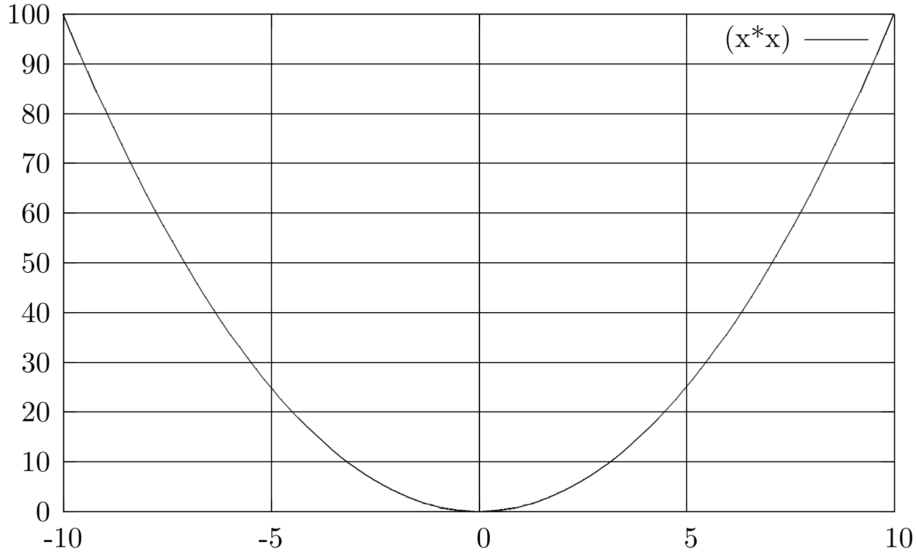
Matematika - 3. előadás

Dr. Fejős Csaba előadása alapján - Kovács Emese

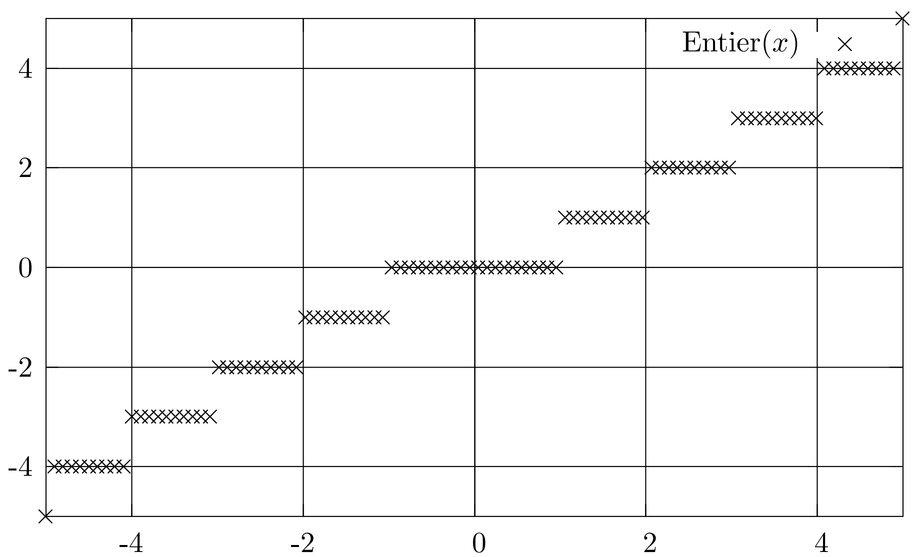
2003. november 28.

Tartalomjegyzék

1. Függvények határértéke



Ahogyan x közeledik x_0-hoz, $f(x)$ tart $f(x_0)$-hoz.



$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$$

Az $x = 2$ pontban vett jobb- és baloldali határéerték eltér.
$f(x_0)$ jobbról 2, $f(x_0)$ balról 1.

1. ábra. Egy pontban szakadt függvény

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A$$

A határérték x_0-ban jobbról és balról is ugyanaz az A szám. x_0 nincs benne $f(x)$ értelmezési tartományában.

Definíció: Minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan δ szám, amellyel, ha $x \in [x_0; x_0 + \delta]$ akkor$f(x) \in [A; A + \epsilon]$.
Ha ez teljesül, akkor azt mondhatjuk, hogy az A szám az $f(x)$ függvény jobboldali határértéke.

Definíció: $\forall$ ϵ -hoz $\exists$ olyan δ, hogy $x \in [x_0 - \delta; x_0]$ akkor $f(x) \in [A - \epsilon; A]$.
Ha ez teljesül, akkor azt mondhatjuk, hogy az A szám az $f(x)$ függvény baloldali határértéke.

Definíció: Ha egy függvénynek létezik jobb- és baloldali határértéke és a kettő megegyezik, akkor a függvénynek van határértéke.

Definíció: Ha egy függvénynek van határértéke az x_0 pontban, van helyettesítési értéke az x_0 pontban és a kettő megegyezik egymással, akkor x_0 pontban a függvény lokálisan folytonos.

Definíció: Ha egy $y = f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonos, akkor az $[a, b]$ intervallumon folytonos.

Első fajú szakadás: csak egy pontban marad ki a függvény, de van határértéke — azaz van jobb, bal és a kettő megegyezik.

Másodfajú szakadás (nem megszüntethető): a jobb és baloldali határértékek eltérnek, tehát a függvénynek nincs határértéke a szakadási pontban.

Cauchy féle konvergencia.

2. Véges helyen vett véges határérték

2.1. Példa

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - 25}{x - 5} \text{ [számláló szorzattá alakítása]} \\
f(x) &= \frac{(x+5)(x-5)}{x - 5} \text{ [egyszerűsítés } (x-5)\text{-tel]} \\
f(x) &= x + 5
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 5}(\frac{x^2-25}{x-5}) = 10$$

A függvényt a valós számok halmazán két egyenlet írja le:

$$y = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{ha } x \neq 5 \\ 10 & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

3. A $sin(x)/x$ kifejezés nevezetes határértéke

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} =?$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Csendőr szabály:
Ha egy függvényt két függvény körülvesz, és a két függvény ugyanoda tart, akkor a közrefogott függvény is oda tart.

Tétel:

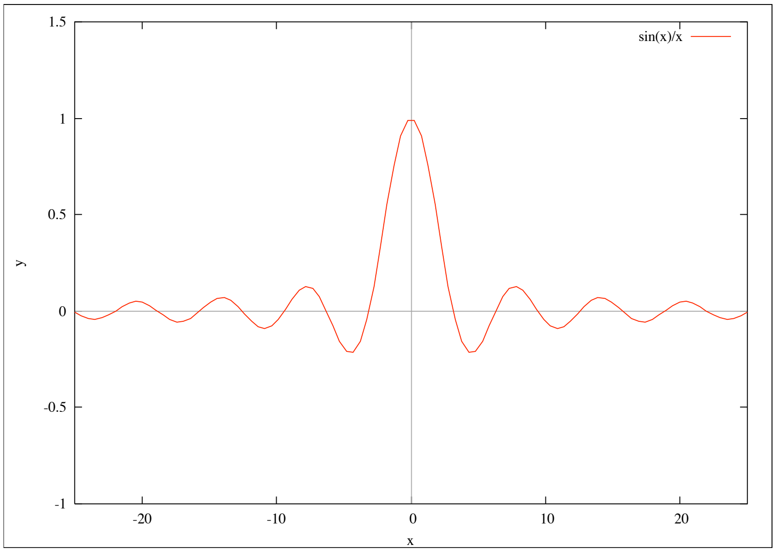
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

3.1. Példák

1. példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x} =?$$

$$\frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{2} = 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$



2. ábra. $\sin x/x$ grafikonja

2. példa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = ?$$

A határértékben lévő kifejezést át kell alakítani úgy, hogy $\sin x/x$ alakú tagja is legyen.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2x}{\sin 5x} &= \sin 2x \cdot \frac{2x}{2x} \cdot \frac{5x}{5x} \cdot \frac{1}{\sin 5x} && (1)\\
&= \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2x}{5x} && (2)\\
&= \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \cdot \frac{2x}{5x} && (3)\\
&= \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}} \cdot \frac{2}{5} && (4)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 1$$

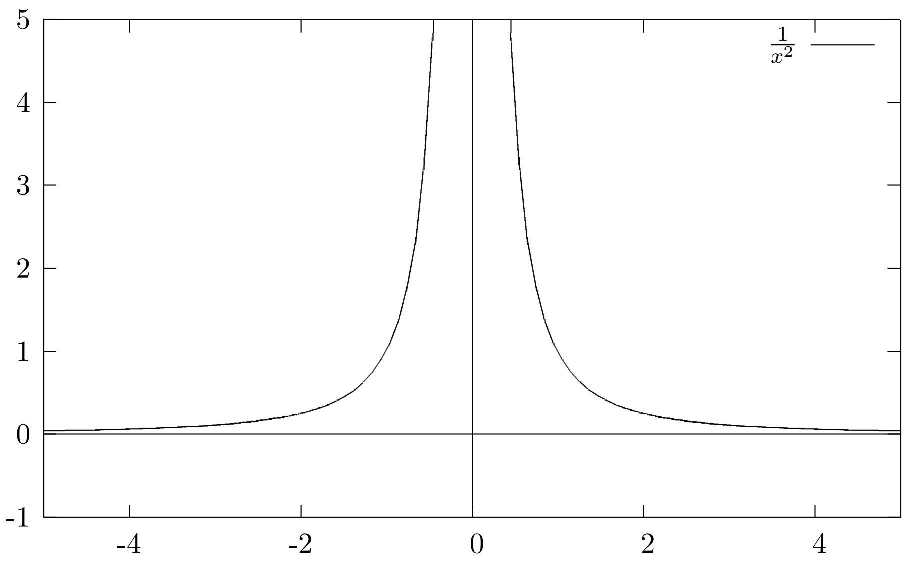
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Tehát:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} &= 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{5} && (5)\\
&= \frac{2}{5} && (6)
\end{aligned}$$

4. Véges helyen vett végtelen határérték

Példa: $y = \frac{1}{x^2}$ ha $x \to 0$



Tétel:

Legyen:

$$x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$$

Akkor:

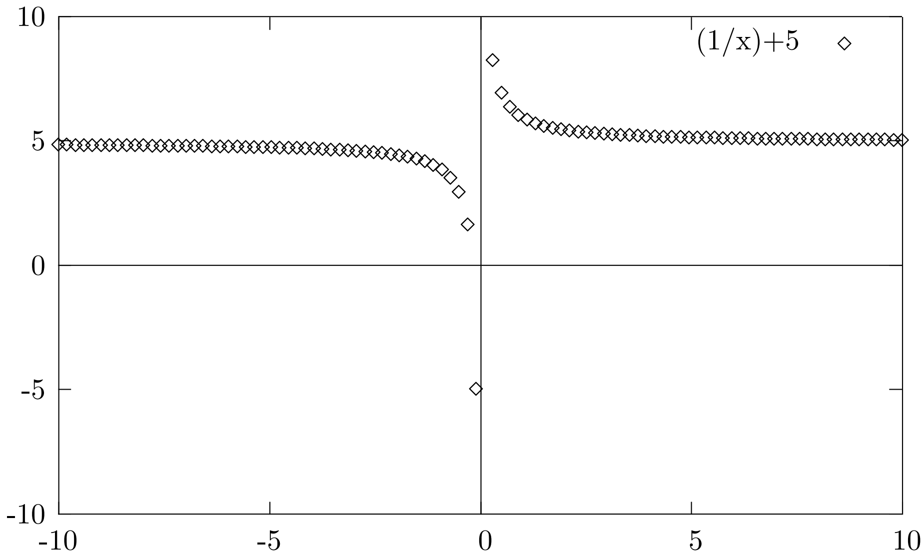
$$\exists k, \text{ hogy } f(x) > k$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

5. Végtelen helyen vett véges határérték

Példa: $y = \frac{1}{x} + 5$ ha $x \to +\infty$



Legyen: $f(x) \in [A; A+\epsilon]$

Akkor: $x > k$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 5) = 5$$

6. Additív szabályok a függvények határértékeire

Legyen:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

Akkor:

Tétel 1:
A két függvény összegének határértéke, a határértékek összege.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = A + B$$

Tétel 2:
A két függvény különbségének határértéke, a határértékek különbsége.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = A - B$$

Tétel 3:
A két függvény szorzatának határértéke, a határértékek szorzata.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$$

Tétel 4:
A két függvény hányadosának határértéke a határértékek hányadosa. ($g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Tétel 5:
Egy függvény konstansszorosának határértéke a konstans és a függvény határértékének szorzata. Legyen $C \in \Re$, akkor:

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot A$$

6.1. Példa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - 6}{3x^2 + 1} =?$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 6}{3x^2 + 1} &= \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} &= \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$