# Utolsó matek gyak. HF

Kovács Emese

2003. december 1.

## Feladat

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{ha } x \neq 1, \\ A & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Mi kell legyen az A szám értéke ahhoz, hogy megszüntesse a függvény szakadását?

## Megoldás

Vizsgáljuk meg a $\frac{x^3-1}{x-1}$ kifejezést. A függvény nincs értelmezve, ha a nevezőben 0 van, azaz ha:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Az x=1 pontban a függvénynek szakadása van. Ha meg akarjuk szüntetni ezt a szakadást, akkor ki kell számolnunk a kifejezés határértékét. Ha van határértéke, akkor az megszünteti a szakadást.

Tehát a $\frac{x^3-1}{x-1}$ kifejezését határértékét, amikor x tart 1 felé, vagyis:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = ? \tag{1}$$

A $\frac{x^3-1}{x-1}$ kifejezést át kell alakítani, egyszerűsíteni kell, egészen addig, amíg a nevező értéke már nem nulla x=1 -nél.

Az átalakításhoz a következő nevezetes azonosságot használjuk fel:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{2}$$

Ha a=x és b=1, akkor a fenti kifejezés így néz ki:

$$\begin{align}
(x-1)^3 &= x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 \tag{3}\\
&= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \tag{4}\\
(x-1)^3 &= x^3 - 1 - 3x^2 + 3x \tag{5}
\end{align}$$

Az (5) sorban felismerhetjük az eredeti (1) egyenlet számlálóját. Pontosabban az (5) kifejezés kicsit több, mint az (1) számlálója, pontosan $-3x^2 + 3x$ -el tér el a két kifejezés.

A cél, hogy $(x-1)^3$ kerüljön a számlálóba. Ezt úgy érjük el, hogy (1) -ben $x^3 - 1$ helyére behelyettesítjük $(x-1)^3$ kibontott alakját (5) és (hogy a kifejezés értéke ne változzon) levonjuk a felesleget.

$$\begin{align}
\frac{x^3-1}{x-1} &= \frac{x^3 - 1 - 3x^2 + 3x + 3x^2 - 3x}{x-1} \tag{6}\\
&= \frac{(x-1)^3 + 3x^2 - 3x}{x-1} && \text{Az (5) egyenlet felhasználásával} \tag{7}\\
&= \frac{(x-1)^3 + 3x(x-1)}{x-1} && \text{kiemelünk } 3x\text{-et} \tag{8}\\
&= \frac{(x-1)[(x-1)^2 + 3x]}{x-1} && \text{kiemelünk } (x-1)\text{-et} \tag{9}\\
&= (x-1)^2 + 3x && \text{egyszerűsítünk } (x-1)\text{-el} \tag{10}
\end{align}$$

Tehát:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} (x-1)^2 + 3x \\
&= \lim_{x\to 1} (x-1)^2 + \lim_{x\to 1} (3x) && \text{az összeg határértéke a határértékek összege}\\
&= 0 + 3 && x = 1 \text{ behelyettesítve}\\
&= 3
\end{aligned}$$

Az $f(x)$ kifejezés határértéke, ha $x$ tart 1-hez 3. Ha tehát meg akarjuk szüntetni az $\frac{x^3-1}{x-1}$ függvény szakadását 1-ben, akkor A-t 3-mal kell egyenlővé tenni. Vagyis f(x) helyesen:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{ha } x \neq 1, \\ 3 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

### Grafikon