Matek III. – 3. gyak

Kovács Emese – Prepelicza Zsolt órája alapján

2004.11.23.

1. Parciális integrálás

1.1. A parciális integrálás szabálya

$$\int u' \cdot v = u \cdot v \int u \cdot v'$$

u' legyen exponenciális, hiperbolikus, trigonometrikus függvény, mert azt könnyű integrálni (így kapjuk meg u-t).

v legyen hatványfüggvény, a deriválás során így csökken a hatvány, könnyebb vele számolni.

1.2. Házi feladat

$$\int \ln x \, dx = ?$$

Határozzuk meg u'-t és v-t.

$u' = 1$

$v = \ln x$

$u = x$

$v' = \frac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
\int \ln x \, dx &= \int \ln x \cdot 1 \, dx && (1) \\
&= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx && (2) \\
&= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx && (3) \\
&= x \cdot \ln x - x + c && (4)
\end{aligned}
$$

1.3. Példa

$$\int 4x \cdot \cos 4x \, dx = ?$$

Határozzuk meg u'-t és v-t.

$u' = \cos 4x$

$v = 4x$

$u = -\frac{\sin 4x}{4}$

$v' = 4$

$$
\begin{aligned}
\int 4x \cdot \cos 4x \, dx &= \frac{\sin 4x}{4} \cdot 4x - \int \frac{\sin 4x}{4} \cdot 4 && (5) \\
&= x \cdot \sin 4x - \int \sin 4x && (6) \\
&= x \cdot \sin 4x + \frac{\cos 4x}{4} + c && (7)
\end{aligned}
$$

1.4. Példa

$$\int x^2 \cdot e^{4x} \, dx = ?$$

Határozzuk meg u'-t és v-t.

$u' = e^{4x}$

$v = x^2$

$u = \frac{e^{4x}}{4}$

$v' = 2x$

$$\int x^2 \cdot e^{4x}\,dx = \frac{e^{4x}}{4} \cdot x^2 - \int \frac{e^{4x}}{4} \cdot 2x\,dx \tag{8}$$
$$\int x^2 \cdot e^{4x}\,dx = \frac{e^{4x}}{4} \cdot x^2 - \int \frac{e^{4x}}{2} \cdot x\,dx \tag{9}$$
$$\int x^2 \cdot e^{4x}\,dx = \frac{e^{4x}}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x\,dx \tag{10}$$

Az integrálban lévő tagra újra alkalmazzuk a szabályt:

$$\frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x\,dx$$

Határozzuk meg u_1'-et és v_1-et.

$u_1' = e^{4x}$

$v_1 = x$

$u_1 = \frac{e^{4x}}{4}$

$v_1' = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x\,dx &= \frac{1}{2}(\frac{e^{4x}}{4} \cdot x - \int \frac{e^{4x}}{4} \cdot 1\,dx) && (11)\\
&= \frac{1}{2}(\frac{e^{4x}}{4} \cdot x - \frac{1}{4}\int e^{4x}\,dx) && (12)\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(e^{4x} \cdot x - \int e^{4x}\,dx) && (13)\\
&= \frac{1}{8}(x \cdot e^{4x} - \int e^{4x}\,dx) && (14)\\
&= \frac{1}{8}(x \cdot e^{4x} - \frac{e^{4x}}{4}) + c && (15)\\
&= \frac{1}{8} \cdot e^{4x}(x - \frac{1}{4}) + c && (16)
\end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve (10)-be:

$$\int x^2 \cdot e^{4x}\, dx = \frac{e^{4x}}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{8} \cdot e^{4x}(x - \frac{1}{4}) + c \tag{17}$$

$$= \frac{e^{4x}}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{8} \cdot e^{4x} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot e^{4x}\frac{1}{4} + c \tag{18}$$

$$= \frac{e^{4x}}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{8} \cdot e^{4x} \cdot x + \frac{1}{32} \cdot e^{4x} + c \tag{19}$$

1.5. Példa 3.

$$\int 3x^2 \cdot \sin 5x\, dx = ?$$

Határozzuk meg u'-t és v-t.

$u' = \sin 5x$

$v = 3x^2$

$u = -\frac{\cos 5x}{5}$

$v' = 6x$

$$\int 3x^2 \cdot \sin 5x\, dx = -\frac{\cos 5x}{5} \cdot 3x^2 - \int -\frac{\cos 5x}{5} \cdot 6x\, dx \tag{20}$$

$$= -\frac{\cos 5x}{5} \cdot 3x^2 + \frac{6}{5} \int \cos 5x \cdot x\, dx \tag{21}$$

Az integrálban lévő tagra újra alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát:

$$\int \cos 5x \cdot x\, dx$$

Határozzuk meg u_1'-et és v_1-et.

$u_1' = \cos 5x$

$v_1 = x$

$u_1 = \frac{\sin 5x}{5}$

$v_1' = 1$

$$\int \cos 5x \cdot x\,dx = \frac{\sin 5x}{5} \cdot x - \int \frac{\sin 5x}{5} \cdot 1\,dx \tag{22}$$

$$= \frac{\sin 5x}{5} \cdot x - \frac{1}{5} \int \sin 5x\,dx \tag{23}$$

$$= \frac{\sin 5x}{5} \cdot x - \frac{1}{5}(-\frac{\cos 5x}{5}) + c \tag{24}$$

$$= \frac{\sin 5x}{5} \cdot x + \frac{1}{25} \cdot \cos 5x + c \tag{25}$$

Ezt visszahelyettesítve (21)-be:

$$\int 3x^2 \cdot \sin 5x\,dx = -\frac{\cos 5x}{5} \cdot 3x^2 + \frac{6}{5} \int \cos 5x \cdot x\,dx \tag{26}$$

$$= -\frac{\cos 5x}{5} \cdot 3x^2 + \frac{6}{5} \cdot (\frac{\sin 5x}{5} \cdot x + \frac{1}{25} \cdot \cos 5x) + c \tag{27}$$

$$= -\frac{\cos 5x \cdot 3x^2 \cdot 25}{5 \cdot 25} + \frac{6}{5} \cdot \frac{\sin 5x}{5} \cdot x + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{25} \cdot \cos 5x + c \tag{28}$$

$$= -\frac{\cos 5x \cdot 3x^2 \cdot 25}{5 \cdot 25} + \frac{5 \cdot 6 \cdot \sin 5x}{5 \cdot 25} \cdot x + \frac{6 \cdot \cos 5x}{5 \cdot 25} + c \tag{29}$$

$$= -\frac{75x^2 \cdot \cos 5x}{125} + \frac{30x \cdot \sin 5x}{125} + \frac{6 \cdot \cos 5x}{125} + c \tag{30}$$

$$= -\frac{75x^2 \cdot \cos 5x + 30x \cdot \sin 5x + 6 \cdot \cos 5x}{125} + c \tag{31}$$

2. Forgástest térfogata

2.1. Forgatás az x tengely körül

Legyen $f(x)$ egy függvény.

r legyen a kör sugara az x-nél. Ez azt jelenti, hogy:

$$r = f(x)$$

A keresztmetszet területe x-ben:

$$T = r^2\pi$$

A függvénnyel kifejezve:

$$T = f^2(x)\pi$$

A térfogat x_1 és x_2 között (x tengelyen forgatjuk a függvényt) az elemi térfogatok összege (integrál):

$$V_x = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x)\,dx$$

2.2. Forgatás az y tengely körül

Legyen $f(x)$ egy függvény.

$$y = f(x)$$

Invertáljuk az f(x) függvényt (x-re rendezzük)

$$x = f^{-1}(y)$$

Ekkor:

$$V_y = \int_{y_1}^{y_2} \pi [f^{-1}(y)]^2 \, dy$$

(itt f^{-1} f inverz függvényét jelöli, nem hatvány! Az inverz függvényt kell a négyzetre emelni!)

Tételek

$$V_x = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) \, dx$$

$$V_y = \int_{y_1}^{y_2} \pi [f^{-1}(y)]^2 \, dy$$

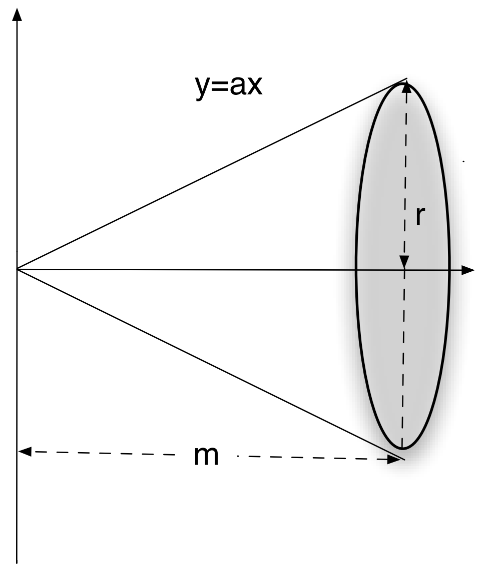
2.3. Példák inverz függvényekre

$$f(x) = y = x^2$$

Kifejezzük x-et:

$$x = \sqrt{y} = f(y)$$

2.4. Kúp térfogata



Az egyenes általános egyenlete:

$$y = ax + b$$

Az egyenesünk átmegy az origón, tehát $b = 0$.

Az egyenes megedeksége: $\tan \alpha$.

A trigonometriai összefüggések alapján:

$$\tan \alpha = \frac{r}{m} = a$$

Az egyenes egyenlete tehát:

$$y = ax = \frac{r}{m} x$$

A térfogat kiszámításához alkalmazzuk a képletet:

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx = \pi \int_0^m \left(\frac{r}{m} \cdot x\right)^2 dx \tag{32}$$

$$= \pi \int_0^m \frac{r^2}{m^2} \cdot x^2\,dx \tag{33}$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{m^2} \int_0^m x^2\,dx \tag{34}$$

$$= \frac{\pi \cdot r^2}{m^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m \tag{35}$$

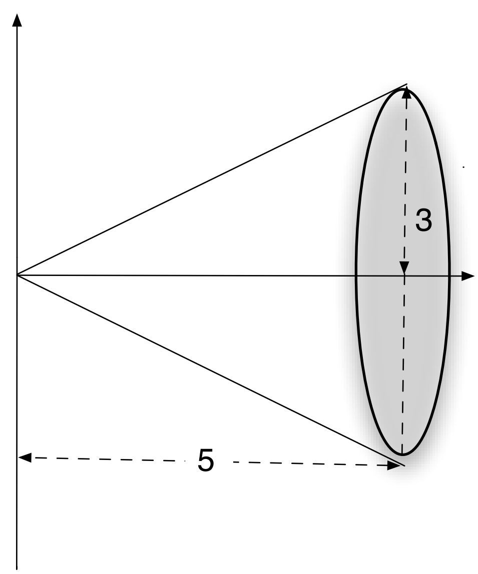
$$= \frac{\pi \cdot r^2}{m^2} \left(\frac{m^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) \tag{36}$$

$$= \frac{\pi \cdot r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} \tag{37}$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{m}{3} \tag{38}$$

$$= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot m}{3} \tag{39}$$

2.5. Konkrét példa forgáskúpra



$$y = ax + b$$

Az egyenesünk átmegy az origón, tehát $b = 0$.

Az egyenes megedeksége: $\tan \alpha$.

A trigonometriai összefüggések alapján:

$$\tan\alpha = \frac{r}{m} = a = \frac{3}{5}$$

Az egyenes egyenlete tehát:

$$y = ax = \frac{3}{5}x$$

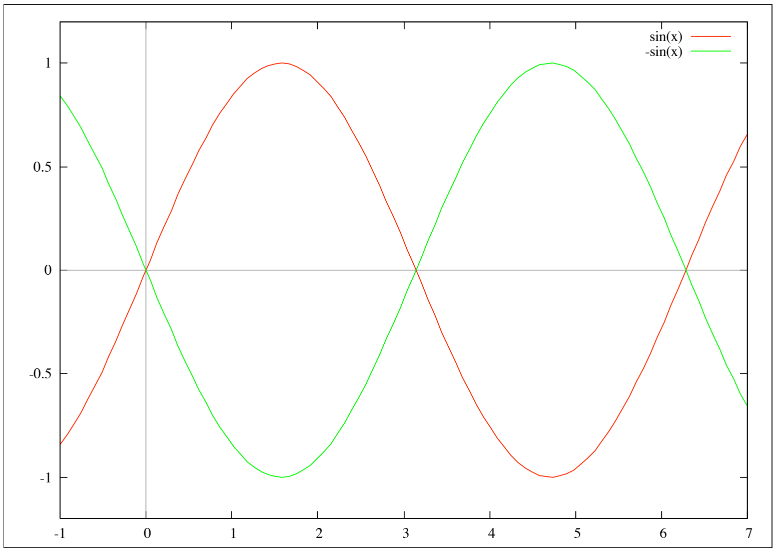
A térfogat kiszámításához alkalmazzuk a képletet:

$$\begin{aligned}
V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx &= \pi \int_0^5 \left(\frac{3}{5}\cdot x\right)^2 dx && (40)\\
&= \pi \int_0^5 \frac{3^2}{5^2}\cdot x^2\,dx && (41)\\
&= \pi \cdot \frac{3^2}{5^2} \int_0^5 x^2\,dx && (42)\\
&= \frac{\pi\cdot 3^2}{5^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 && (43)\\
&= \frac{\pi\cdot 3^2}{5^2}\left(\frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) && (44)\\
&= \frac{\pi\cdot 3^2}{5^2}\cdot\frac{5^3}{3} && (45)\\
&= \pi\cdot 3^2\cdot\frac{5}{3} && (46)\\
&= \frac{\pi\cdot 3^2\cdot 5}{3} && (47)\\
&= \pi\cdot 3\cdot 5 = 15\pi && (48)
\end{aligned}$$

3. Forgassuk meg a $\sin x$ függvényt!

... és számítsuk ki a kapott test térfogatát.

$$y = \sin x \quad [0;\pi]$$



$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx \tag{49}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{50}$$

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \tag{51}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2x\,dx \tag{52}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} \tag{53}$$

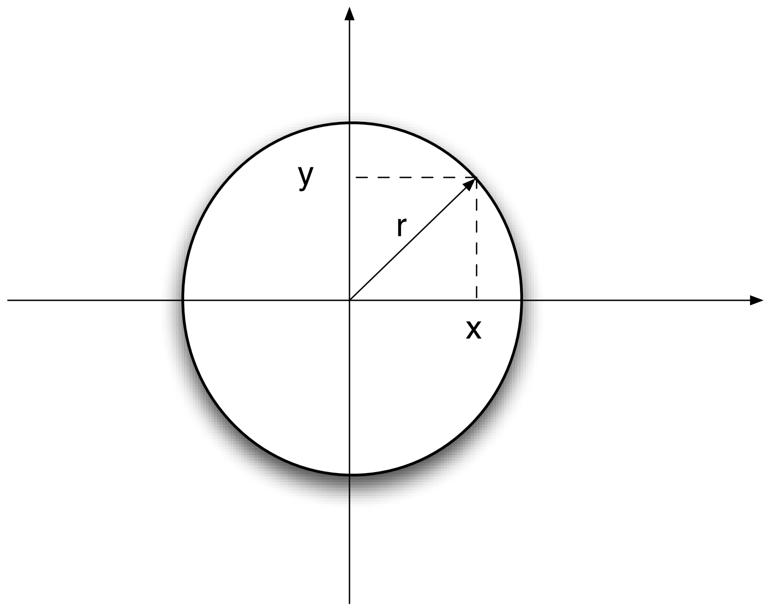
$$= \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right) \tag{54}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \frac{\sin 2\pi}{2} \tag{55}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \quad [mert \sin 2\pi = \sin 0 = 0] \tag{56}$$

3.1. Gömb térfogata

3.1.1. Ellenőrizzük a függvénytáblázatból ismert képletet



$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad r = konst.$$

A Pitagorasz tétel alapján:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ebből y-t kifejezve:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

A felső félkörhöz a pozitív gyököt vesszük:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

A térfogat számítás tétele:

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx$$

Behelyettesítve $-r$ és r között:

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx && (57)\\
&= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx && (58)\\
&= \pi \Big[r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-r}^{r} && (59)\\
&= \pi \Big[r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-r}^{r} && (60)\\
&= \pi \Big[\Big(r^2(r) - \frac{r^3}{3} \Big) - \Big(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \Big) \Big] && (61)\\
&= \pi \Big(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \Big) && (62)\\
&= \pi \Big(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \Big) && (63)\\
V_x &= \pi \frac{4r^3}{3} && (64)
\end{aligned}$$

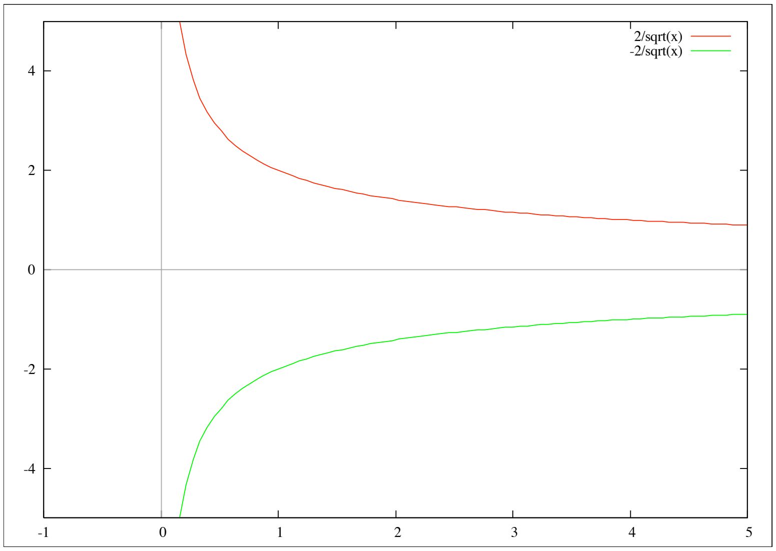
3.1.2. Példa gömb térfogatára

Legyen $r = 4$.

$$y = \sqrt{4^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx && (65)\\
&= \pi \int_{-4}^{4} (\sqrt{4^2 - x^2})^2 \, dx && (66)\\
&= \pi \int_{-4}^{4} 16 - x^2 \, dx && (67)\\
&= \pi \cdot [16x - \frac{x^3}{3}]_{-4}^{4} && (68)\\
&= \pi \cdot [16(4) - \frac{4^3}{3} - (16(-4) - \frac{(-4)^3}{3})] && (69)\\
&= \pi \cdot [64 - \frac{64}{3} - (-64 - \frac{-64}{3})] && (70)\\
&= \pi \cdot [64 - \frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3}] && (71)\\
&= \pi \cdot [128 - \frac{128}{3}] && (72)\\
&= \pi \cdot [\frac{384 - 128}{3}] && (73)\\
V_x &= \pi \cdot [\frac{256}{3}] && (74)\\
& && (75)
\end{aligned}$$

3.2. Hozzunk létre tölcsért: forgassunk hiperbolát!



$$y = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad [1;4]$$

$$V_x = \pi \int_1^4 (\frac{2}{\sqrt{x}})^2 \, dx \tag{76}$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{x} \, dx \tag{77}$$

$$= 4\pi \int_1^4 \frac{1}{x} \, dx \tag{78}$$

$$= 4\pi [\ln x]_1^4 \tag{79}$$

$$= 4\pi [\ln 4 - \ln 1] \tag{80}$$

$$V_x = 4\pi \cdot \ln 4 \tag{81}$$