elektromos erőterbe helyezünk. Az eredetileg gömbszimmetrikus atomokban az elektromos erőter hatására a töltések elmozdulnak, és a térerősség irányával párhuzamos dipólus jön létre (a) ábra), aminek már az atomon kívül is van elektromos tere. Így az anyag a külső elektromos erőter hatására a térerősséggel párhuzamos dipólusokat tartalmazó állapotba (b) ábra) megy át.

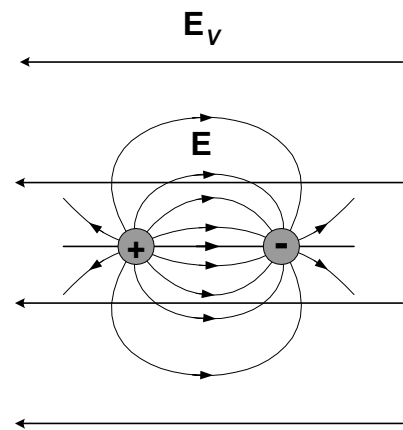
Külső erőter hatására ehhez hasonló végállapot jöhet létre az eredetileg rendezetlen



dipólusokat tartalmazó anyagban is. Ha a dipólusok forgásképesek (és valamilyen mértékben mindig azok), akkor az erőter hatására rendeződnek, azaz kisebb-nagyobb mértékben a térerősség irányával párhuzamos helyzet felé elfordulnak (c) ábra), aminek következtében egymás terét már nem oltják ki.

Ez a jelenség a szigetelő *polarizációja*.

A végeredmény mindkét esetben ugyanaz: a külső erőter hatására a kötött töltések a molekulák közötti térben egy hosszú távú elektromos erőteret hoznak létre, amely a külső erőterhez hozzáadódik. Mivel a térerősség irányába beállt dipólusok erőtere a két töltés közötti, legerősebb erőter tartományában a külső erőter irányával lényegében ellentétes (ábra), az anyagban létrejövő elektromos erőter kisebb lesz, mint amilyen az anyag jelenléte nélkül lenne.



A polarizáció hatását tehát az alábbi módon foglalhatjuk össze:

- ◆ Ha az anyagban eredetileg gömbszimmetrikus, kifelé elektromos erőteret nem mutató atomok vannak, akkor az erőter hatására az ellenkező előjelű töltések szétválnak, így a külső erőter irányában rendezett dipólusok jönnek létre, amelyeknek eredő elektromos erőtere van.
- ◆ Ha vannak az anyagban dipólus-molekulák (pl. víz), akkor külső elektromos erőter nélkül azok átlagos erőtere a rendezetlen beállítás miatt nulla, a külső elektromos erőter azonban rendezi őket, és így lesz eredő elektromos erőterük.

Elektromos erőter szigetelőben

A polarizált szigetelőben várhatóan más lesz az elektromos erőter, mint a külső erőter, hiszen a dipólusok erőtere módosítja azt.

Módosulnak-e az alaptörvények?

Az elektrosztatika I. alaptörvénye szigetelőekben

A szigetelőekben kötött töltésként megjelenő töltések ugyanazok, amelyek szabad töltésként megjelennek (elektronok vagy az atommagok kompenzálatlan protonjai).

Az általuk kötött töltésként létrehozott elektromos erőter feltehetőleg ugyanolyan jellegű, mint az az erőter, amit szabad töltésként hoznak létre. Tehát ez is *konzervatív* erőter, és az I. törvény változatlan:

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0.$$

A tapasztalat ezt a feltevést igazolja.

Az elektrosztatika II. alaptörvénye szigetelőekben

A kötött töltések erőterét és fluxus-járuelékát a II. alaptörvényben figyelembe kell venni.

Ez formálisan a kötött- vagy más néven *polarizációs töltések* beírását jelenti:

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\epsilon_0} + \frac{Q_p}{\epsilon_0}.$$

De mennyi a kötött töltés egy zárt felületen belül?

Ha a zárt felület az egész szigetelőt tartalmazza, akkor $Q_p = 0$, hiszen az anyag semleges.

Ha azonban a zárt felület elmetszi a szigetelőt, akkor dipólusokat vághat el, azoknak egyik fele a zárt felületen belültre-, másik fele kívültre kerül. Így lehet $Q_p \neq 0$ a zárt felületen belül.

Számoljuk ki a kötött töltéseket!

Ehhez előbb érdemes a polarizációt makroszkopikusan jellemezni.

Atomi szinten az atomok és molekulák \mathbf{d}_e elektromos dipólmomentuma jellemzi a polarizációt. Az egész test polarizációját a dipólmomentumok összegével jellemezhetjük: $\mathbf{d}_e^{teljes} = \sum_i \mathbf{d}_{ei}$, ahol \mathbf{d}_{ei} az i -edik dipólus dipólmomentuma.

Jobb egy lokális jellemző, a dipólmomentum térfogati sűrűsége:

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{d}_e^{teljes}}{\Delta V} = \frac{\Delta \left(\sum_i \mathbf{d}_{ei} \right)}{\Delta V}.$$

Ez a *polarizáció vektor*.

Nézzük meg, hogy a fluxus számolásához felvett zárt felület egy kis része mentén mennyi lesz a felület belsejébe kerülő töltés. A dipólusokat azonosaknak tételezzük fel $\mathbf{d}_{ei} = ql$ dipólmomentummal.

A dA felület (ábra) azokat a dipólusokat vágja el (ezek negatív töltése a felületen belülről kerül), amelyek benne vannak az ábrán szaggatott vonallal jelzett dV térfogatban:

$$dV = l dA |\cos \alpha|.$$

Ha a dipólusok térfogati darabsűrűsége $n = \frac{dN}{dV}$ (darab/térfogat), akkor az elmetezett dipólusok száma

$$dN = n dV = n l dA |\cos \alpha|,$$

a felületen belül került polarizációs töltés pedig (ez esetben negatív):

$$dQ_p = -\frac{dN}{dV} q l dA \cos \alpha,$$

ahol q egy dipólus töltése, dN az összes dipólusok száma a dV térfogatban. A kifejezés előjelhelyesen adja a töltést.

Mivel α a dipólmomentum vektor és a felületvektor közötti szög, a töltés vektorokkal is kifejezhető:

$$dQ_p = -\frac{dN}{dV} \mathbf{d}_e \mathbf{dA} = -\mathbf{P} dA.$$

A zárt felületben lévő összes polarizációs töltés:

$$Q_p = -\oint_A \mathbf{P} d\mathbf{A}.$$

Jelentése: a polarizáció vektor forrásai a polarizációs töltések (csak akkor nem nulla a forrásérség, ha a felület eredő polarizációs töltést vesz körül), a \mathbf{P} vektortér vonalai polarizációs töltéseken kezdődnek és végződnek.

A polarizációs töltéssel a Gauss-törvény

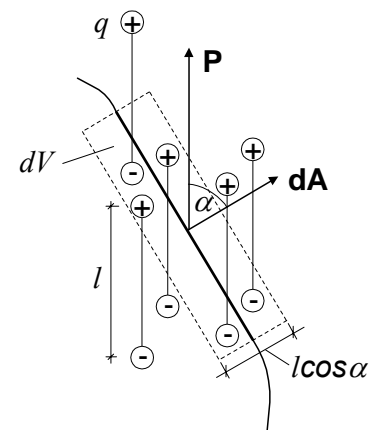
$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \mathbf{P} d\mathbf{A}.$$

Átrendezve a

$$\oint_A \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\epsilon_0}$$

vagy a

$$\oint_A (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{A} = Q_{sz}$$



alakot kapjuk.

Utóbbi jelentése: az $\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ vektormennyiség forrásai a szabad töltések, ennek a vektortérnek a vonalai szabad töltéseken kezdődnek és végződnek. Ezért ezt a vektort külön térjellemezőként vezették be:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Az új térjellemező neve: az *elektromos eltolás* (vagy *dielektromos eltolás*) vektora. Kiszámításához a térerősséget és a polarizációt kell ismerni.

Ezzel az elektrosztatika II. alaptörvényének (Gauss-törvény) általános alakja:

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q_{sz}.$$

Vákuumban $\mathbf{P} = 0$, ezért $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, és a törvény a korábbi alakba megy át:

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q_{sz}}{\varepsilon_0}.$$

Elektromos erőtér homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokban

Általános összefüggés:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Különböző anyagok esetén különböző a \mathbf{P} .

A homogén, izotróp anyagokban kis térerősségeknél legtöbbször érvényes, hogy $\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$, ezek az anyagok a *lineáris dielektrikumok*. Az arányosságot a $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ alakban szokás felírni, ahol χ a *dielektromos szuszceptibilitás*, amely az anyagi minőségtől függ. A tapasztalat szerint minden anyagra fennáll a $\chi > 0$ összefüggés, vákuumban $\chi = 0$ (nincs polarizáció).

Levegőben és a legtöbb gázban χ alig különbözik nullától ($\chi^{\text{levegő}} = 0.00059$).

Ilyenkor

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Itt $\varepsilon_r = 1 + \chi$ az anyag *relatív permittivitása* vagy *dielektromos állandója*, az $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ mennyiség az anyag *abszolút permittivitása*.

A $\chi > 0$ összefüggés miatt minden anyagban $\varepsilon_r > 1$, vákuumban $\varepsilon_r = 1$. Gázokban $\varepsilon_r \approx 1$ (levegőben $\varepsilon_r = 1.00059$). Ezért fogadhatjuk el jó közelítéssel a levegőben végzett kísérletek eredményeit vákuumbeli eredményeknek.

Térerősség, erőhatás, potenciál, kapacitás

Homogén, izotróp, lineáris dielektrikumokban az elektrosztatika II. alaptörvénye egyszerűbb alakba írható:

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \oint_A \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} d\mathbf{A} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = Q.$$

Itt és a továbbiakban a *szabad töltések* jelölésére az *index nélküli Q-t* használjuk.

Ebből

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Emiatt *azonos szabad töltéeloszlás* esetén (pl. homogén erőterben) minden vákuumban érvényes összefüggésben, ahol szerepel az ε_0 , az anyagban érvényes alakot az $\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r$ cserével kapjuk meg. Így írható át pl. a Coulomb-törvény is:

$$F_{12} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2},$$

vagyis az elektrosztatikus erők lecsökkennek, ha a teret anyag tölti ki.

A fenti összefüggésből következik az is, hogy *azonos szabad töltéeloszlás* esetén adott helyen vákuumban (E_v) és anyag jelenlétében (E) mért elektromos térerősségek között az

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_v}{\varepsilon_r}$$

összefüggés áll fenn (homogén, izotróp, lineáris dielektrikumban).

Ugyanez érvényes a potenciálokra is:

$$U = -\int_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_L \frac{\mathbf{E}_v}{\varepsilon_r} d\mathbf{r} = \frac{U_v}{\varepsilon_r}.$$

Ezzel értelmezhető az a *kísérleti eredményünk*, hogy a feltöltött üres kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség lecsökken, ha szigetelőt csúsztatunk a lemezek közé (közben a lemezeken lévő szabad töltések nem változtak!), hiszen levegőben $\varepsilon_r \approx 1$, a szigetelő lapban pedig $\varepsilon_r > 2$.

A jelenség úgy is felfogható, hogy a szigetelő megnöveli a kondenzátor kapacitását:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q \varepsilon_r}{U_v} = \varepsilon_r C_v.$$

A nagy permittivitású anyagok kapacitásnövelésre használhatók.

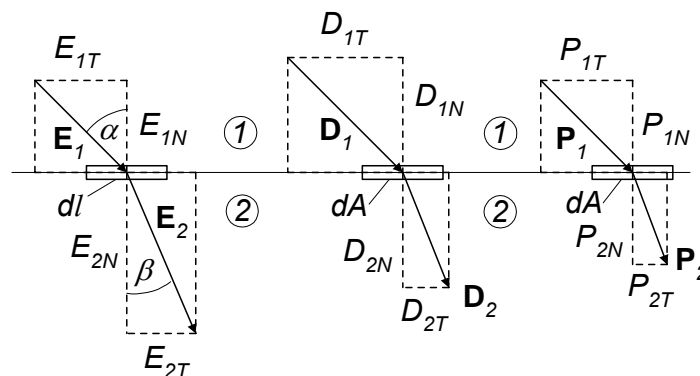
Az erőteret jellemző vektorok két homogén izotróp dielektrikum határán

Két homogén izotróp, lineáris dielektrikum határán az erőteret jellemző mennyiségek vektorai általában törést szenvednek (ábra alább).

A térerősségviszonyok számítása: a felületre simuló zárt görbe (téglalap) mentén

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = E_{1T} dl - E_{2T} dl = 0,$$

azaz



$$E_{1T} = E_{2T},$$

a térerősség érintőleges komponense nem változik az átmenetnél (a felületre merőleges vonaldarabok hosszával nullához tartunk, ezért nem szerepelnek a vonalintegrálban).

Az elektromos eltolás változásáról a határfelületre simuló zárt felületre számított fluxus ad felvilágosítást:

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = -D_{1N} dA + D_{2N} dA = Q.$$

Ha a határfelületen vannak szabad töltések, akkor az eltolási vektor normális komponensének változása azok felületi sűrűségével egyenlő:

$$D_{2N} - D_{1N} = \frac{Q}{dA} = \sigma$$

(új \mathbf{D} vonalak csak szabad töltésekből léphetnek ki, \mathbf{D} vonalak csak szabad töltéseken szűnhetnek meg).

Ha nincsenek ott szabad töltések, akkor

$$D_{2N} = D_{1N},$$

ilyenkor az eltolási vektor normális komponense változatlan az átmenetnél.

Hasonló módon kapjuk a polarizáció vektorra a

$$\oint_A \mathbf{P} d\mathbf{A} = -Q_p$$

egyenletből, hogy normális komponensének változása a polarizációs töltések felületi sűrűségének negatívjával egyenlő

$$P_{2N} - P_{1N} = -\frac{Q_p}{dA} = -\sigma_p$$

(új \mathbf{P} vonalak polarizációs töltésekből lépnek ki, \mathbf{P} vonalak polarizációs töltéseken szűnnek meg).

Ha nincsenek a határfelületen polarizációs töltések, akkor

$$P_{2N} = P_{1N},$$

a polarizáció normális komponense változatlan.

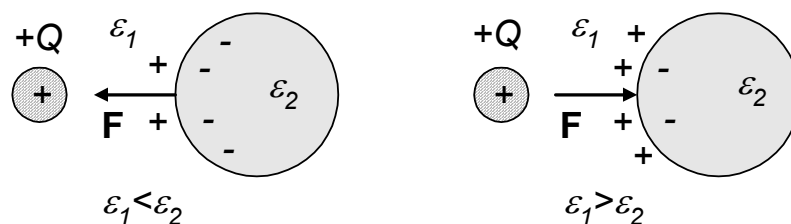
Ha a határfelületen nincsenek töltések, akkor \mathbf{E} , \mathbf{D} és \mathbf{P} egymással párhuzamosak maradnak (a fenti ábra ezt az esetet mutatja).

A térerősség-vektor törésének törvényét a fenti ábra és a fenti egyenletek alapján kaphatjuk meg.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{E_{1T}}{E_{1N}} & \operatorname{tg} \beta &= \frac{E_{2T}}{E_{2N}} \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} &= \frac{E_{1T} E_{2N}}{E_{2T} E_{1N}} = \frac{E_{2N}}{E_{1N}} = \frac{D_{2N} \varepsilon_1}{\varepsilon_2 D_{1N}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

A határfelületi viselkedés magyarázza azt a kísérleti eredményünket, hogy töltött fémgömb és (szigetelő) paraffin gömb közötti erőhatás levegőben és ricinusolajba éppen ellenkező irányú (ábra).

A kísérlet adatai: $\varepsilon_r^{\text{levegő}} \approx 1$, $\varepsilon_r^{\text{paraffin}} \approx 2$, $\varepsilon_r^{\text{r.olaj}} \approx 4.6$, vagyis $\varepsilon_r^{\text{levegő}} < \varepsilon_r^{\text{paraffin}} < \varepsilon_r^{\text{r.olaj}}$, és ugyanez igaz a szuszceptibilitásokra ($\chi = \varepsilon_r - 1 > 0$) is: $\chi^{\text{levegő}} < \chi^{\text{paraffin}} < \chi^{\text{r.olaj}}$.



Ha a fémgolyó töltése pozitív, akkor a levegő és a paraffin golyó határfelületén az eredő polarizációs töltés negatív ($P_N^{\text{paraffin}} - P_N^{\text{levegő}} = -\sigma_p > 0 \Rightarrow \sigma_p < 0$): a pozitív fémgömb és a paraffin golyó között vonzást észlelünk.

A ricinusolaj és a paraffin golyó határfelületén az eredő polarizációs töltés viszont pozitív ($P_N^{\text{paraffin}} - P_N^{\text{olaj}} = -\sigma_p < 0 \Rightarrow \sigma_p > 0$): a pozitív fémgömb és a paraffingolyó között taszítást észlelünk.

Ugyanilyen megfontolással magyarázható az *kísérletünk* is, hogy a pozitív töltésű üvegrúd a vízszárra vonzó erőt fejt ki ($\epsilon_r^{\text{levegő}} < \epsilon_r^{\text{víz}}$)

A polarizáció sikkondenzátor-modellje

Polarizáció egyszerű modellje: egy sikkondenzátorban a dielektrikum felületén polarizációs töltések jelennek meg, és az erőteret létrehozó effektív töltés a szabad- és polarizációs töltések különbsége.

Igazolható-e ez a modell az általános törvények segítségével?

A dielektrikummal kitöltött sikkondenzátorban (ábra alább) alkalmazzuk a II. alaptörvényt a szaggatott vonallal berajzolt zárt felületre:

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \oint_A (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{A} = -\epsilon_0 E_v A + \epsilon_0 EA + PA = Q_{sz} = 0$$

(a felület nem zár körül szabad töltést!). Ebből

$$E = E_v - \frac{P}{\epsilon_0}.$$

Mivel $E_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ és $P = P_N = -\sigma_p$,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0},$$

illetve

$$E = \frac{|\sigma| - |\sigma_p|}{\epsilon_0},$$

ami az említett modell helyességét igazolja.

Ugyanebben az elrendezésben mennyi a \mathbf{D} nagysága a vákuum- részben és az anyagban?

A két helyen érvényes:

$$\mathbf{D}_v = \epsilon_0 \mathbf{E}_v$$

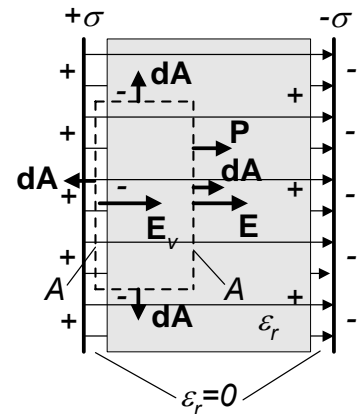
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

A nagyságokra:

$$D_v = \epsilon_0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \sigma$$

$$D = \epsilon_0 \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0} - \sigma_p = \sigma,$$

vagyis $D_v = D$. Ez megfelel annak, hogy a \mathbf{D} -t a szabad töltések felületi sűrűsége határozza meg (ez mindkét esetben σ).



Az elektromos eltolás mérési utasítása

A \mathbf{D} mérésére azt használhatjuk ki, hogy két anyag határfelületén a szabad töltések felületi sűrűsége a D_N változásával egyenlő.

Két egymásra fektetett vezető lapot az erővonalakra merőlegesen elhelyezve (a ábra) a pozitív töltésű felületen kialakuló szabad töltés (megosztás!) éppen a \mathbf{D} nagyságát adja:

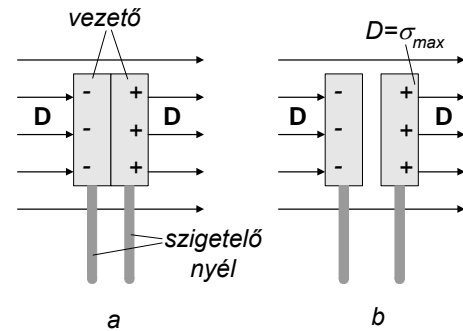
$$D_{2N} - D_{1N} = D - 0 = D = \sigma.$$

Mérés:

- ◆ A fémlapokat úgy helyezzük el, hogy az adott helyen a legnagyobb töltés jöjjön létre (ekkor merőleges a lap az erőtérré).
- ◆ A két lapot szétválasztva (b ábra) a lapokon megmarad a megosztott töltés és megmérhető, a \mathbf{D} nagysága: $D = \sigma_{max}$.
- ◆ A \mathbf{D} iránya: merőleges a fémlap felületére, és a negatív oldaltól a pozitív felé mutat.

Az elektromos eltolás elnevezés innen ered: a \mathbf{D} az erőtér töltésszétválasztó, "töltéseltoló" hatására jellemző.

Határfelületen a térerősségvektor tangenciális-, az eltolásvektor normális komponense megy át változatlanul, ezért egy dielektrikumban a térerősséget elvileg egy a térerősség irányában elnyújtott cső alakú kivágásban, az eltolást pedig a térerősségre merőleges lapos korong alakú kivágásban lehet megmérni.

**Bonyolultabb dielektrikumok**

A \mathbf{P} és \mathbf{E} közötti kapcsolat inhomogén, anizotróp dielektrikumban általában bonyolult: $\mathbf{P} = f(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_s$. A polarizáció általában nem párhuzamos a térerősséggel, és külső erőtér nélkül is lehet polarizáció.

Anizotróp, lineáris anyagok

Kis térerősségek esetén az anyagok többségében az \mathbf{E} és \mathbf{P} között lineáris kapcsolat van, de nem egyszerű arányosság:

$$P_x = \epsilon_0 \chi_{xx} E_x + \epsilon_0 \chi_{xy} E_y + \epsilon_0 \chi_{xz} E_z$$

$$P_y = \epsilon_0 \chi_{yx} E_x + \epsilon_0 \chi_{yy} E_y + \epsilon_0 \chi_{yz} E_z$$

$$P_z = \epsilon_0 \chi_{zx} E_x + \epsilon_0 \chi_{zy} E_y + \epsilon_0 \chi_{zz} E_z.$$

A kapcsolat hasonló a merev test szögsebessége és perdülete közötti összefüggéshez (a két vektor általában ott sem párhuzamos).

A $\chi_{xx}, \chi_{xy}, \dots, \chi_{zy}, \chi_{zz}$ mennyiségek alkotják a *szuszeptibilitás-tenzort*.

Maradandó polarizáció

Vannak olyan anyagok, amelyekben a külső erőtérrrel létrehozott polarizáció hosszú ideig megmarad.

Ilyen polarizáció jöhet létre például akkor, ha nagy térerősség hatására, magasabb hőmérsékleten hosszútávú töltésmozgás eredményeként az anyagban ellenkező töltésű tartományok jönnek létre (a szigetelők is vezetnek csak sokkal kevésbé, mint a vezetők). Az ilyen módon "polarizált" anyagban normális körülmények között a

töltések nem tudnak visszatérni eredeti helyükre (kis vezetőképesség), a polarizáció hosszú ideig fennmarad. Példa: elektrétek, amelyek évtizedekig polarizáltak maradnak. Ezt illusztrálja a *Leydeni palackkal folytatott kísérletünk* is: a nagy térerősséggel (kb. 10000 V/cm) polarizált dielektrikumban a polarizáció az erőtér megszűnése után is megmarad (ettől lesz töltés az ismételten összerakott kondenzátorban).

Spontán polarizáció

Különleges anyagokban külső hatás nélkül is létrejön polarizáció, mert a dipólusok rendeződése energetikailag kedvezőbb állapotot jelent. A magától kialakult eredő polarizáció a *spontán polarizáció*, az ilyen anyagok a *piroelektromos* anyagok. Ezek egy részében a polarizáció iránya külső erőtérrel megváltoztatható, ezek a *ferroelektromos anyagok*.

Piroelektromos effektus

A spontán polarizáció (piroelektromos anyagok!) függ a hőmérséklettől: hőmérsékletváltozásra polarizáció változás, és felületi töltések megjelenése következik be. Az anyagból készült lapkára elektródokat szerelve, az ehhez kapcsolt áramkörben hőmérsékletváltozáskor áram jön létre. Ez a *piroelektromos effektus*. Sugárzásérzékelésre használható (piroelektromos detektor, mozgásérzékelő, betörésjelző).

Piezoelektromos effektus

Egyes anyagokban (pl. kvarc) mechanikai feszültség is okozhat polarizáció-változást, ez a *piezoelektromos effektus*. Az ilyen anyagok a *piezoelektromos anyagok*. A polarizáció-változást itt is elektromos jellé lehet alakítani, ilyen módon deformációt, erőt lehet mérni. A piezo-gyújtóban a hirtelen összenyomásra keletkező feszültség elektromos szikrát hoz létre.

A jelenség megfordítható: elektromos erőtérbe helyezve, az ilyen anyag deformálódik, ez az *inverz piezoelektromos effektus*. Elektromos erőtérrel kis elmozdulások hozhatók létre, anyagok berezegtethetők (ezen alapul a kvarcórák szabályzását végző piezoelektromos lapka berezgetése).

Az elektromos erőtér energiája

Töltésfelhalmozáshoz munkát kell végezni (az anyagban azonos számban előforduló, egymás hatását többnyire kompenzáló ellenkező előjelű töltéseket szét kell választani, azonos töltések felhalmozásakor pedig taszító erő lép fel). Ez a munka elektrosztatikus helyzeti energiát eredményez.

Láttuk például, hogy töltésrendszer helyzeti energiája:

$$E_h = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i,$$

(U_i a potenciál az i -edik ponttöltés helyén).

Töltött vezető energiája (Q töltés, mindenütt azonos U potenciál):

$$E_h = \frac{1}{2} U Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Ezek a töltéstől és a potenciáltól függenek.

Az elektrosztatikus helyzeti energia kiszámítása általános formában nem könnyű, de az energia általános kifejezését egyszerű speciális esetre elvégzett számolás általánosításával is megkaphatjuk.

A speciális eset: síkkondenzátorban felhalmozott energia.

Számítsuk ki egy Q töltést tartalmazó síkkondenzátor energiáját, úgy hogy a feltöltés során végzett munkát meghatározzuk. Válasszuk ki azt a pillanatot, amikor a C kapacitású kondenzátor lemezein van már $+Q'$, illetve $-Q'$ töltés, és a negatív lemeztől újabb $+dQ'$ töltésadagot viszünk át a pozitív lemezre (eközben a negatív lemez töltése is megnő az ottmaradt kompenzálatlan $-dQ'$ töltéssel).

A feltöltés egy lépésében, dQ' töltés átvitelénél (ábra) az energiaváltozás:

$$dE_h = -\int_1^2 dQ' \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = -dQ'(-E'd) = dQ' \frac{\sigma'}{\varepsilon} d = \frac{Q'}{\varepsilon A} dQ' d$$

A teljes Q töltés felvitelénél:

$$E_h = \frac{d}{\varepsilon A} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2} \frac{d}{\varepsilon A} Q^2 = \frac{1}{2C} Q^2.$$

Hozzuk vissza a kifejezésbe a térerősséget ($E = \frac{Q}{\varepsilon A}$):

$$E_h = \frac{1}{2} \varepsilon A d E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon V E^2,$$

ahol V az a térfogat, ahol elektromos erőtér van.

Az elektrosztatikus *energia térfogati sűrűsége*:

$$w_e = \frac{E_h}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2,$$

ami csak a térerősségtől és a közeg anyagi minőségétől függ: az *energia az erőtérhez rendelhető*.

Homogén, izotróp, lineáris dielektrikumban:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}.$$

Kimutatható, hogy ez az energia-kifejezés teljesen általánosan érvényes: ahol elektromos erőtér van, ott a fenti energiasűrűség is megjelenik, függetlenül attól, hogy az erőtér hogyan keletkezett, ezért a

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}$$

kifejezést az *elektromos erőtér energiasűrűségének* nevezzük.

