Matematika - 1. előadás

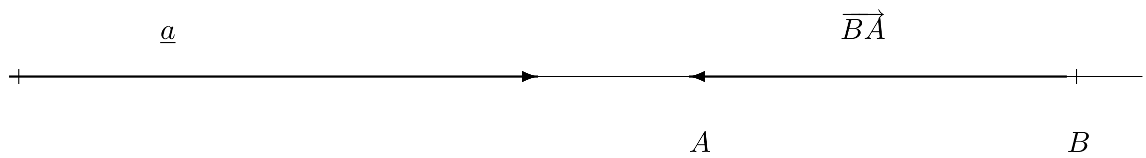
Dr. Fejős Csaba előadása alapján - Kovács Emese

2003. november 21.

Tartalomjegyzék

1. Vektorok

Definíció A vektorok irányított szakaszok.



Dimenzió	Vektor típusa
1D	vektor egy egyenesen
2D	síkbeli vektor
3D	térbeli vektor

A vektornak van **hossza** és **iránya**. Az alulhúzott ($\underline{a}$) és a rendes ($\overrightarrow{AB}$) jelölés is elfogadott.

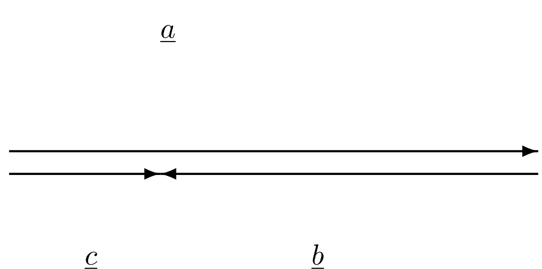
1.1. Vektorokra értelmezett műveletek

1.1.1. Összeadás

Definíció A null vektor fogalma: $-\underline{a} + \underline{a} = \underline{0}$

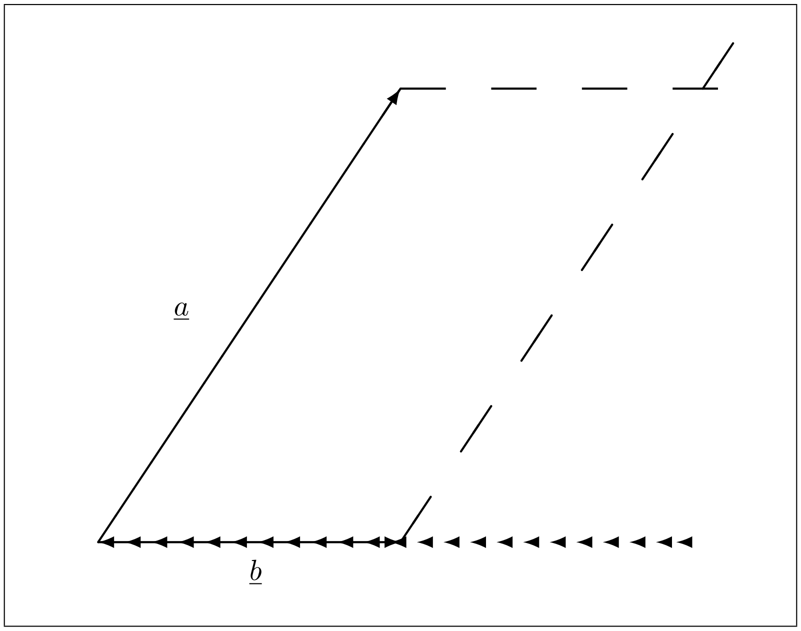
$\Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{0}$

Két vektor összege egy harmadik vektor.



$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

Definíció A null vektor definíció szerint tetszőleges irányú (minden iránnyal párhuzamos).



A vektorok összeadása kommutatív: $\underline{b} + \underline{a} = \underline{a} + \underline{b}$

1.1.2. Kivonás – két vektor különbsége

$\underline{b} + \underline{a} - \underline{b} = \underline{a}$

Zártság: pl. két egész összege egész, az összeadás zárt az egészek halmazán.

Az osztás nem zárt az egészek halamzán.

1.1.3. Vektor számszorosa

$k \in \Re$

$$\begin{array}{lll} k > 1 & \Rightarrow & |k \cdot \underline{a}| > |\underline{a}| \\ 0 < k < 1 & \Rightarrow & |k \cdot \underline{a}| < |\underline{a}| \\ -1 < k < 0 & \Rightarrow & |k \cdot \underline{a}| < |\underline{a}| \\ k < -1 & \Rightarrow & |k \cdot \underline{a}| > |\underline{a}| \end{array}$$

$k \cdot \underline{a}$ iránya megegyezik $\underline{a}$ irányával.

Definíció $\underline{c}$ vektor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációja, ha létezik olyan μ, λ számpár ($\mu \in \Re$ és $\lambda \in \Re$), amelyre igaz a következő: $\underline{c} = \mu \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **bázisvektorok**, ha tetszőleges $\underline{c}$ vektor előállítható belőlük lineáris kombinációval.

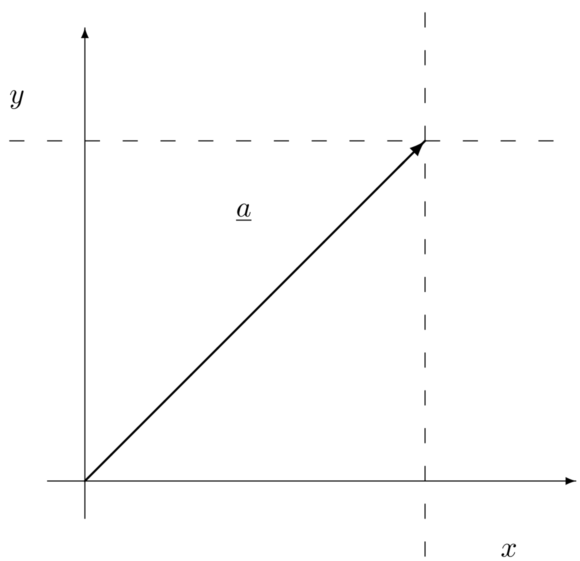
Síkban két bázisvektor van, térben nem elég kettő.

$\lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{b} + \nu \cdot \underline{c} = \underline{d}$

$\underline{d}$ vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációja.

Figyelem! Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok nem lehetnek egy síkban, tehát bármely három vektor nem bázisvektor!

Definíció Egy vektortér bázisvektorainak darabszáma a vektortér dimenziója.



$|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3D esetén: $|\underline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Az egységvektor hossza 1: $|\underline{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 +$

1.1.4. Szorzás – skalár és vektoriális szorzat

Láttuk, hogy a vektorokat meg lehet szorozni konstans számmal. Ha ismerjük egy vektor koordinátáit, könnyen kiszámolhatjuk k-szorosának koordinátáit is.

Példa: $\underline{a}(3; 2; 5)$
$\lambda = 3$
$\lambda \cdot \underline{a}(9; 6; 15)$

Vektort vektorral kétféleképpen lehet szorozni:

- skalár szorzás

- vektoriális szorzás

Skalár szorzás:

Definíció Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két vektor. Ekkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ skalár szorzata: $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = |\underline{\mathbf{a}}| \cdot |\underline{\mathbf{b}}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ahol $|\underline{a}|$ az $\underline{a}$ vektor hossza, $|\underline{b}|$ a $\underline{b}$ vektor hossza, a, b pedig az a szög, melyen keresztül $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$ vektorba forgatható (trigonometrikus irányban).

$|\underline{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

$|\underline{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}$

A skalár szorzat eredménye egy skalár szám.

Skalár szorzat koordináták alapján:

$\underline{a} \cdot \underline{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

Vektoriális szorzás:

Az eredmény hossza:

$\underline{a} x \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(a, b)$

A szorzatvektor iránya az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott síkra merőleges, a jobbkéz szabály figyelembevételével.

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ meghatároz egy síkot, amely a teret két féltérre osztja. Az eredményvektor abba az iránybe mutat, amelyből nézve $\underline{a}$-t $\underline{b}$-be lehet forgatni trigonometrikus irányban.

1.2. Vektorok alkalmazása a koordinátageometriában

Definíció az origóból kiinduló vektor: helyvektor.

A vektor meredeksége:

$m = \frac{v_2}{v_1}$

Egyenes egyenletének irányvektoros alakja:

$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0$

Minden olyan vektor, ami párhuzamos az egyenessen irányvektora az egyenesnek.

Normál vektor: irányvektor koordinátáit felcseréljük és az egyiket megszorozzuk (-1)-el.

$\underline{a}(x; y)$
$\underline{a_b}(-y; x)$
$\underline{a_b}$ a normálvektor.

1.2.1. Normálvektorok

$\underline{v}(v_1; v_2)$

$\underline{n}(-v_2; v_1)$
$\underline{n}(v_2; -v_1)$
$\underline{n}(A; B)$

2. Matematika gyakorlat 1.

2.1. Példák

1. Példa

$\underline{a}(1; -2)$

$\underline{b}(3; -y)$

a) y mely értéke esetén párhuzamos $\underline{a}$ és $\underline{b}$?

a) y mely értéke esetén merőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$?

2. Példa

$\underline{b}(-2; 3)$

$\underline{c}(0; 4)$

a) skaláris szorzat: $\underline{b} \cdot \underline{c}$?

b) mekkora a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ közbezárt szöge?

c) mekkora a vektoriális szorzatuk $\underline{b}$ x $\underline{c}$?

3. Példa

$A(0;3)$

$B(-2;5)$

$C(2;4)$

a) a pontok által meghatározott háromszög kerülete (K).

b) a pontok által meghatározott háromszög területe (T).

Lineáris kombináció

$\underline{a}(x_1;y_1;z_1)$

$\underline{b}(x_2;y_2;z_2)$

$\underline{c}(x_3;y_3;z_3)$

4. Példa

$\underline{\text{a}}$ (-2; 4)

$\underline{\text{b}}$ (-3; 5)

$\underline{\text{c}}$ (-6; 3)

Állítsa elő $\underline{c}$-t $\underline{\text{a}}$ és $\underline{\text{b}}$ lineáris kombinációjaként.

6. Példa

$y = 2x - 4$

$P(2;0)$

a) Írja fel a Hesse féle normál alakot. A? B? C?. b) Írja fel P pont távolságát a D egyenestől.