

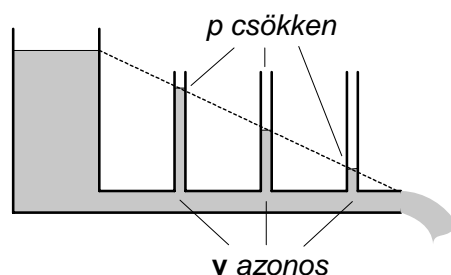
Súrlódásos áramlások

A valóságos folyadékokban és gázokban mindig van belső súrlódás, ami az áramlásokban fontos szerepet játszhat. Ez nem csak abban nyilvánul meg, hogy a belső súrlódás elhanyagolása jelentős hibákhoz vezethet, hanem abban is, hogy vannak olyan jelenségek, amelyek a belső súrlódás figyelembe vétele nélkül nem is érthetők meg. Most néhány belső súrlódással kapcsolatos áramlási jelenséget vizsgálunk meg.

Súrlódásos áramlás és Bernoulli-egyenlet

A belső súrlódás egyik következménye az, hogy a mechanikai energia egy része elvész, ezért a mechanikai energia megmaradását kifejező Bernoulli-egyenlet súrlódásos áramlásokban nem érvényes.

Ez szemléletesen bemutatható, ha egy nagyméretű edényből egyenletes keresztmetszetű, vízszintes csőn kiáramló folyadékban megmérjük a nyomást a cső különböző helyein (ábra). A nyomás mérésére itt a cső különböző helyeibe beépített függőleges csöveket használunk. Az áramló folyadék adott helyén uralkodó nyomás olyan magas folyadékoszlopot emel fel, amelynek hidrosztatikai nyomása egyenlő a folyadék nyomásával. Mivel a hidrosztatikai nyomás arányos a folyadékoszlop magasságával ($p = \rho gh$), a függőleges csövekben mérhető magasságok jól mutatják a nyomáseloszlást az áramló folyadékban.



Mivel a tömegmegmaradás miatt a csőben mindenütt azonos a sebesség, a Bernoulli-egyenlet szerint a nyomásnak is mindenütt azonosnak kellene lenni (a cső vízszintes). A valóságban azonban a nyomás a csőben az edénytől távolodva fokozatosan csökken, vagyis a *Bernoulli-egyenlet nem érvényes*.

Mivel a problémát az elvesztett mechanikai energia okozza, a Bernoulli-egyenlet súrlódásos áramlásban csak akkor használható, ha az energiavesztés elhanyagolható a teljes mechanikai energiához képest. A gyakorlatban a törvényt súrlódásos áramlásoknál úgy alkalmazzák, hogy megbecsülik a veszteségeket, és ezek hatását az egyenletben egy kiegészítő taggal veszik figyelembe.

Kimutatható, hogy ez a feltétel csőben áramló közeg esetén akkor teljesül, ha $\frac{\rho R \bar{v}}{\eta} \gg 1$, ahol ρ a közeg

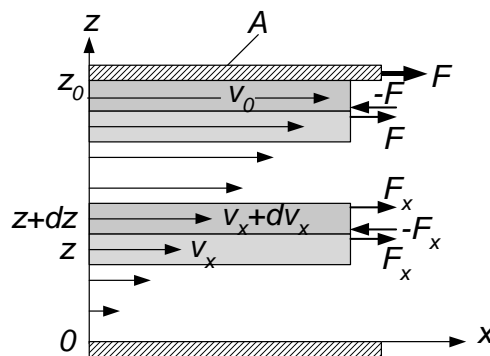
sűrűsége, R a cső sugara, \bar{v} az áramlás átlagos sebessége, η pedig a belső súrlódás nagyságát jellemző mennyiség, a közeg viszkozitása (lásd alább). Látható, hogy a viszkozitás mellett fontos szerepet játszik a cső sugara és az áramlási sebesség is. Ezt az összefüggést azonban óvatosan kell alkalmazni, ha ugyanis a baloldalon álló mennyiség túl nagy, akkor az áramlás turbulenssé válik, és a Bernoulli-egyenlet végképp érvényét veszti.

A Newton-féle súrlódási törvény

A belső súrlódás közvetlen következménye az, hogy a közeg különböző sebességgel mozgó részei között nyíróerők lépnek fel, a gyorsabban haladó rész igyekszik magával vinni a lassabban mozgót, a lassúbb pedig fűkezi a gyorsabban mozgót.

Ezt a jelenséget figyelhetjük meg akkor, ha pl. glicerinnél vagy sűrű mézből kiemelünk egy fémlapot. A fémlapra rátapad a folyadék, és magával visz egy felfelé vékonyodó folyadékréteget, ugyanakkor a lapon visszahúzó erőt érzünk. A szilárd felület nem mozog a folyadékhoz képest, súrlódás csak a folyadék részei között lép fel, ezért nevezik belső súrlódásnak.

A belső súrlódás egyszerűen tanulmányozható az ábrán látható elrendezés segítségével. Itt két egymáshoz közel elhelyezett, A felületű, párhuzamos síklapot látunk oldalnézetben. A lapok között vékony folyadékréteg van. Az alsó lapot az xy síkban rögzítjük, a tőle z_0 távolságban lévő felső lapot pedig x -irányban egyenletes v_0 sebességgel mozgatjuk. Ehhez erőt (F) kell kifejtenünk, ami a folyadékban fellépő belső súrlódási erő legyőzéséhez szükséges. Nem túl nagy sebességnél a kialakult áramlás lamináris. A kísérletet különböző sebességekkel, lemeztávolságokkal és felületekkel elvégezve, azt találjuk, hogy



$$F = \eta \frac{v_0}{z_0} A,$$

ahol η az anyagi minőségtől függő, a belső súrlódásra jellemző állandó, amit *viszkozitásnak* neveznek (SI egysége: $1 \frac{Ns}{m^2}$).

A sebesség a folyadékban az alsó lapnál mérhető $v_x = 0$ értékről fokozatosan nő a felső lap $v_x = v_0$ értékére, vagyis a sebesség függ a z -koordinátától: $v_x = v_x(z)$.

Az erőre kapott összefüggés bármilyen rétegvastagság esetén fennáll, ezért várható, hogy ha a folyadék belsejében vizsgálunk meg egy nagyon vékony réteget, akkor annak a mozgatásához szükséges F_x nyíróerőt, amit a szomszédos réteg fejt ki (ábra), ugyanilyen összefüggés adja meg

$$F_x(z) = \eta \frac{dv_x}{dz} A.$$

A folyadékban kiválasztott tetszőleges dz vastagságú réteg állandó sebességgel mozog, tehát a rá ható erők eredője nulla. Mivel ez a kiválasztott réteg szomszédjaira is igaz, a nyíróerő nem függhet a helytől, és azonos a felső lap húzásához szükséges erővel, vagyis:

$$F_x = \eta \frac{dv_x}{dz} A = \eta \frac{v_0}{z_0} A.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy a sebesség hosszegységre eső változását megadó $\frac{dv_x}{dz}$ *sebesség-gradiens* is mindenütt azonos, és egyenlő a teljes sebesség-gradienssel

$$\frac{dv_x(z)}{dz} = \frac{v_0}{z_0},$$

a sebesség lineárisan változik a réteg mentén:

$$v_x(z) = \frac{v_0}{z_0} z.$$

A rétegek érintkezési felületén ható

$$F_x = \eta \frac{dv_x}{dz} A$$

nyíróerőnek megfelelő nyírófeszültség

$$\tau = \frac{F_x}{A} = \eta \frac{dv_x}{dz}.$$

A tapasztalat szerint ezek az összefüggések nem csak az itt tárgyalt speciális esetben igazak, hanem a legtöbb közönséges folyadékban és gázban általában is érvényesek. Ha egy közeg tetszőleges helyén kiválasztunk egy elemi felületet, akkor a felület két oldalán elhelyezkedő közegrészek között az ott fennálló sebesség-gradienssel arányos nyíróerő- illetve nyírófeszültség lép fel.

A belső súrlódási erő és az érintkezési felületre merőleges (pl. z-irányú) sebesség-gradiens között fennálló

$$F = \eta \frac{dv}{dz} A$$

összefüggést *Newton-féle súrlódási törvénynek* nevezik.

Belső súrlódás szempontjából a különböző folyadékok eltérő módon viselkednek. Azokat a folyadékokat, amelyekre érvényes a Newton-féle súrlódási törvény, *newtoni folyadékoknak* nevezik. Ilyenek pl. a tiszta folyadékok és a valódi oldatok.

Nem newtoni folyadékok pl. a kolloid oldatok, szuszpenziók, és általában a többfázisú folyadékok. Ezeknek a folyadékoknak a leírására a fenti törvény általában nem használható.

Lamináris áramlás csőben

Láttuk, hogy sík lemezek között áramló közeg áramlási sebessége függ a helytől. Gyakorlati szempontból még fontosabb tudni, hogy milyen a sebességeloszlás egy csőben áramló közegben, ha az áramlás lamináris. Abból a tapasztalati tényből kiindulva, hogy a cső falánál a sebesség nulla, azt várjuk, hogy a sebességnek maximuma van a cső középvonalában. A kérdés az, hogy hogyan változik a sebesség a cső falára merőleges irányban.

A sebességeloszlást elméleti úton úgy határozhatjuk meg, hogy felírjuk az ábrán látható, egyenletes keresztmetszetű, R sugarú, ℓ hosszúságú csőben kiválasztott r sugarú henger mozgásegyenletét. Ehhez számba kell vennünk a hengerre ható erőket. Az x -tengely irányába mutat a p_1 nyomásból származó

$$F_{1x} = p_1 A = p_1 r^2 \pi$$

erő, az x -tengellyel szembe mutat a p_2 nyomásból származó

$$F_{2x} = -p_2 A = -p_2 r^2 \pi$$

erő, végül a henger palástfelületén fellép az x -tengellyel szembe mutató

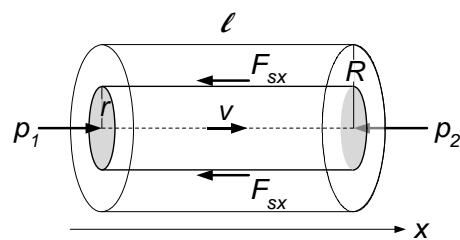
$$F_{sx} = \eta \frac{dv_x}{dr} A_p = \eta \frac{dv_x}{dr} 2 r \pi \ell$$

belső súrlódási erő (a sebesség a sugár növekedésével csökken, tehát ez az erőkomponens negatív). Itt A_p a henger palástjának felülete.

Az eredő erő ennek alapján

$$F_{xe} = F_{1x} + F_{2x} + F_{sx} = (p_1 - p_2) r^2 \pi - \eta \frac{dv_x}{dr} 2 r \pi \ell.$$

Mivel a közeg állandó sebességgel áramlik a csőben, a kiválasztott tömeg gyorsulása nulla, ezért az eredő erőnek nullának kell lenni, tehát



$$(p_1 - p_2)r^2 \pi + \eta \frac{dv_x}{dr} 2r\pi l = 0,$$

azaz

$$(p_1 - p_2)r + 2\ell\eta \frac{dv_x}{dr} = 0.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dv_x}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\ell\eta} r.$$

Az egyenlet könnyen integrálható:

$$v_x(r) = -\frac{(p_1 - p_2)r^2}{2 \cdot 2\ell\eta} + C = -Kr^2 + C.$$

Itt bevezettük a $K = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta}$ jelölést. Meg kell határoznunk még a C állandót.

Tudjuk, hogy a cső falánál a sebesség nulla, tehát

$$v_x(R) = -KR^2 + C = 0,$$

így az állandó

$$C = KR^2.$$

Ezt behelyettesítve, és K helyébe visszaírva az eredeti kifejezést, a sebességeloszlásra azt kapjuk, hogy

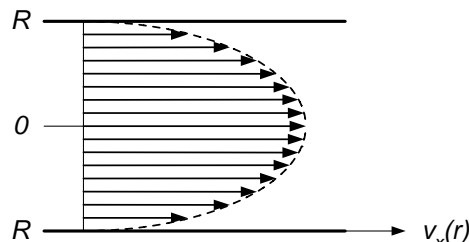
$$v_x(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta} (R^2 - r^2).$$

Ez egy forgási paraboloid egyenlete, amelynek szimmetriatengelye a henger középvonalában ($r = 0$) van. A cső falánál a sebesség nulla $v_x(R) = 0$, a cső

középvonalában $v_x(0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta} R^2$. A

sebességeloszlás síkmetszetét sematikusán a mellékelt ábra mutatja.

A kísérletek azt mutatják, hogy newtoni folyadékok lamináris áramlására a kapott sebességeloszlási törvény helytálló.



Hagen¹-Poiseuille²-törvény

Gyakran szükség van arra, hogy kiszámítsuk, mekkora a tömegáram egy egyenletes keresztmetszetű csőben áramló közeg esetén.

Ha a közeg ideális, akkor ez a feladat könnyen megoldható, hiszen a közeg minden pontja azonos v sebességgel mozog, így egy A felületű csőben folyó tömegáram $I_m = \rho v A$.

Más a helyzet akkor, ha az áramlás sűrűdéses, mert akkor a sebesség a cső keresztmetszete mentén változik. Az áramerősség a sebességeloszlás ismeretében ebben az esetben is kiszámítható, csak a csőben mozgó közeg keresztmetszetét olyan dA felületelemekre kell felosztani, amelyeken belül a sebesség mindenütt azonosnak tekinthető. Egy ilyen felületelemen folyó elemi áram a $dI_m = \rho v dA$ összefüggéssel számítható ki, a teljes áram pedig az elemi áramok összegzésével kapható meg.

¹ Gotthilf HAGEN (1797-1884) német fizikus és hidraulikai mérnök

² Jean POISEUILLE (1797-1869) francia orvos, fiziológus

Egyszerűen elvégezhető ez a számítás egy hengeres cső esetén, mert ekkor a sebességeloszlás hengersizmetrikus. Az elemi felületet célszerű körgyűrű formájában felvenni, amint az a mellékelt ábrán látható. Itt az elemi felület

$$dA = 2r\pi dr,$$

a sebesség az r sugárnál a korábbi jelöléssel

$$v(r) = K(R^2 - r^2),$$

így a körgyűrűn átfolyó elemi áram

$$dI_r = \rho v(r) dA = \rho K(R^2 - r^2) 2r\pi dr.$$

Az R sugarú csőben folyó tömegáram erősségét az elemi áramok összegzésével, azaz integrálással kapjuk:

$$I_m = 2\pi\rho K \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = 2\pi\rho K \left\{ \int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 dr \right\} = 2\pi\rho K \left\{ \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right\} = \frac{\pi\rho K}{2} R^4.$$

Beírva a $K = \frac{(p_1 - p_2)}{4\ell\eta}$ kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$I_m = \frac{\pi\rho}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{\ell} R^4.$$

A tömegáram helyett gyakran a térfogati áramot használják, amit a sűrűséggel való osztással kapunk:

$$I_V = \frac{\pi}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{\ell} R^4.$$

A csőben áramló közeg áramerősségére vonatkozó fenti összefüggéseket *Hagen–Poiseuille-törvénynek* nevezik.

A törvény szerint a csőben folyó áram erőssége arányos az áramot létrehozó nyomáskülönbséggel. Az elektromos áramnál bevezetett ellenállás mintájára gyakran bevezetik a

$$\frac{(p_1 - p_2)}{I_V} = \frac{8\eta\ell}{\pi R^4}$$

mennyiséget, amit a cső áramlással szemben tanúsított *ellenállásának* jellemzésére használnak. Látható, hogy a cső ellenállása nagyon erősen függ a cső sugarától, a cső sugarának csökkenésével igen gyorsan nő.

Az áramlás jellemzésére gyakran *átlagos sebességet* használnak, amit például a

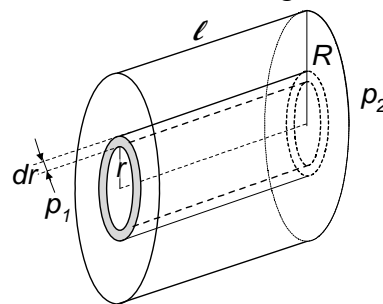
$$\bar{v} = \frac{I_V}{A} = \frac{I_V}{R^2\pi} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{\ell}$$

összefüggéssel definiálnak.

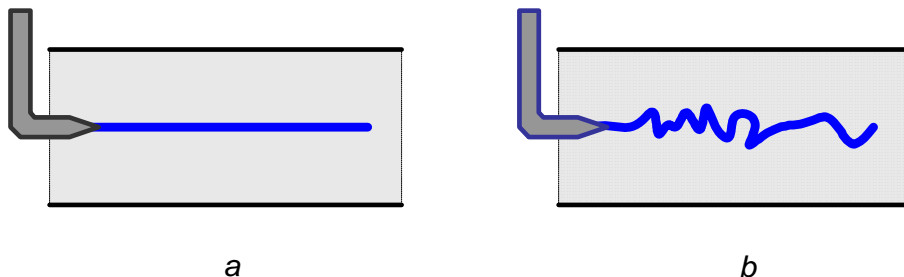
A Hagen–Poiseuille-törvény lehetőséget ad a viszkozitás meghatározására, hiszen ha ismerjük a cső geometriai adatait, megmérjük a nyomáskülönbséget és az áramerősséget, akkor a viszkozitás kiszámítható. A viszkozitás egyéb mérési módszereivel a laboratóriumban találkozunk.

Turbulens áramlások

Ha egy csőben az áramlás sebességét növeljük, akkor az áramlás turbulenssé válik. A közeg részecskéi ilyenkor a haladó mozgás mellett forgómozgást is végeznek, az áramvonalak összekeverednek, örvények jelennek meg, az áramlás nagyon bonyolulttá válik.



Ezt jól mutatja egy folyadékáramba vékony csövön bevezetett színes folyadékfonal viselkedésének megváltozása, amit az alábbi ábra szemléltet. Lamináris áramlásban a színes fonal az áramvonalakkal párhuzamos egyenest rajzol ki (a ábra), az áramlási sebességet növelve a színes fonal „összegabalyodik” (b ábra), és megmutatja, hogy az áramlás turbulenssé vált.



A turbulenssé válás az áramlásokra vonatkozó ún. *hasonlósági elmélet* szerint egy dimenzió nélküli szám bizonyos értékénél következik be. Ezt a számot *Reynolds¹-számnak* nevezik, és *csőben* történő áramlás esetén értékét az

$$R = \frac{\rho r v}{\eta}$$

összefüggés adja meg (r a cső sugara, ρ a közeg sűrűsége, v az áramlás átlagos sebessége). Az elmélet szerint az áramlás sima falú, hengeres csőben akkor válik turbulenssé, ha a Reynolds-szám nagyobb, mint az $R_k \approx 1200$ kritikus érték, vagyis ha

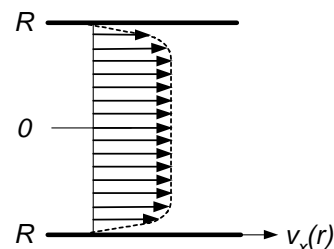
$$\frac{\rho r v}{\eta} > 1200 .$$

Ebből megkaphatjuk, hogy adott közeg és adott csőszugár esetén mekkora az a v_k kritikus áramlási sebesség, amely felett az áramlás turbulens lesz:

$$v_k \approx 1200 \frac{\eta}{\rho r} .$$

A fenti feltételből egyrészt az látható, hogy a viszkozitás növelésével a kritikus sebesség nő (viszkózus közegben nehezebben alakul ki turbulencia), másrészt, adott közeg esetén annál nagyobb sebességnél válik turbulenssé az áramlás, minél vékonyabb a cső (vékonyabb csőben nehezebben alakul ki turbulencia). A nagyságrendek szemléltetésére: 20°C -os víz áramlása esetén például $r = 1\text{ cm}$ sugarú csőben $v_k \approx 0,12\text{ m/s}$, de $r = 1\text{ mm}$ -nél már $v_k \approx 1,2\text{ m/s}$.

Turbulens áramlásban a laminárishoz képest lényegesen megváltoznak az áramlási viszonyok. Egy csőben például a sebességeloszlás lényegesen különbözik a lamináris áramlásra kiszámított eloszlástól. Az ábra a kiátlagolt sebességeloszlást mutatja szematikusan egy kis viszkozitású közeg (pl. víz vagy levegő) ilyen áramlásában. Látható, hogy a sebesség gyakorlatilag csak a fal közelében lévő vékony határrétegben változik, a faltól távol a sebesség a helytől alig függ, az áramlás gyakorlatilag súrlódásmentes.



Az elmélet szerint a belső súrlódást ilyenkor az áramlásban elhelyezkedő felületek (pl. csőfal, akadály) mentén egy vékony *határrétegben* kell figyelembe venni, ahol örvények alakulnak ki, a felülettől távolabbi helyeken a közeg ideális közegként viselkedik.

A Hagen–Poiseuille-törvény ilyenkor nem érvényes, a tapasztalat és a számítások szerint a cső ellenállása általában sokkal nagyobb, mint lamináris áramlásban.

¹ Osborne REYNOLDS (1842-1912) ír fizikus és mérnök

Folyadékban vagy gázban mozgó testekre ható erők

Számos tapasztalat mutatja, hogy egy nyugvó¹ közeg a benne mozgó testre, ill. egy áramló közeg a benne nyugvó testre erőt gyakorol. Ennek a jelenségnek nyilvánvalóan komoly gyakorlati jelentősége van, ezért az erő ismerete nagyon fontos.

Egy közegben mozgó testre ható erő meghatározása a hidrodinamika legbonyolultabb problémái közé tartozik, amelyeknek megoldásánál alapvető szerepet játszanak a kísérletek. A relativitás elvéből következik, de mérésekkel is kimutatható, hogy a nyugvó közeg a benne \mathbf{v} sebességgel mozgó testre ugyanolyan erőt gyakorol, mint a \mathbf{v} sebességgel áramló közeg a benne nyugvó testre. Ez teszi lehetővé, hogy az erő vizsgálatánál a közegben mozgó test helyett a laboratóriumban nyugvó testet vizsgáljunk áramló közegben.

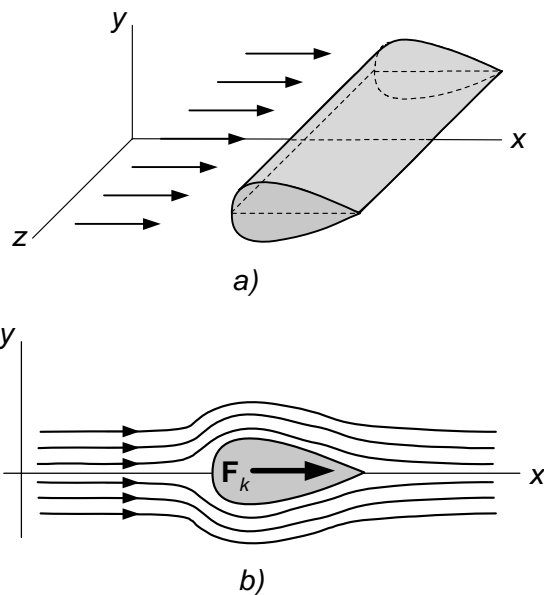
Az áramlások kísérleti vizsgálatánál nagyon fontos szerepet játszik a Reynolds-szám. Ha egy túlságosan nagyméretű test viselkedését szeretnénk megvizsgálni folyadék- vagy gázáramban, akkor kézenfekvőnek tűnik, hogy a nagyméretű test helyett a test geometriailag hasonló, kicsinyített modelljét vizsgáljuk. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy ugyanolyan áramlásban a kicsinyített modell egészen másképp viselkedik, mint az eredeti. A hasonlósági elmélet szerint két áramlás dinamikailag csak akkor hasonló, ha az áramlásokban a *Reynolds-szám megegyezik*. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a kicsinyített modell dinamikai szempontból akkor viselkedik ugyanúgy, mint az eredeti test, ha biztosítjuk ezt a hasonlósági feltételt. A kicsinyítésnek sajnos határt szab az, hogy $R \sim rv$, tehát a Reynolds-szám azonosságának biztosításához a méret csökkenését a sebesség növelésével kell kompenzálni, és a sebesség csak egy bizonyos határig növelhető. Ennek részben technikai okai vannak, de gázállapotú közeg esetén komoly nehézséget okoz, hogy a sebesség növelésénél a közeg tulajdonságai lényegesen megváltoznak (a levegő pl. a 330 m/s sebességhez közeledve összenyomható közegként kezd viselkedni).

Közegellenállás

Egy a közeghez képest mozgó testre ható erőknek mindig van egy olyan összetevője, amely a test sebességével ellentétes irányú, tehát a test mozgását akadályozza. A közeg által a testre kifejtett ilyen erőt *közegellenállásnak*, vagy *hidrodinamikai ellenállásnak* nevezik.

A kísérletek azt mutatják, hogy egy áramlásban elhelyezett (tehát a közeghez képest mozgó) testre ható erő nagysága és iránya függ a test alakjától, a testnek az áramláshoz viszonyított helyzetétől és az áramlás sebességétől.

A közegellenállás tisztán akkor tanulmányozható, ha olyan testet választunk, amelynek legalább egy szimmetria síkja van, és az áramlásba is „szimmetrikusan” helyezzük el, amint az pl. a mellékelt *a)* ábrán látható. Itt az áramlás x -irányú, a z -irányban nagyon hosszúnak gondolt test pedig



¹ A továbbiakban a jelenségeket a Föld felszínéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk, és a „nyugvó” „mozgó”, „áramló” jelzőket ebben az értelemben használjuk.

szimmetrikus az xz síkra. Ilyenkor az várható, hogy – nem túl nagy sebességeknél – a test körül létrejött áramlás is ugyanilyen szimmetriájú (b) ábra), és emiatt a testre ható erőnek (\mathbf{F}_k) csak x -komponense van.

A tapasztalat szerint a közegellenállás két részből tevődik össze.

Egyik összetevője közvetlenül a belső súrlódással van kapcsolatban. A közeg sebessége a test felületén nulla, attól távolodva fokozatosan nő, és a gyorsabban haladó részek erőt fejtenek ki a lassabban mozgó részekre és végső soron a testre is. Ez az ún. *súrlódási-* vagy *felületi ellenállás*. Kis sebességeknél a közegellenállás gyakorlatilag ebből a súrlódási ellenállásból származik, ami arányos a test és a közeg relatív sebességével

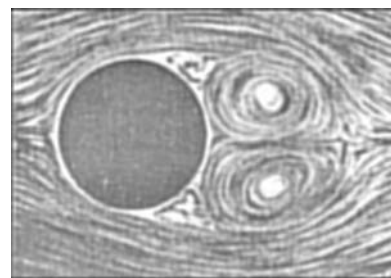
$$F_s = k\eta v,$$

ahol k a test alakjától és méretétől függő arányossági tényező. Gömb alakú test esetén $k = 6\pi r$, így a súrlódási ellenállás ekkor

$$F_s = 6\pi r\eta v.$$

Ez a *Stokes¹-törvény*, aminek ismeretében leírható egy közegben eső golyó mozgása, és a golyó sebességének mérésével meghatározható a közeg viszkozitása.

A közegellenállás másik összetevője egyrészt abból ered, hogy az áramlás a test homlokfelületének közvetlen közelében lelassul, az áramvonalak itt megritkulnak, és a nyomás megnő (Bernoulli-egyenlet). Ez az áramlás irányába mutató erőt okoz. Nagyobb sebességeknél ehhez még az is hozzájárul, hogy a testnek az áramlással szembeeső végén örvények keletkeznek, amelyek szintén az áramlás irányába eső erőt eredményeznek. A mellékelt ábrán egy henger alakú test mögött kialakult örvények láthatók.

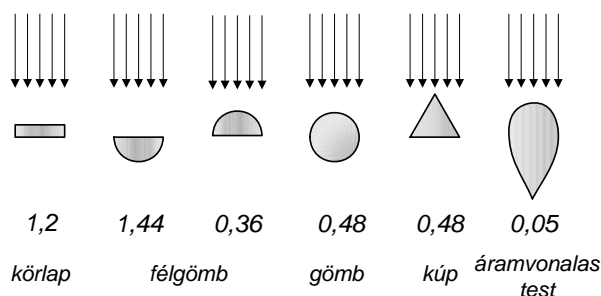


Ez a két hatás hozza létre a *nyomási-* vagy *alakellenállást*. Az alakellenállás erősen függ a test alakjától és a test és a közeg relatív sebességétől, legtöbb esetben a sebesség négyzetével arányos. Egy A homlokfelületű test és ρ sűrűségű közeg esetén ez az erő az

$$F_{ny} = c \frac{1}{2} \rho v^2$$

alakba írható, ahol c a test alakjától függő állandó, amit *alakellenállási tényezőnek* neveznek. Az ábrán feltüntetett számok az alakellenállási tényező értékét mutatják különböző alakú testek esetén.

Látható, hogy ez a tényező a jobboldali „csepp alaknál” a legkisebb. Ennek a testnek azért kicsi az ellenállása, mert a test mögött gyakorlatilag nincs örvényképződés, ezért az ilyen testet *áramvonalasnak* nevezik.

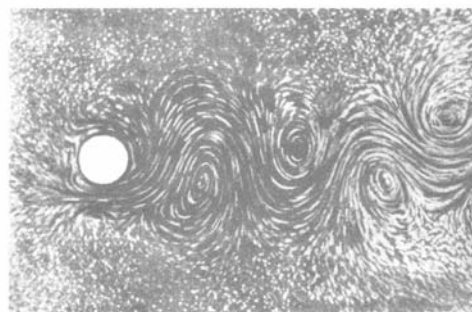


A test mögött kialakuló áramlás

jellege a Reynolds-számtól (adott közeg és geometria esetén a sebességtől) függ. A Reynolds-szám növekedésével a test mögött örvények jelennek meg, amelyek a testről leszakadnak, az áramlás továbbsodorja azokat, de mindig újra keletkeznek. Nagy

¹ Georg STOKES (1819-1903) angol matematikus és fizikus

Reynolds-számoknál (nagy sebességeknél) a mozgó test mögött az örvények nem szimmetrikusan válnak le a testről, hanem váltakozva a test egyik- és másik oldalán, és így egy jellegzetes örvénysor, ún. *Kármán¹-féle örvényút* jön létre.



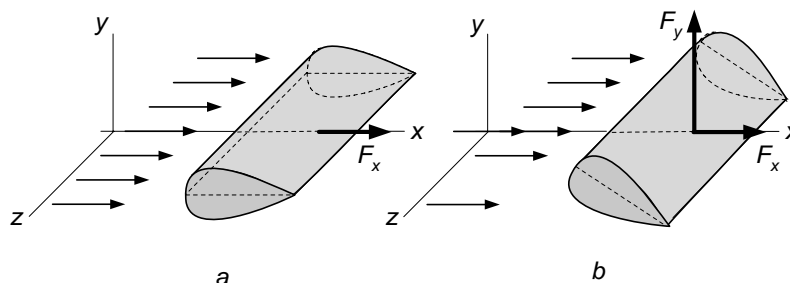
A Kármán-féle örvényút látható a mellékelt képen egy henger körül kialakult valóságos áramlásban.

A leszakadó örvények miatt lobog a szélben a zászló, és emiatt adnak hangot a szélben a kifeszített drótok és kötelek.

Dinamikai felhajtóerő

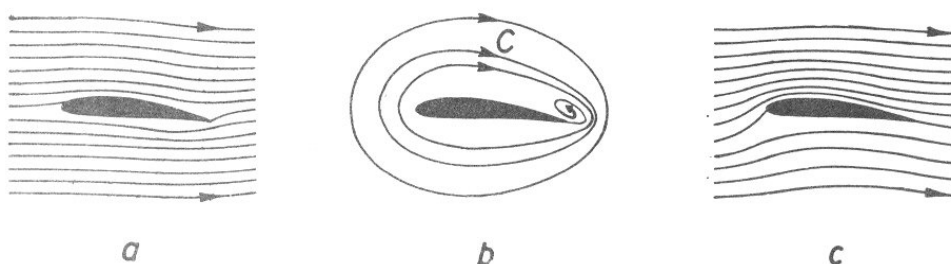
Eddig olyan esetekkel foglalkoztunk, amikor az áramlás – a benne elhelyezett szimmetrikus test szimmetrikus elhelyezkedése miatt – tükrözési szimmetriával rendelkezett. Láttuk, hogy ilyenkor az áramlás irányával ellentétes közegellenállás lép fel. Ha ez a fajta szimmetria nem áll fenn (vagy azért, mert a test nem szimmetrikus, vagy mert nem megfelelő helyzetben van), akkor a közegellenállás mellett az áramlás irányára merőleges erő is fellép.

Ezt mutatja vázlatosan a mellékelt ábra egy repülőgépszárnyhoz hasonló, tükörszimmetriával rendelkező test esetén. Az *a* ábrán látható a „szimmetrikus” helyzet, amikor a testre ható erők eredőjének csak *x*-komponense van. Ha a test a *b* ábrán látható ferde helyzetbe kerül, akkor fellép egy *y*-irányú erő is, amit *dinamikai felhajtóerőnek* neveznek (az elnevezés azzal függ össze, hogy a repülőgép szárnyán ez az erő felfelé irányul). A felhajtóerő közvetlen oka az, hogy aszimmetrikus test vagy



egy szimmetrikus test aszimmetrikus elhelyezkedése esetén az áramlás sebessége a test felett nagyobb, mint alatta, ezért a Bernoulli-egyenletnek megfelelően alul nagyobb a nyomás, mint felül.

Ennek a helyzetnek a kialakulása meglehetősen bonyolult folyamatok eredménye. Egy repülőgép-szárnyhoz hasonló test esetén a jelenséget kvalitatív módon a következőképpen lehet értelmezni. A test körül kialakult áramlásban (*a* ábra) a belső



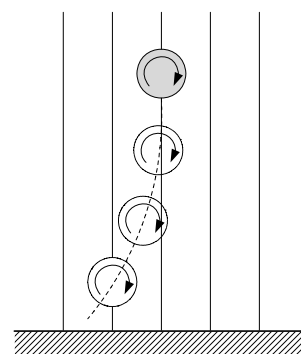
¹ KÁRMÁN Tódor (1881-1963) magyar származású amerikai mérnök és fizikus

súrlódás miatt a test csúcsos végén egy óramutató járásával ellentétes irányú örvény keletkezik, és a perdületmegmaradás tétele miatt létrejön a testet körülvevő, ellenkező (tehát az óramutató járásával azonos) irányú, zárt áramvonalakkal jellemezhető áramlás, amit *cirkulációnak* neveznek (*b* ábra). A cirkuláció az áramlási sebességet a test felett megnöveli, alatta pedig lecsökkenti (*c* ábra), így keletkezik az a nyomáskülönbség, ami egy felfelé irányuló emelőerőt eredményez. Az ábra azt szemlélteti, hogy a kialakuló áramlást az eredeti áramlás és a cirkuláció szuperpozíciójával lehet előállítani.

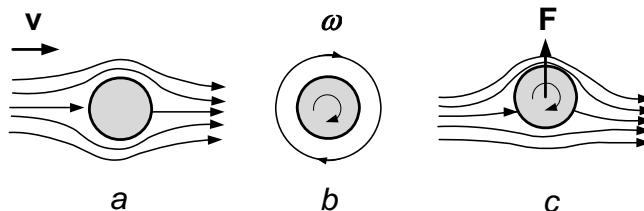
Szintén a belső súrlódás miatt kialakuló cirkulációval értelmezhető a *Magnus*¹-*effektus*, amely egyszerű kísérlettel bemutatható.

KÍSÉRLET:

Egy üres papírhengert forgassunk meg a tengelye körül, és a forgó hengert engedjük leesni. A henger pályája jól láthatóan eltér a függőlegestől. Az ábrán oldalnézetben látjuk a jelenséget: ha a hengert az óramutató járásával egy irányban forgatjuk meg, akkor a henger a függőlegestől balra-, ellenkező forgatás esetén attól jobbra térül el.



Az effektus kvalitatív magyarázata a következő. Ha a henger egy közegben mozog az úgy is felfogható, hogy a henger áll és a közeg áramlik. Amíg a henger nem forog, addig az áramvonalak szimmetrikusak, erőhatás nincs (*a* ábra). Ha a henger forog, akkor a belső súrlódás miatt magával ragadja a közeget, és így cirkulációt hoz létre (*b* ábra), ami az áramlási sebességet felül megnöveli, alul pedig lecsökkenti (*c* ábra). Emiatt egy felfelé mutató erő jön létre, ami a test és a közeg relatív sebességére merőleges. Ha a test mozog a közeghez képest, akkor ez az erő a testet eltéríti eredeti mozgási irányától.



¹ Gustav MAGNUS (1802-1870) német kémikus és fizikus