# Folyadékok és gázok áramlása

Nyugvó folyadékok és gázok esetén megtehettük azt, hogy a kétféle közeget a tárgyalás során nem különböztettük meg egymástól. Ez az egyszerűsítés az áramlások leírásánál nem mindig engedhető meg. Ennek oka az, hogy a folyadékok és gázok *kompresszibilitása* és sűrűsége jelentősen *eltér* egymástól, és a gázok esetén ezek a jellemzők erősen *függnek a hőmérséklettől*. Ezek az eltérések azt eredményezik, hogy bizonyos körülmények között (pl. nagy sebességű áramlásnál) a kétféle anyag eltérően viselkedik.
További eltérés a nyugvó közegekhez képest az, hogy áramló közegben általában a *belső súrlódást* is figyelembe kell venni, hiszen az áramlásban egymáshoz képest mozgó folyadékrészek is előfordulhatnak. Áramló közegben valamilyen mértékű belső súrlódás mindig van, a valóságos közegek mindig *súrlódásosak*, legfeljebb bizonyos esetekben a vizsgált probléma szempontjából a belső súrlódás elhanyagolható, vagyis a folyadék vagy gáz *súrlódásmentesnek* tekinthető.

Az áramlások elméleti leírásánál kétféle eljárást alkalmaznak. Az egyik lehetséges eljárás az, hogy a közeget elemi részecskékre osztva az egyes részecskék mozgását vizsgáljuk, és megadjuk ezeknek a részecskéknek a pályáját. A másik eljárás az, hogy a közeg pontjainak sebességét vizsgáljuk, és megadjuk a sebességvektornak a helytől és időtől való függését. Ez utóbbi módszer az egyszerűbb, és a gyakorlatban is leginkább ezt használják.
A mechanikának az áramlásokkal foglalkozó ágát a folyadékok esetében *hidrodinamikának*- a gázok esetében *aerodinamikának* nevezik. A folyadékok és gázok áramlását csak abban az esetben lehet együtt tárgyalni, ha az áramlás sebessége nem túl nagy, és a hőmérséklet állandónak tekinthető. Ennek ellenére előfordul, hogy az elnevezésben nem tesznek különbséget a két eset között, és a teljes területre a hidrodinamika elnevezést használják.

A továbbiakban, az egyszerűbb és leginkább elterjedt módszert követve, az áramlásokat mi is a sebességek megadásával jellemezzük, de csak a legegyszerűbb esetekkel foglalkozunk.

## *Az áramlás általános jellemzése*

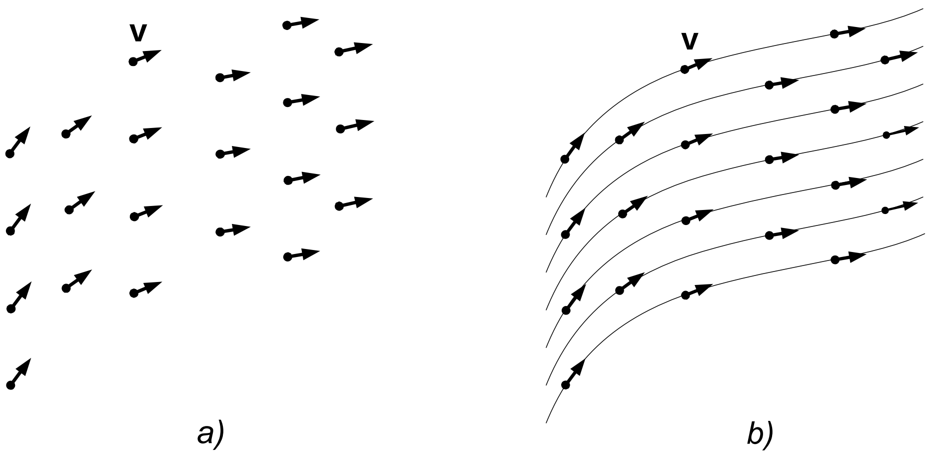
Az áramló közegek viselkedésének leírásához szükségünk van olyan mennyiségekre, amelyekkel jellemezni tudjuk az áramlásokat. Most ezekkel foglalkozunk.

### Sebességtér, áramvonalak

A folyadék mozgásának leírásához az *áramlási tér* tetszőleges $\mathbf{r}(x,y,z)$ pontjában, tetszőleges $t$ időpillanatban ismernünk kell a $\mathbf{v}$ sebességvektort, vagyis a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v}(x,y,z,t)$$

függvényt. Ez a függvény a tér minden pontjához hozzárendel egy vektort, vagyis egy vektorteret definiál. Ennek megfelelően, az ilyen módon jellemzett áramlási teret *sebességtérnek* is nevezik.
A sebességtér szemléletesen úgy jeleníthető meg, hogy adott időpillanatban az áramlási tér minél több pontjába berajzoljuk a sebességvektorokat. Így egy sebességvektor-térképet kapunk, amely az egyes pontokban megmutatja a sebességvektor nagyságát és irányát (*a)* ábra).



a) b)

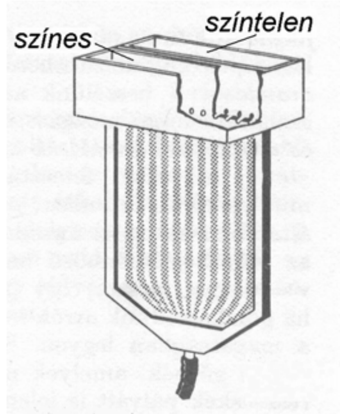
Ennél áttekinthetőbb és hasznosabb ábrázolást kapunk, ha a berajzolt sebességvektorokhoz ún. simulógörbéket szerkesztünk, amelyeknek a sebességvektorok az érintői (*b)* ábra). Az így kapott görbék az *áramvonalak*.
Az áramvonalkép egy adott időpillanatban jól jellemzi az áramlási térben a sebességek irányváltozásait, ha azonban a sebességek időben is változnak, az áramvonalkép pillanatról-pillanatra változik. Az áramvonalak tehát olyan áramlásoknál hasznosak, amelyeknél a sebesség csak a helytől függ, adott helyen időben nem változik. Ilyen, időben állandó áramlásban az áramvonal egyben a folyadékrészecskék pályáját is mutatja.

Az áramvonalak szerkezetének kimutatására többféle módszert is kidolgoztak, amelyek különböző áramlási viszonyok között alkalmazhatók. Látványos áramvonalképek készítésére alkalmas a Pohl[1]-féle áramvonal-készülék.

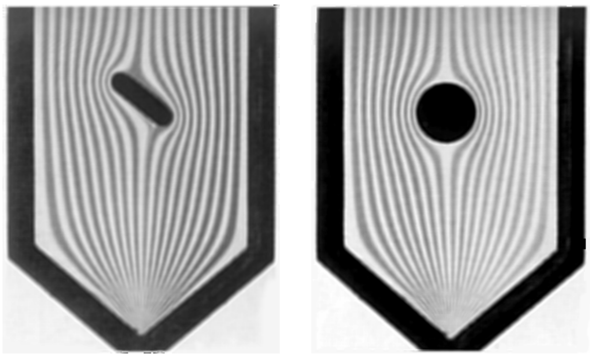
---

[1] Robert Wichard POHL (1884-1976) német fizikus

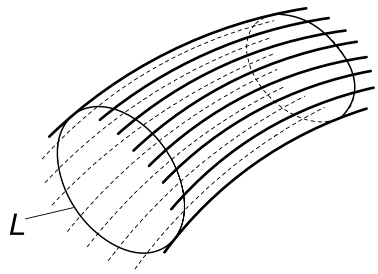
**KÍSÉRLET:**
Két víztartály egyikébe színezett-, a másikba pedig színtelen vizet töltünk, majd a tartályokból a színtelen vizet két egymáshoz közel, függőlegesen elhelyezett üveglap közé folyatjuk. A lassan lefelé áramló vízrétegbe vékony csövekből álló csősoron át színes vizet engedünk ki (ábra). Így egy színes és színtelen vízfonalakból álló áramlás jön létre. Ha az áramlás elég lassú, akkor a különböző színű vízfonalak egymás mellett mozognak, egymással nem keverednek, és az áramvonalaknak megfelelő alakot vesznek fel.




Ilyen áramvonal-készülékkel készített képeket mutat a mellékelt ábra, amelyen az áramlás útjába helyezett hosszúkás- illetve kör alakú akadály körül kialakult áramvonalkép látható. Ez a kísérlet tulajdonképpen az ábra síkjára merőlegesen elhelyezett, hosszú síklap- illetve henger hatását modellezi. A kapott ábra a síklap illetve henger körül kialakult áramlás síkmetszetének tekinthető.



Az áramlás leírásához hasznos az *áramcső* fogalmának bevezetése. Az áramcső az áramlási térben felvett kis zárt görbén (az ábrán *L*) áthaladó áramvonalak által alkotott cső. A közegnek az áramcsőben áramló részét *áramfonalnak* nevezik. Az áramcsőben a közeg úgy áramlik, hogy az áramlási sebességnek nincs az áramcső „falára" merőleges komponense, a közeg az áramcsőből nem lép ki.
Ez a helyzet egy merev falú cső esetében is, és bizonyos esetekben egy csőben áramló közeg mozgása áramcsőben történő áramlásnak tekinthető. Ez számunkra azért fontos, mert a továbbiakban elsősorban olyan eseteket vizsgálunk, amikor a közeg csőben áramlik.




A folyadékok és gázok áramlásának leírásához, a sebességek megadása mellett, a közeg különböző pontjaiban fennálló $p$ nyomás és $\rho$ sűrűség ismerete is hozzátartozik. Általában ezek a mennyiségek is változhatnak időben, vagyis a

$$p = p(x,y,z,t) \quad \text{és} \quad \rho = \rho(x,y,z,t)$$

függvényeket kell meghatározni.

Az áramlás elméleti leírása tehát azt jelenti, hogy a közegre ható erők és a közeget határoló falak vagy csövek (vagyis a határfeltételek) ismeretében meghatározzuk a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z,t) \qquad p = p(x,y,z,t) \qquad \rho = \rho(x,y,z,t)$$

függvényeket. Ehhez az áramló közegre mozgásegyenleteket kell felírni, fel kell használni a tömegmegmaradást kifejező kontinuitási tételt és a közeg állapotegyenletét, amely a nyomás és a sűrűség közötti összefüggést adja meg. Egy ilyen feladat megoldása általában nem könnyű, ezzel a mechanika speciális fejezetei (pl. áramlástan) foglalkoznak. Itt elsősorban a legegyszerűbb áramlásokkal foglalkozunk, amelyek kísérletileg is könnyen tanulmányozhatók, és amelyeknek elméleti leírásához nincs szükség a mozgásegyenletek megoldására.

## Tömegáram-erősség, tömegáram-sűrűség

Az előző pontban tárgyalt mennyiségekkel az áramlás teljes mértékben jellemezhető, de az áramlással kapcsolatban gyakran felmerül az a gyakorlati kérdés, hogy egy kiválasztott felületen (pl. egy cső keresztmetszetén) adott idő alatt mennyi folyadék vagy gáz áramlik át, vagyis milyen az áramlás „erőssége”. Annak érdekében, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, célszerű bevezetni az áramlás irányára merőleges felületen egy irányban átfolyt tömeg ($\Delta m$) és az átfolyási idő ($\Delta t$) hányadosát:

$$I_m^{átl} = \frac{\Delta m}{\Delta t} .$$

Az így definiált $I_m^{átl}$ mennyiség a $\Delta t$ időtartamra vonatkozó átlagos *tömegáram-erősség* (*SI* egysége $1\,\frac{kg}{s}$). Ha az áramerősséget ismerjük, akkor tetszőleges $\Delta t$ idő alatt átáramlott tömeg kiszámítható: $\Delta m = I_m^{átl} \Delta t$ .

Ha az áramlás erőssége időben változik, akkor célszerű az áramerősséget egy adott időpillanatban megadni, vagyis érdemes bevezetni a pillanatnyi tömegáram-erősséget, amit az

$$I_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

összefüggéssel adhatunk meg.

Az áramerősség a keresztmetszetre vonatkozó átlagos mennyiség, hiszen a keresztmetszet különböző részein különböző lehet a tömegáramlás üteme. A keresztmetszeten belüli lokális tömegáramlás jellemzésére vezették be a *tömegáram-sűrűséget*, amelynek nagyságát közelítőleg egy az áramlás irányára merőleges, nagyon kis $\Delta A_N$ nagyságú felületelemen átfolyó kis $\Delta I_m$ áram és a felület hányadosa adja meg:

$$j_m \approx \frac{\Delta I_m}{\Delta A_N} .$$

Ennek számértéke az egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladt tömeggel egyenlő (*SI* egysége $1\,\frac{kg}{s \cdot m^2}$ [2]).

A felület egy pontjában a tömegáram-sűrűség pontos értékét a már ismert módon kapjuk:

$$j_m = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta I_m}{\Delta A_N} = \frac{dI_m}{dA_N} .$$

Az áramsűrűség segítségével az elemi $dA_N$ felületen átfolyó tömegáram a

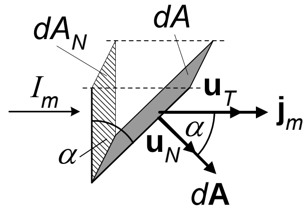
$$dI_m = j_m dA_N$$

alakba írható.

Ha a felület nem merőleges az áramlás irányára, akkor ki kell számítani a felület

$$dA_N = dA \cos\alpha$$

merőleges vetületét (ábra).




Ezzel a felületelemen átfolyó elemi tömegáram

$$dI_m = j_m dA \cos\alpha .$$

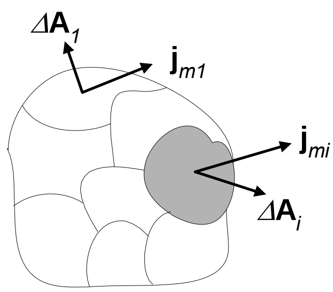
Ha bevezetjük az áram irányába mutató $\mathbf{u}_T$ egységvektort, akkor az áramsűrűséget vektor alakba írhatjuk $\mathbf{j}_m = j_m \mathbf{u}_T$, így az áramsűrűség az áram irányát is megadja. Ha még bevezetjük a felületelemre merőleges $\mathbf{u}_N$ egységvektort is, akkor az elemi tömegáram a

$$dI_m = j_m \mathbf{u}_T dA\, \mathbf{u}_T = \mathbf{j}_m dA\, \mathbf{u}_T$$

alakba írható. Vezessük be a felület nagyságának és állásának jellemzésére a $d\mathbf{A} = dA\, \mathbf{u}_N$ *felületvektort*, amivel az elemi felületen átfolyó elemi tömegáram:

$$dI_m = \mathbf{j}_m d\mathbf{A}\,.$$

Egy véges $A$ felületen átfolyó teljes $I_m$ áramot ennek alapján úgy kaphatjuk meg, hogy a felületet olyan kis részekre osztjuk (ábra), amelyek már síknak tekinthetők (van egyértelmű felületvektoruk), és amelyeken belül az áramsűrűség már nem változik lényegesen. Az $A$ felületen átfolyó áramot közelítőleg az egyes felületelemeken átfolyó elemi áramok




$$I_m \approx \sum_i \mathbf{j}_{m\,i}\, \Delta\mathbf{A}_i$$

összege adja. Az áram pontos értékét a fenti összeg határértéke adja, ha a felosztást finomítjuk, és ezzel a felületelemek nagyságát nullához közelítjük:

$$I_m = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \mathbf{j}_{m\,i}\, \Delta\mathbf{A}_i\,.$$

Ennek a határértéknek a jelölésére a matematikában az

$$I_m = \int_A \mathbf{j}_m d\mathbf{A}$$

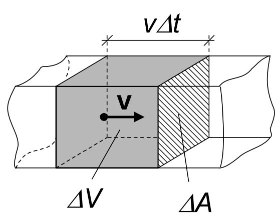
szimbólumot használják, és a $\mathbf{j}_m$ vektor $A$ felületre vonatkozó *felületi integráljának* nevezik. A felületi integrált később matematikában bővebben tárgyalják, számunkra ez a szimbólum most csak egy nagyon finom felosztáson történő összegzést jelent.

********** ********** **********

Mindaz, amit az áramerősségről, áramsűrűségről eddig elmondtunk, mindenféle áramlás esetén érvényes, csak az áramló mennyiséget kell megváltoztatni. Így pl. a töltésáramlásra, vagyis az elektromos áramra vonatkozó összefüggések úgy kaphatók meg, hogy az $m$ tömeg helyett mindenütt a $Q$ elektromos töltést írjuk be az összefüggésekbe.

********** ********** **********

Egy folyadék vagy gáz áramlása esetén az áramlás jellemzésére az áramerősség és áramsűrűség helyett legtöbbször a közeg sebességét használják. Ezért célszerű a fenti összefüggéseket a sebességgel is kifejezni. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy az ábrán látható felületen $\Delta t$ idő alatt mennyi $\Delta m$ tömeg áramlik át, ha ismerjük a közeg $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$ sűrűségét és az áramlás-, vagyis a közegben kiválasztott pontszerű tömegelem $v$ sebességét. A $\Delta A$ felületen $\Delta t$ idő alatt azok a tömegelemek jutnak át, amelyek a felülettől nincsenek messzebb, mint $v\Delta t$, vagyis amelyek benne vannak az ábrán bejelölt $\Delta V$ térfogatban. Eszerint az átmenő tömeg $\Delta m = \rho\Delta V = \rho v \Delta A\, \Delta t$,




így az elemi felületen átmenő elemi tömegáram-erősség

$$\Delta I_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v \Delta A\,,$$

a tömegáram-sűrűség nagysága pedig

$$j_m = \frac{\Delta I_m}{\Delta A} = \rho v \ .$$

Mivel az áramsűrűség vektor az áramlási sebesség irányába mutat, az összefüggés vektori alakban is érvényes:

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{v} \ .$$

Ezzel egy nagyobb $A$ felületen átfolyó tömegáram

$$I_m = \int_A \mathbf{j}_m d\mathbf{A} = \int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} \ .$$

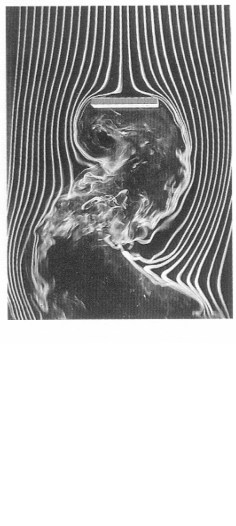
Ha a sűrűség a felület mentén mindenütt azonos, akkor az összegzésből a $\rho$ sűrűség kiemelhető, és ekkor a tömegáramra azt kapjuk, hogy

$$I_m = \rho \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A} \ .$$

**Az áramlások fajtái**

Az hogy egy közegben milyen áramlás jön létre, a körülményektől (erők, határfeltételek) és a közeg tulajdonságaitól függ. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében célszerű az áramlásokat bizonyos – az áramlás leírása szempontjából fontos – szempontok szerint csoportosítani.

1.) Az egyik ilyen szempont, hogy a közeg sűrűsége az áramlás során változik vagy nem, vagyis hogy a közeg *összenyomható* vagy *összenyomhatatlannak* tekinthető. Összenyomható közeg esetén a sűrűség a nyomás ismeretében az állapotegyenletből határozható meg. Így például állandó hőmérsékletű gázban erre a célra a $\rho \sim p$ Boyle–Mariotte-törvény használható. Vannak azonban olyan áramlások is, amelyeknél a közeg sűrűsége az áramlás során gyakorlatilag nem változik, a közeg összenyomhatatlannak tekinthető, ilyenkor $\rho = \acute{a}lland\acute{o}$. Az, hogy egy közeg összenyomhatatlannak tekinthető vagy nem, függ az áramló közegtől és az áramlás sebességétől. Az összenyomhatatlanság feltételét különösen gondosan meg kell vizsgálni gázok áramlása esetén, hiszen a gázok kompresszibilitása nagy. A gázok nem túl nagy nyomások és nem túl nagy áramlási sebességek esetén összenyomhatatlannak tekinthetők (atmoszférikus nyomáson durván néhányszor *10 m/s* sebességig). Nyilvánvaló, hogy az összenyomhatatlan közeg áramlásának leírása egyszerűbb.
2.) Az áramlás leírása szempontjából az is fontos, hogy a közegben a belső súrlódás számottevő vagy elhanyagolható, vagyis hogy az áramlás *súrlódásos* vagy *súrlódásmentesnek* tekinthető. A súrlódásmentes közegeket *ideális* közegeknek is nevezik. A *súrlódásos* áramlások két nagy csoportra oszthatók.
   – Az egyik esetben az áramlásban az áramvonalak egymás mellett helyezkednek el, és nem metszik egymást, a közeg párhuzamosan haladó rétegekből áll. Az ilyen áramlást *lamináris* vagy *réteges* áramlásnak nevezik (baloldali ábra). Lamináris áramlás akkor jön létre, ha a belső súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a szabályos áramlást külső hatások ne tudják megzavarni.
   – A másik esetben (jobboldali ábra) az áramvonalak és az eredetileg párhuzamosan haladó rétegek összekeverednek, és ún. *turbulens* áramlás jön létre.



A *súrlódásmentes* áramlásokat szintén két nagy csoportra szokás felosztani.

- A közeg részecskéi az áramlás során általában haladó- és forgó mozgást is végeznek, ilyenkor az áramvonalképben rendszerint örvény jellegű alakzatok jelennek meg, ez az ún. *örvényes* áramlás.
- Vannak olyan áramlások amelyekben a közeg részecskéi csak haladó mozgást végeznek, ilyenkor az áramlást *örvénymentesnek* nevezik (az áramvonalképben ekkor nincsenek örvényalakzatok).

3.) A leírás szempontjából szintén fontos kérdés, hogy az áramlási tér pontjaiban a sebességek időben változnak vagy minden helyen időben állandóak. Ha a sebesség nem csak a helytől függ, hanem adott helyen időben is változik, akkor az áramlás *időben változó*, más szóval *instacionárius*. Ha a sebesség és vele együtt a nyomás és a sűrűség az áramlási tér minden pontjában időben állandó, csak a helytől függ

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \qquad p = p(x, y, z) \qquad \rho = \rho(x, y, z),$$

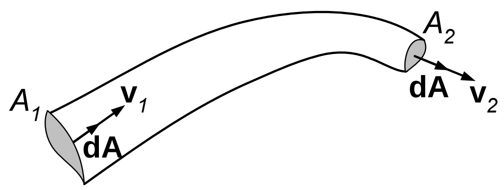
akkor az áramlást *időben állandónak*, más szóval *stacionáriusnak* nevezik. A stacionárius áramlások tárgyalása jóval egyszerűbb, mint az időben változóké.

## *Az időben állandó (stacionárius) áramlás alaptörvényei*

Az áramlások közül legegyszerűbben az időben állandó áramlások tárgyalhatók, ezért először ilyen áramlásokkal foglalkozunk. Mivel a mozgásegyenletek még ebben az esetben is bonyolultak, ezek megkerülésével kell megkísérelnünk, hogy az áramlásra vonatkozó alapvető összefüggésekhez jussunk el.
A pontrendszerek tárgyalásánál láttuk, hogy a mozgásegyenletek megoldásának fáradságos munkáját bizonyos esetekben el lehet kerülni, ha felhasználjuk a pontrendszerekre érvényes megmaradási törvényeket. Ez az eljárás az áramlások esetén is alkalmazható. Itt az áramló közeg két jellemző mennyiségét a *tömeget* és az *energiát* vizsgáljuk meg, mert az ezekre vonatkozó megmaradási törvényekből az áramlásokra vonatkozó fontos törvényeket kaphatunk.

### A kontinuitási egyenlet

Először vizsgáljuk meg az áramlási viszonyokat egy *áramlási csőben*. Válasszuk ki az áramlási csőnek az $A_1$ és $A_2$ keresztmetszetekkel határolt szakaszát (ábra), és vizsgáljuk meg az áramlási csőnek ebbe a térfogatába időegység alatt bemenő- és kimenő tömeget. Mivel az áramlási cső falán keresztül nincs áramlás, és ismereteink szerint tömeg nem tűnhet el és nem keletkezhet, a kiválasztott térfogatban a tömeg csak azért változhat, mert az $A_1$ keresztmetszeten a közeg beáramlik a térfogatba, és az $A_2$ keresztmetszeten pedig kiáramlik a térfogatból. Ha az áramlás időben állandó, akkor a kiszemelt térfogatban az anyag nem halmozódhat fel, hiszen ez a sűrűség időbeli változását eredményezné, ami ellentmond az időben állandó áramlás definíciójának. Mindebből az következik, hogy az egyik keresztmetszeten adott idő alatt bemenő tömegnek meg kell egyezni a másikon ugyanennyi idő alatt kimenő tömeggel.




Ez érvényes az időegység alatt be- és kimenő tömegekre, vagyis a tömegáramokra is. Ha tehát az *1* keresztmetszeten befolyó tömegáramot $I_{m1}$-vel-, a *2* keresztmetszeten kifolyó tömegáramot $I_{m2}$-vel jelöljük, akkor a tömegmegmaradás törvényét az

$$I_{m1} = I_{m2}$$

összefüggéssel adhatjuk meg.
Az összefüggés ebben az alakjában túl általános. Fejezzük ki az áramokat az áramlási sebességekkel a korábban megismert

$$I_m = \int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

összefüggés segítségével. Ha a felületvektort mindkét keresztmetszetnél az áramlás irányában vesszük fel, akkor az $A_1$ keresztmetszeten a csőszakaszba befelé folyó áram nagysága

$$I_{m1} = \int_{A_1} \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{A_1} \rho v dA,$$

az $A_2$ keresztmetszeten kifelé folyó áram nagysága pedig

$$I_{m2} = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{A_2} \rho v dA.$$

Itt felhasználtuk, hogy a felületvektorok párhuzamosak a sebességekkel.

Ennek alapján a tömeg megmaradását kifejező egyenlet az

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA$$

alakot ölti.
Ha az áramcső eléggé vékony, akkor feltételezhető, hogy a sűrűség és a sebesség az áramcső egy keresztmetszetének minden pontján azonos. Ilyenkor az integrálból (összegzésből) a $\rho v$ mennyiség mindkét keresztmetszetnél kiemelhető, azaz

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA = \rho_1 v_1 \int_{A_1} dA = \rho_1 v_1 A_1 \quad \text{és} \quad \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA = \rho_2 v_2 \int_{A_2} dA = \rho_2 v_2 A_2 .$$

Így azt kapjuk, hogy egy vékony áramcső tetszőleges két keresztmetszetére fennáll, hogy

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 ,$$

vagyis a vékony áramlási cső mentén

$$\rho v A = \acute{a}lland\acute{o} .$$

Ezt az összefüggést, amely a tömegmegmaradás törvényét és az áramlás folytonosságát fejezi ki, *kontinuitási egyenletnek* nevezik.

Ha a közeg összenyomhatatlannak tekinthető, akkor $\rho_1 = \rho_2$, tehát

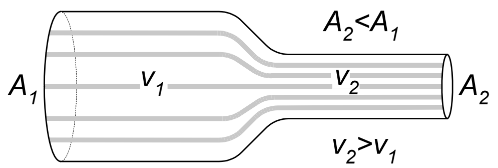
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 .$$

Mivel $vA = \frac{1}{\rho} I_m = \frac{1}{\rho}\frac{dm}{dt} = \frac{dV}{dt} = I_V$ a *térfogati áram erőssége* (számérték szerint a vizsgált felületen időegység alatt áthaladt folyadék- vagy gáztérfogat), összenyomhatatlan közeg esetén nem csak a tömegáramok-, hanem a térfogati áramok is megegyeznek a két keresztmetszetnél.

A kontinuitási egyenlet gyakorlati szempontból is fontos összefüggés, mert nagyon sok esetben merev falú csövekben történő áramlásoknál is használható[1].
A kontinuitási egyenletből például következik, hogy egy változó keresztmetszetű csőben áramló összenyomhatatlan folyadék vagy gáz esetén a cső két keresztmetszetére érvényes, hogy

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 ,$$

ha tehát $A_2 < A_1$, akkor $v_2 > v_1$, vagyis a közeg a kisebb átmérőjű szakaszokon felgyorsul. Ezt a számos tapasztalat által igazolt jelenséget kvalitatív módon úgy lehet értelmezni, hogy a közegnek a kisebb átmérőjű helyen gyorsabban kell haladnia, hogy adott idő alatt ugyanannyi tömeg menjen át itt, mint a nagyobb átmérőjű helyen.



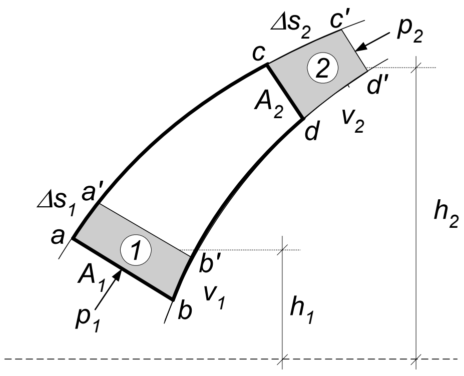

Ha egy változó keresztmetszetű csőben történő áramlást modellezünk a korábban megismert áramvonal-készülékkel, akkor kiderül, hogy a keskenyebb, nagyobb sebességű helyeken az áramvonalak összesűrűsödnek (ábra). Ennek az az oka, hogy az áramvonalak folytonos vonalak, amelyek nem szakadhatnak meg. Ez azt jelenti, hogy az áramvonalak nem csak a sebesség irányáról, hanem a sebesség nagyságáról is tájékoztatást adnak: nagyobb áramvonal-sűrűség nagyobb sebességet jelent.

[1] Súrlódásos áramlásnál a cső keresztmetszete mentén a sebesség változik, ilyenkor az összefüggésbe az átlagos sebességet kell beírni.

## Bernoulli[1]-egyenlet

Most vizsgáljuk meg a másik megmaradó mennyiséget, az energiát, egy nehézségi erőtérben áramló közeg esetén. Feltételezzük, hogy a közeg *összenyomhatatlan*, az áramlás *időben állandó* és *súrlódásmentes*.

Ismét válasszuk ki egy áramcsőnek az $A_1$ és $A_2$ keresztmetszettel lezárt részét (ábra), és számítsuk ki, hogy mennyivel változik meg a kiválasztott térfogatban lévő közeg energiája, ha a térfogat elmozdul. Az elmozdulás során a térfogatelem *ab* keresztmetszete az *a'b'* helyzetbe-, *cd* keresztmetszete pedig a *c'd'* helyzetbe kerül. Mivel az áramlás időben állandó, az elmozdulás során a térfogat *a'b'* és *cd* közötti része változatlan marad, tehát az energiaváltozás számításánál nem kell figyelembe venni. Az energiaváltozás szempontjából a folyamat úgy fogható fel, hogy az *ab-a'b'* térfogatelem az *1* helyzetből az ugyanakkora térfogatú *cd-c'd'* térfogatelem helyére, a *2* helyzetbe kerül. Mivel a közeg összenyomhatatlan, az *1* és *2* térfogatelem térfogata megegyezik, tehát $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$.




Erre a térfogatelemre az $1 \Rightarrow 2$ elmozdulás közben hat a nehézségi erő és a keresztmetszeteken fellépő nyomásokból származó felületi erők (a közeget ideálisnak tekintjük, tehát belső súrlódásból származó erőkkel nem számolunk). A térfogatelem sebessége eközben $v_1$-ről $v_2$-re változik.

A helyzeti- és mozgási energia összegének megváltozása a kiválasztott térfogatra ható erők munkájával egyenlő, először tehát ki kell számítanunk az egyes erők munkáját.

Az $A_1$ felületre ható erő $F_1 = p_1 A_1$, ennek munkája a $\Delta s_1$ elmozdulás során

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 A_1 \Delta s_1 = p_1 \Delta V \ .$$

Az $A_2$ felületre ható erő munkája hasonlóan kapható:

$$\Delta W_2 = -F_2 \Delta s_2 = -p_2 A_2 \Delta s_2 = -p_2 \Delta V \ .$$

Az összes munka

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \ .$$

A helyzeti energia megváltozása, miközben a térfogatelem súlypontja $h_1$ magasságból $h_2$ magasságba emelkedik

$$\Delta E_h = \rho \Delta V g\,( h_2 - h_1 ) \ .$$

Ha az áramcső eléggé vékony, akkor a sebesség egy keresztmetszet minden pontján azonosnak tekinthető, így a mozgási energia megváltozása

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left( v_2^2 - v_1^2 \right).$$

A teljes energiaváltozás

$$\Delta E = \Delta E_h + \Delta E_m = \rho g \Delta V\,( h_2 - h_1 ) + \frac{1}{2} \rho \Delta V \left( v_2^2 - v_1^2 \right)$$

A munkavégzés és az energiaváltozás között fennálló

$$\Delta W = \Delta E$$

összefüggésből az következik, hogy

[1] Daniel BERNOULLI (1700-1782) svájci matematikus és fizikus

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Az egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy egy vékony áramlási cső tetszőleges két keresztmetszetére érvényes, hogy

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 .$$

Ez azt jelenti, hogy vékony áramlási cső mentén

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \acute{a}lland\acute{o} .$$

Ez a *Bernoulli-egyenlet*, ami *összenyomhatatlan* közeg *súrlódásmentes*, *időben állandó* áramlására érvényes. Mivel feltételeztük, hogy a közeg jellemzői azonosak egy keresztmetszet minden pontján, az egyenlet szigorúan véve végtelenül vékony áramcső-, vagyis egy *áramvonal mentén* érvényes.
A Bernoulli-egyenlet – nem túl nagy áramlási sebességeknél – merev falú csőben történő áramlásnál is alkalmazható, és a

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

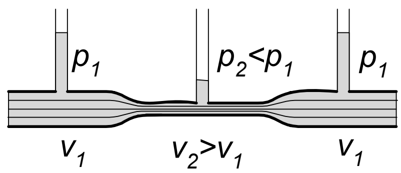
kontinuitási törvénnyel együtt alkalmas a sebesség és a nyomás kiszámítására ismert geometriájú cső tetszőleges helyén, ha a sebességet és a nyomást ismerjük egy helyen.

A közegben fennálló $p$ nyomás és a $v$ áramlási sebesség közötti kapcsolat különösen jól látszik, ha vízszintes csőben történő áramlást vizsgálunk. Ekkor ugyanis $h_1 = h_2$, tehát az egyenlet a

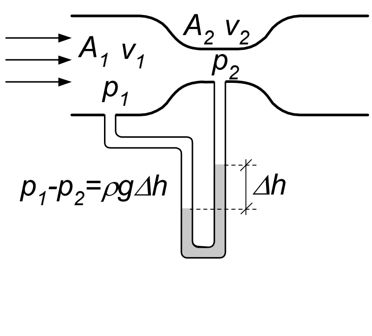
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

alakban érvényes. Az összefüggésből látszik, hogy ha $v_2 > v_1$, akkor $p_2 < p_1$, vagyis a nagyobb sebességű helyeken a közegben kisebb a nyomás. Ezt egyszerű kísérlettel igazolhatjuk.

**KÍSÉRLET:**
Egy változó keresztmetszetű, vízszintes csőben folyadékot áramoltatunk. A cső különböző helyeihez függőleges csöveket csatlakoztatunk, amelyekben a folyadékszint magassága (hidrosztatikai nyomása) méri a folyadékban uralkodó nyomást. A nyomás a keskenyebb csőszakaszokon kisebb, mint a szélesebb részeken.




A jelenség a kontinuitási egyenlet és a Bernoulli-egyenlet segítségével magyarázható. A kontinuitási egyenlet szerint a keskenyebb csőszakaszon nagyobb a sebesség ($v_2 > v_1$), a Bernoulli-egyenlet szerint pedig a nagyobb sebességű helyeken kisebb a nyomás ($p_2 < p_1$).
Az a tény, hogy az áramlás nagyobb sebességű részein a környezethez képest lecsökken a nyomás, számos gyakorlati szempontból is fontos jelenség kiváltó oka lehet (pl. szél által letépett tető, egymás mellett haladó járművek között fellépő vonzó hatás, vízlégszivattyú működése).
A sebesség és nyomás közötti kapcsolat felhasználható arra, hogy az áramlási sebesség mérését nyomásmérésre vezessük vissza. Az egyik ilyen eszköz (Venturi-cső) vázlata az ábrán látható. A speciálisan kialakított csövet az áramlás útjába



helyezik és megmérik a cső két különböző keresztmetszetű részében kialakult $p_1 - p_2$ nyomáskülönbséget. Ebből a keresztmetszetek ismeterében, a kontinuitási- és Bernoulli-egyenlet segítségével a $v_1$ áramlási sebesség megkapható.

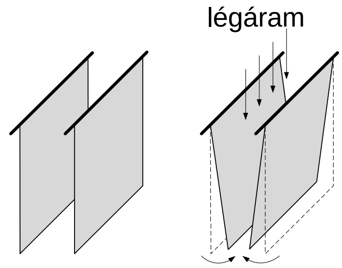
A nagy sebességű helyeken bekövetkező nyomáscsökkenés egyszerű kísérletekkel demonstrálható, amelyek néha eléggé meglepő eredményeket produkálnak.

**KÍSÉRLETEK:**
Egy tölcsér szélesebb vége elé tett gyertya lángja nem az áramlás irányába-, hanem a tölcsér felé hajlik.
A tölcsér szélesebb végébe tett pingpong labdát a másik végébe erősen belefújva nem tudjuk kifújni a tölcsérből.

A magyarázat az, hogy a tölcsér falánál áramló levegőben kisebb a nyomás, mint a környező levegőben, így a környező levegő a lángot is és a pingpong labdát is a tölcsér felé nyomja.

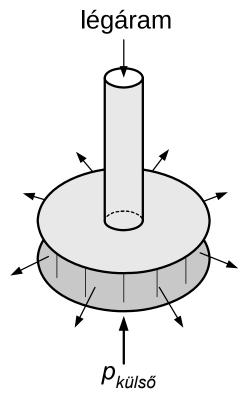
Hasonló eredményre jutunk az alábbi kísérletnél is, de az áramlási viszonyok itt áttekinthetőbbek.

**KÍSÉRLET:**
Két könnyű sík lapot vízszintes tengelyekre függesztünk fel, amelyek körül szabadon lenghetnek. A lapokat egymáshoz közel helyezzük el, és a lapok közé felülről erősen befújunk. Ekkor a lapok – a várakozással ellentétben – nem távolodnak egymástól, hanem egymás felé lendülnek (ábra).




Ennél is meglepőbb az a kísérlet, amit aerodinamikai paradoxonként tartanak számon.

**KÍSÉRLET:**
Az ábrán látható eszköz felső része egy függőleges cső és egy vele egybeépített, középen lyukas korong. Az alsó rész a felső koronggal azonos méretű, vele párhuzamos, de hozzá nem rögzített korong (nem lyukas), amely vékony vezető rudakon függőleges irányban szabadon elmozdulhat. Ha a csőbe erősen belefújunk, akkor a levegő a csövön át a két korong közötti térbe jut és a korongok között áramlik ki. A befújáskor az alsó korong gyorsan elmozdul *felfelé*, és szinte hozzátapad a felső koronghoz. Ha a fújást abbahagyjuk, az alsó korong leesik az eredeti helyzetébe.




A két utóbbi kísérlet eredményének magyarázata is az, hogy a légáramlás helyén a nyomás lecsökken, és a mozgatható lapokat a környező levegő nagyobb nyomása a kisebb nyomású hely, tehát a légáramlat helye felé nyomja.