# Matematika - 2. előadás

Dr. Fejős Csaba előadása alapján - Kovács Emese

2003. november 29.

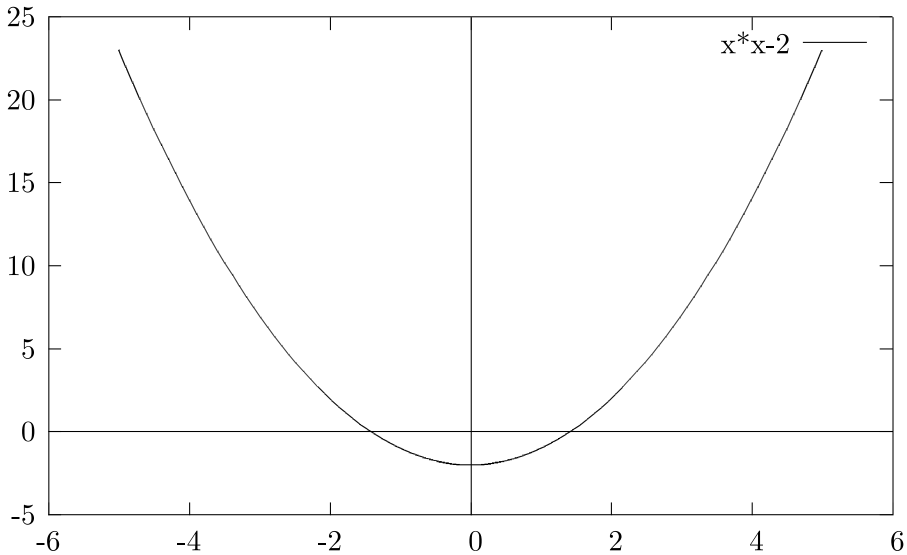
# Tartalomjegyzék

# 1. Függvények

## 1.1. A függvény definíciója

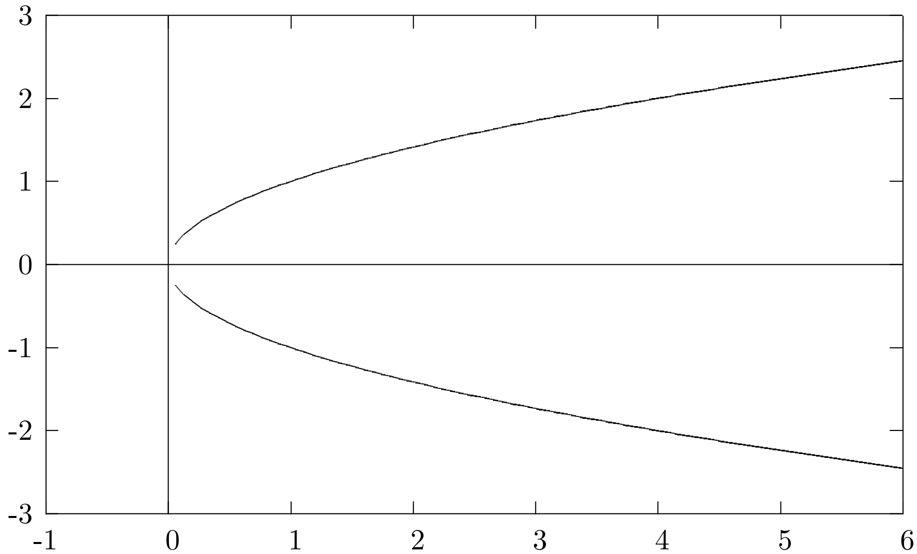
Függvény: két halmaz közötti megfeleltetés.

### 1.1.1. Egyértelmű megfeleltetés




Egy x értékhez csak egy y érték tartozhat. Egy y értékhez több x is tartozhat.

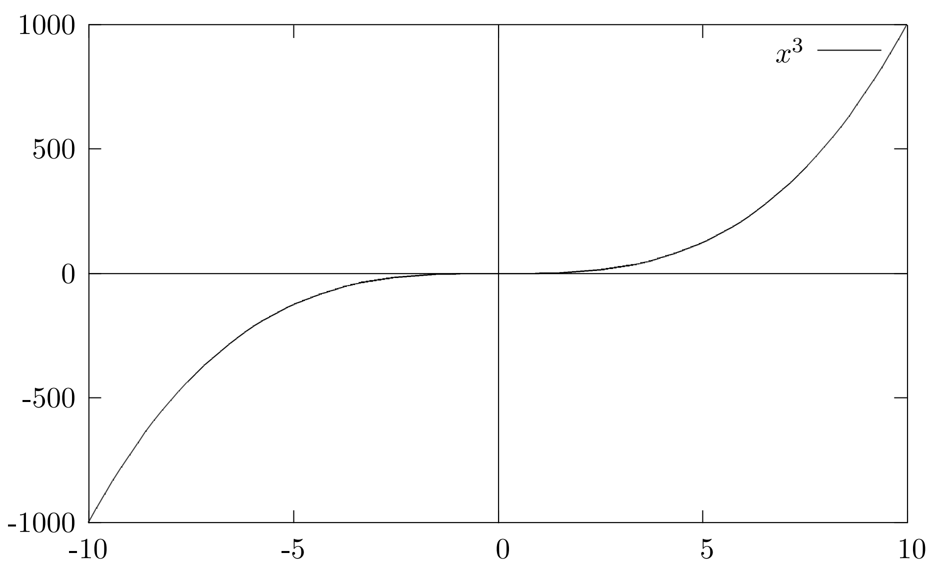
### 1.1.2. Többértelmű leképezés




Egy x értékhez több y érték is tartozik. Az ilyen görbe **nem függvény**.

### 1.1.3. Kölcsönösen egyértelmű

Példa: $y = x^3$




A kölcsönösen egyértelmű leképezésnél egy adott x-hez egy adott y tartozik, és egy adott y-hoz egy adott x. Ilyen függvények a páratlan kitevőjű hatványok ($x^3, x^5, x, x^{-1}, x^{-3}$).

Halmazok számossága:

1. esetben: A halmaz számossága $\geq$ B halmaz számossága.
2. esetben: B halmaz számossága $\geq$ A halmaz számossága.
3. esetben: a halmazok számossága megegyezik.

Definíció: Egyváltozós valós függvénynek nevezzük a valós számokra értelmezett **egyértelmű** és **kölcsönösen egyértelmű** leképezéseket.

Megjegyzés: A többértelmű hozzárendelés **nem függvény**.

Jelen tárgy keretei közt csak függvényekkel foglalkozunk (azaz csak egyértelmű vagy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel).

Jelölések:

$$x \mapsto y (x\text{-hez } y\text{-t rendelünk})$$

$$y = f(x) (y \; x \text{ függvénye})$$

Az $x$-ek halmaza az értelmezési tartomány (ÉT), a függvény grafikonján a vízszintes tengely, balról jobbra nő.

Az $y$-ok halmaza az értékkészlet (ÉK), a függvény grafikonján a függőleges tengely, lentről felfelé nő.

## 1.2. Az elemi függvények

### 1.2.1. Lineáris függvények

Példa: elsőfokú függvények

$y = x$ : a legegyszerűbb függvény.

$y = x^2$ : minden számhoz a kétszeresét rendeli. Írhatjuk így is: $f(x) = 2x$ vagy $x \mapsto 2x$.

A fent említett két függvény értékkészlete és értelmezési tartománya:

$$\text{ÉT} : (-\infty; +\infty)$$

$$\text{ÉK} : (-\infty; +\infty)$$

### 1.2.2. Hatványfüggvények

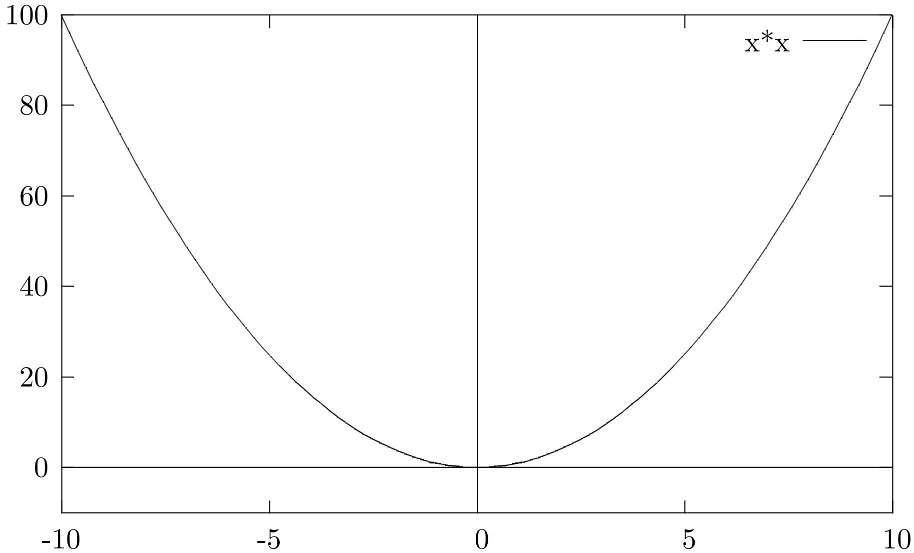
Példa: másodfokú függvények

$y = x^2$: ez a jól ismert $x^2$ függvény. Grafikonja a parabola. A két előző példával ellentétben ez egyértelmű hozzárendelés. Egy adott $y$ értékhez (mondjuk 16) két $x$ érték is tartozik, hiszen $4_2 = 16$ és $(-4)_2 = 16$.

Az $x^2$ értékkészlete és értelmezési tartománya:

$$\text{ÉT} : (-\infty; +\infty)$$

$$\text{ÉK} : [0; +\infty)$$

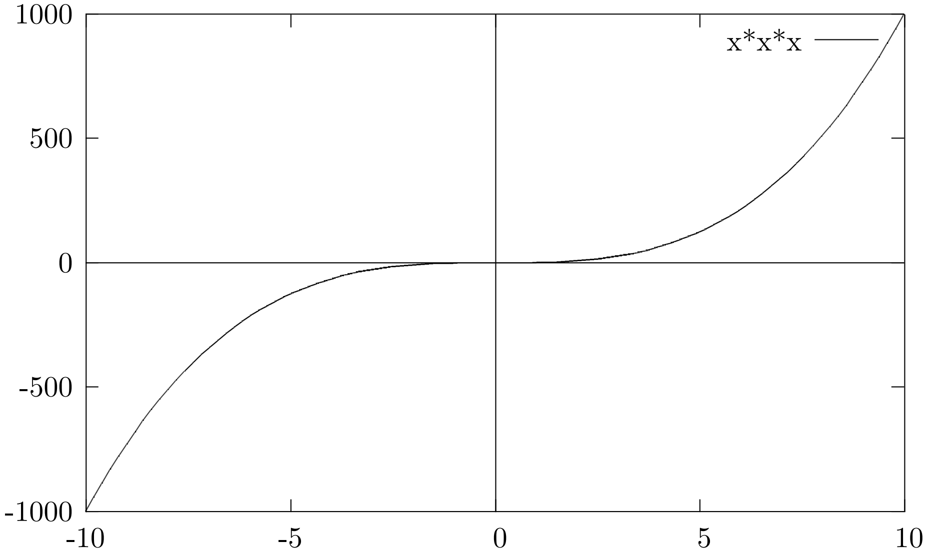



Minden pozitív páros kitevőjű $x^n$ hasonlít, csak meredekségükben térnek el ($n = 2, 4, 6, 8, 10$ stb...).

Ha n páratlan és pozitív ($n = 1, 3, 5, 7$ stb...) a függvény grafikonja $x^3$-re hasonlít. Ezek a függvények kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések.

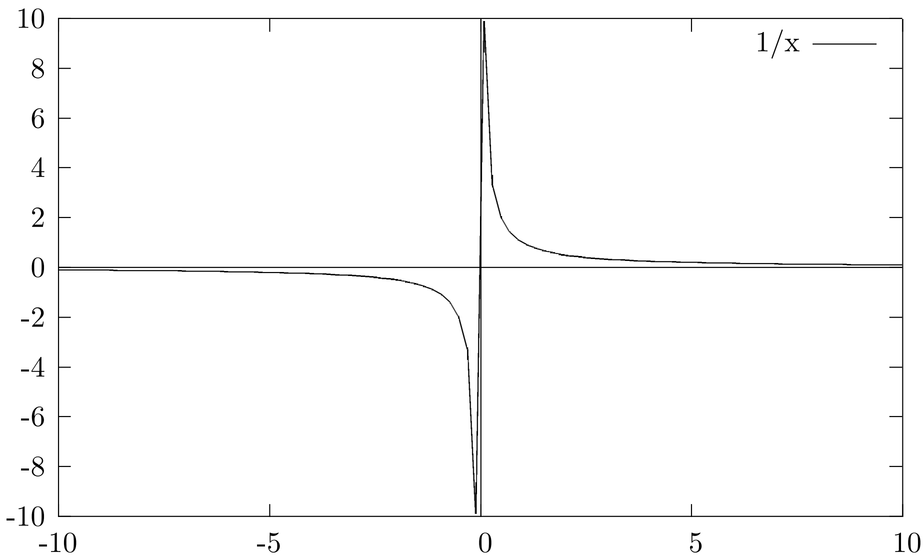
$$\text{ÉT} : (-\infty; +\infty)$$

$$\text{ÉK} : (-\infty; +\infty)$$




Ha a hatványban szereplő kitevő negatív és páratlan:

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

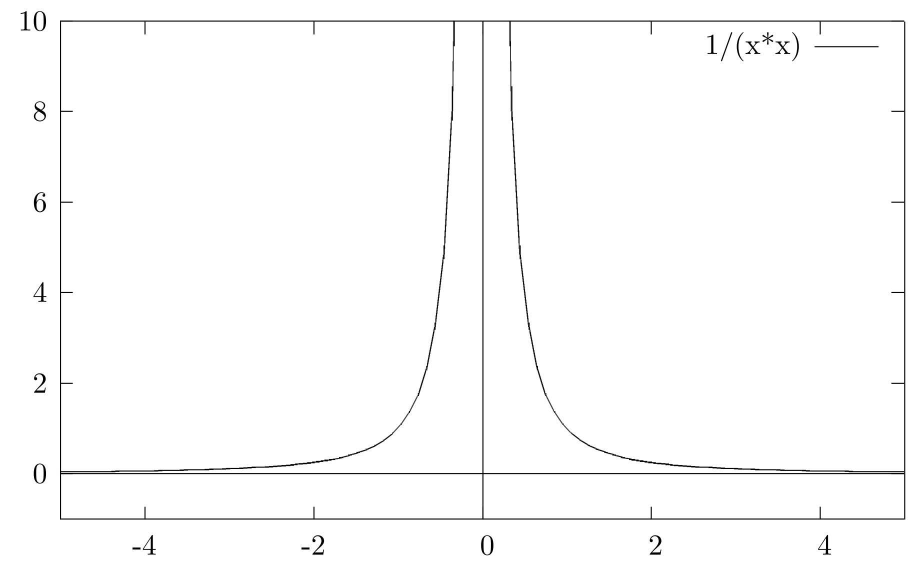



$$\text{ÉT} : (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$\text{ÉK} : (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

Ha a hatványban lévő kitevő páros és negatív:

$$y = x^{-2} = \frac{1}{x}^{2}$$

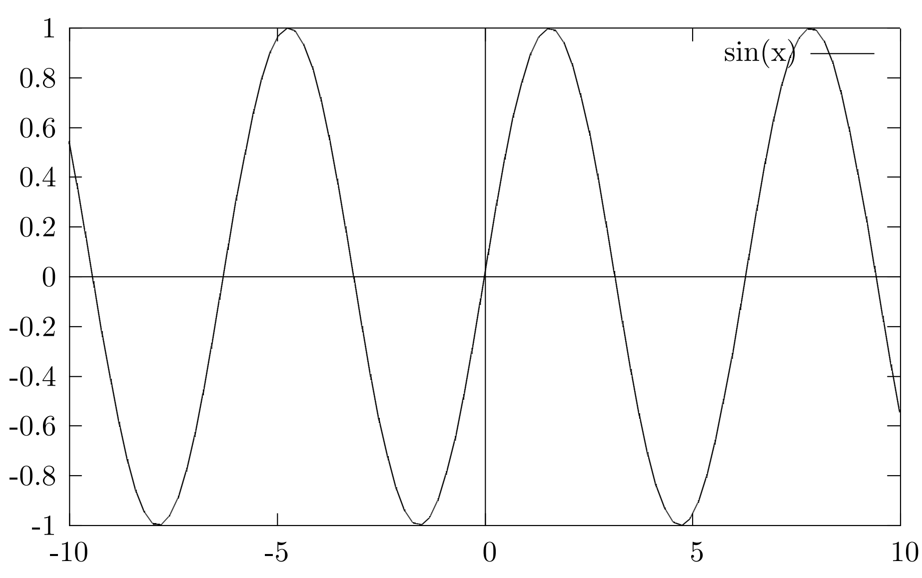



$$\text{ÉT}: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$
$$\text{ÉK}: (0; +\infty)$$

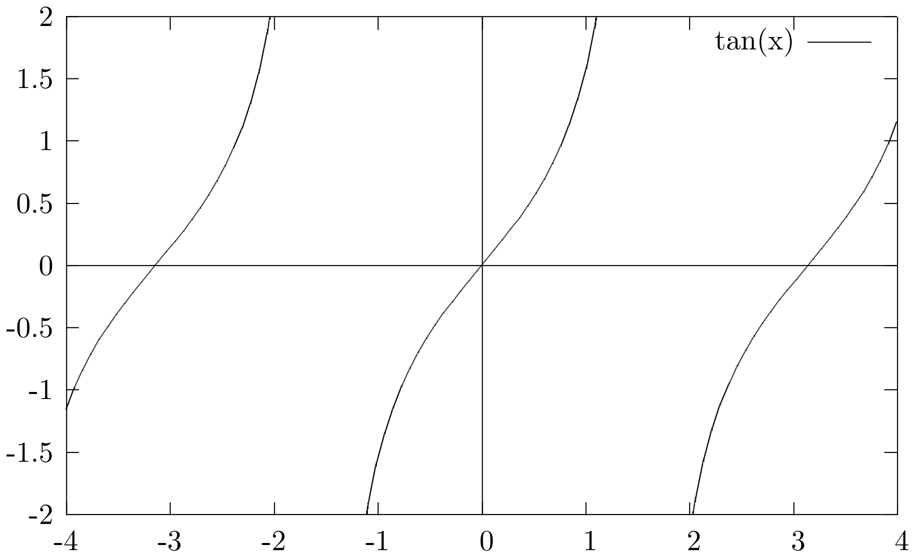
### 1.2.3. Periodikus függvények

Definíció: Legyen $f(x)$ egy valós függvény.
Ha $\exists$ egy olyan $d \in \Re \setminus \{0\}$ szám, hogy $\forall$ $x$ igaz, hogy $f(x+d) = f(x)$, akkor az $f(x)$ függvény periodikus.

Pl.: $\sin(x)$ periódusa $2\pi$




Pl. 2.: $\tan(x)$ periodusa $\pi$




### 1.2.4. Exponenciális függvények

Ezek az $y = a^x$ típusú függvények.

### 1.2.5. Egészrész és törtrész függvények

Ide jön az Entiers(x), másnéven int(x) és a törtrész függvény. Mindkettő nem folytonos.

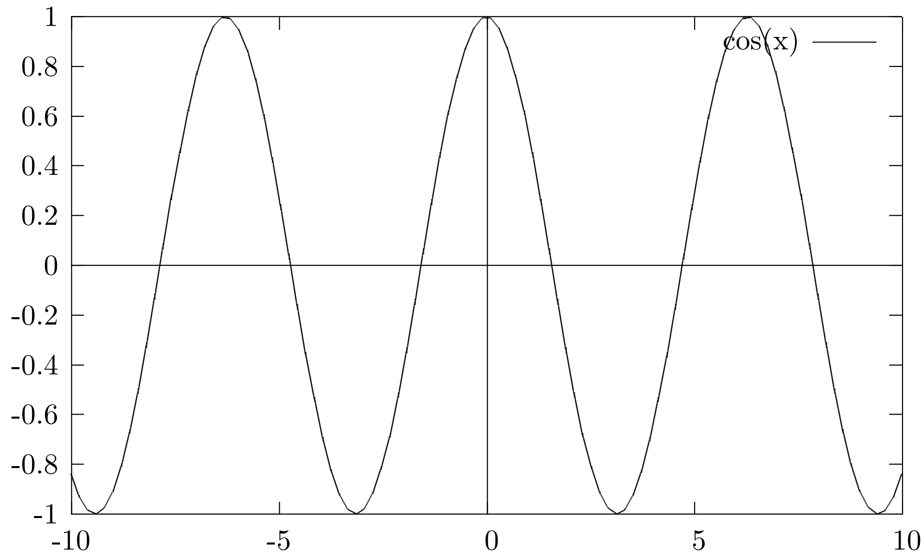
## 2. Függvények paritása

### 2.1. Páros függvények

Definíció: Egy függvény páros, ha $\forall x \in$ ÉT igaz, hogy $f(x) = (-x)$.

Példa:

$$y = \cos(x)$$



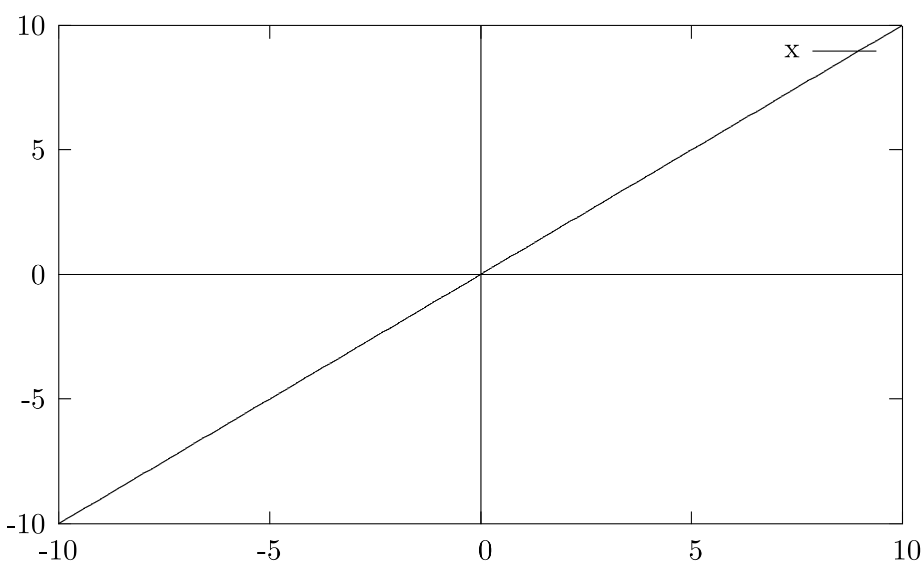

A páros függvényeknek szimmetriatengelye az y tengely.

## 2.2. Páratlan függvények

Definíció: $f(x)$ páratlan, ha $\forall x \in$ ÉT, igaz, hogy $f(x) = -f(-x)$

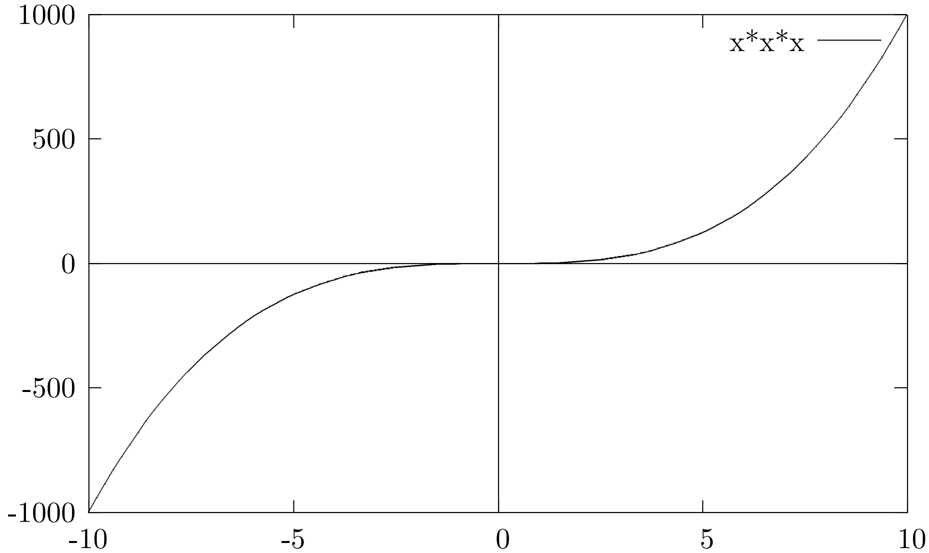
Példa:

$$y = x^1$$




Példa 2.:

$$y = x^3$$




A páratlan függvények a koordinátarendszer origójára szimetrikusak.

Megjegyzés: egy függvény nem feltétlenül páros, vagy páratlan. A függvényvizsgálatoknál érdemes vizsgálni a függvény paritását, hiszen ha bebizonyosodik róla, hogy páros vagy páratlan, nem kell az egész intervallumon vizsgálni, elég csak az egyik felén.

# 3. Függvénytranszformációk

## 3.1. Függvények invertálása

Az invertálás a visszakeresés művelete. Ismerjük y-t, és keressük x-et.

$$\text{Függvény} \rightarrow \text{Inverz függvény} \tag{1}$$

$$x^2 \rightarrow \sqrt{x} \tag{2}$$

$$x^2 \rightarrow \sqrt[3]{x} \tag{3}$$

$$\sin(x) \rightarrow \arcsin(x) \tag{4}$$

$f(x)$ függvény inverze: $x = \phi(y)$ vagy $x = f^{-1}(y)$. Csak kölcsönösen egyértelmű leképezés esetén lehet invertálni.

Mivel az inverz függvény az x és y helyet cserél, az inverz és az eredeti függvény az y=x egyenesre tükörkép. A teljesen invertálható függvényeknél az ÉT és az ÉK helyet cserél. A részlegesen invertálható függvényekre ez nem igaz.

### 3.2. Más függvénytranszformációk: transzláció, periódus és amplitúdó módosítás

## 4. Függvények viselkedése