Befalazott tartó deformációs állapotának meghatározása

Antal Ákos
antala@eik.bme.hu

Ha egy külső erő vagy erőpár munkát végez egy tartón, akkor ezt a W munkát a külső erők munkájának nevezzük. Ez a munka a tartóban U belső energia formájában tárolódik. Ha a rugalmas tartót F_n erőkből és M_k nyomatékú erőpárokból álló egyensúlyi erőrendszer terheli, akkor a test deformálódik, tehát az erők támadáspontja elmozdul, a nyomatékok síkjai elfordulnak. Ha az F_i erő elmozdulás vektora és ennek az erő irányába eső összetevője f_i, akkor az erő munkája

$$W_i = \frac{1}{2} F_i f_i.$$

Hasonlóan az M_j nyomatékú erőpár munkája

$$W_j = \frac{1}{2} M_j \varphi_i.$$

Az így meghatározható munkák szuperpozíciójával az egész – a tartót terhelő – erőrendszer munkája

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i f_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} M_j \varphi_i.$$

A fenti összefüggés természetesen csak akkor érvényes, ha a testre ható külső erőrendszer a terhelés folyamán egyensúlyi rendszert alkot. Ez statikailag határozott tartók esetén érvényesül, s ilyenkor a reakcióerők támadáspontjainak nincs elmozdulása, tehát azok külső munkája nullával egyenlő. Ha az i-edik erő nagyságát dF_i-vel megváltoztatjuk, akkor a külső erők munkája megváltozik és a dF_i erőt tartalmazó rendszer munkája

$$W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i$$

lesz. Ha a terheletlen tartóra csak a dF_i erőt visszük fel, akkor annak munkája

$$\frac{1}{2} dF_i df_i$$

lesz. A tartóra ható terhelések munkája W és a dF_i erő munkája pedig

$$f_i dF_i.$$

Mivel ezen erő támadáspontjának elmozdulása f_i, így

$$W + f_i dF_i = W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i.$$

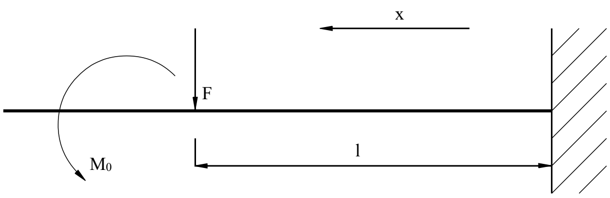
Ebből felírható a *Castigliano tétel*, mely szerint

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial F_i},$$

illetve hasonló gondolatmenet alapján

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial M_j}.$$

Tekintsük a következő statikailag határozott koncentrált erővel terhelt befalazott tartót. A tartóra ható külső erők munkája



1. ábra. *A befalazott tartó modellje*

$$W = \frac{1}{2IE} \int\limits_0^l M^2(x)\, dx.$$

Alkalmazva a fentebb levezetett Castigliano tételt

$$\varphi = \left[\frac{\partial W}{\partial M_0}\right]_{M_0=0} = \frac{1}{IE} \int\limits_0^l M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial M_0} dx,$$

ahol

$$M(x) = M_0 + F_0 x,$$

és

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_0} = 1.$$

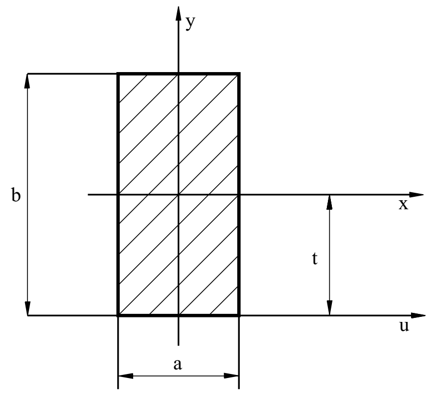
Behelyettesítve és a műveleteket elvégezve

$$\varphi = \frac{l}{IE}\left[M_0 + F_0 \frac{l}{2}\right].$$

Ha $M_0 = 0$, akkor

$$\varphi = \frac{Fl^2}{2IE}.$$

Ha a tartó téglalap keresztmetszetű, akkor a vízszintes tengelyére vett iner-



2. ábra. *A tartó keresztmetszete*

ciájára érvényes

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3}.$$

A *Steiner tétel* alapján

$$I_x = I_u - At^2,$$

tehát

$$I_x = \frac{ab^3}{12}.$$