BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

LEMEZ KIHAJLÁS VIZSGÁLATA

-Matlab programozása

házifeladat 2007/2008 tavaszi félév-

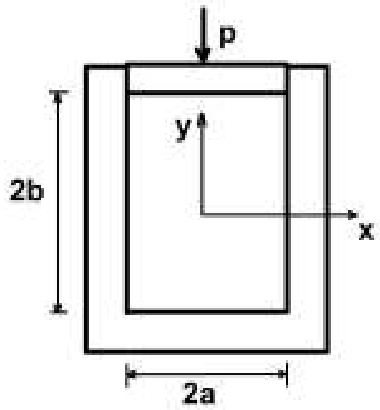
STUMPF PÉTER PÁL (GÉK)

1., Feladat

A feladat lemezek stabilitásvesztésének, kihajlásának vizsgálata. Ennek kapcsán grafikus kezelői felülettel rendelkező program létrehozása MatLab-os környezetben.

2., Lemez kihajlás elméleti háttere

A lemez kihajlás számítására közelítő módszert nyújt a potenciális energia minimumának meghatározása, mindaddig, amíg a lemez még elasztikus állapotváltozást szenved. A potenciál energiát hajlítás okozta U_1 és a belső erők okozta U_2 alakváltozási energia összegeként kapjuk.



1. ábra

Tekintsük az 1.ábrán látható téglalap alakú, kerülete mentén megtámasztott lemezt melyet $y = b$ mentén egyenletes erővel terhelünk. Tegyük fel, hogy a lemez nem tökéletes, a kezdeti deformációját

$$z_0 = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$$

alakban írhatjuk fel, ahol q_0 egy adott kezdeti érték. A lemez alakváltozásából származó energiaegyenletek:

$$U_1 = \frac{D}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left([(w-z_0)_{,xx} + (w-z_0)_{,yy}]^2 + 2(1-\upsilon)[(w-z_0)^2_{,xy} - (w-z_0)_{,xx}(w-z_0)_{,yy}]\right)dydx,$$

ahol $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ az úgynevezett lemezhajlító merevség, $w(x,y)$ a lemez pontjainak függőleges (z irányú) irányú elmozdulása, υ a Poisson tényező, E a rugalmassági modulus, $2a$ a lemez x irányú, $2b$ a lemez y irányú kiterjedése és h a lemez vastagsága. A $w_{,ij}$ jelölés jelentése $w_{,ij} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

$$U_2 = \frac{Eh}{2(1-\upsilon^2)} \cdot \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\cdot\upsilon\cdot\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\upsilon}{2}\gamma_{xy}^2)dydx,$$

ahol ε_{xx} az x irányú és ε_{yy} az y irányú alakváltozás. Az alakváltozási összefüggések

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} + 1/2 \cdot w_{,x}^2 + 1/2 z_{0,x}^2$$

$$\varepsilon_{yy} = v_{,y} + 1/2 \cdot w_{,y}^2 + 1/2 z_{0,y}^2$$

$$\gamma_{xy} = u_{,x} + v_{,y} + w_x w_y + z_{0,x} z_{0,y}$$

ahol $u(x,y)$ és $v(x,y)$ a lemez középsíkjának elmozdulása.
A Ritz módszer segítségével, a peremfeltételek kielégítő $w(x,y)$, $u(x,y)$ és $v(x,y)$ próbafüggvényeket felírva az U_1+U_2 teljes potenciális energia a fenti egyenletekből meghatározható. Az U_1+U_2 összefüggés az ismeretlen paraméterek szerinti deriváltja a kihajlás, a stabilitásvesztés pillanatában zérussal egyenlő. Az így nyert nemlineáris algebrai egyenletekből a paraméterek meghatározhatók.
Az 1.ábrán látható példán a $y=b$ menti terhelés y irányban $v=-2be$ elmozdulást hoz létre. e paraméter jellemzi a terhelés mértékét. A megtámasztás miatt $x=a$ és $x=-a$ mentén a nincs elmozdulás. Ezekben a pontokban a peremfeltétel $w=0$ és $w_{xx}=0$. Ezek alapján a lemez elmozdulását leíró kifejezéseket ebben az alakban kereshetjük

$$w(x,y)=q_1\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$$

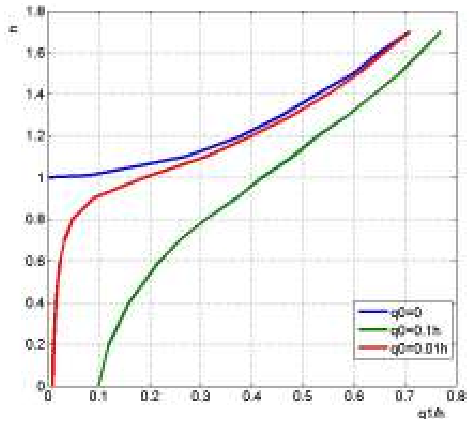
$$u(x,y)=q_2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2a}$$

$$v(x,y)=q_2\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{b}-e(y+b)$$

A kifejezéseket behelyettesítve megkapjuk az U_1+U_2 teljes potenciális energiát. A $\partial(U_1+U_2)/\partial q_1=0$ és $\partial(U_1+U_2)/\partial q_2=0$ egyenlet rendszerben 3 ismeretlen q_1,q_2 és e illetve a kezdeti deformáció mértéke q_0 szerepel. Az utóbbi egyenletből q_2-t kifejezve, és azt az előbbi egyenletbe behelyettesítve e-re egy összefüggést kapunk ami q_0 és q_1-től függ. A kritikus terhelés meghatározásához tegyük fel, hogy a lemez kezdeti deformációja zérus. A stabilitás vesztés, a kihajlás előtti pillanatban a kritikus terhelés fellépésénél $q_1=0$. Ebből a két feltevésből e_{kr} meghatározható. Ennek felhasználásával a Hooke törvényből a kritikus erőt megkaphatjuk:

$$N_{ykr}=\frac{Eh}{1-\upsilon^2}e_{kr}\,.$$

Tetszőleges $e=ne_{kr}$ terhelés és q_0 kezdeti deformáció értékhez tartozó q_1 és q_2 meghatározható az energia minimum egyenletéből, ezáltal a kihajolt lemez alak megrajzolható. Vegyük észre, amennyiben $q_0=0$, csak $n>1$ terheléshez tartozik $q_1>0$, ahogy ezt a 2.ábra szemlélteti.



2. ábra

Különböző peremfeltételekhez különböző próbafüggvények tartoznak. A továbbiakban további három esethez tartozó elmozdulást leíró függvények próbafüggvényét ebben a formában keressük:

Egyik szélénalátámasztott, másik szélén szabad lemez (3.a ábra):

$$w(x,y)=q_1\cos\frac{\pi(x-a)}{-4a}\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$z_0(x,y)=q_0\frac{\pi(x-a)}{-4a}\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$u(x,y)=q_2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$w(x,y)=q_2\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{b}-e(y+b)$$

Mindkét szélén szabad lemez (3.b ábra):

$$w(x,y)=q_1\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$z_0(x,y)=q_0\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$u(x,y)=q_2\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$w(x,y)=q_2\sin\frac{\pi y}{b}-e(y+b)$$

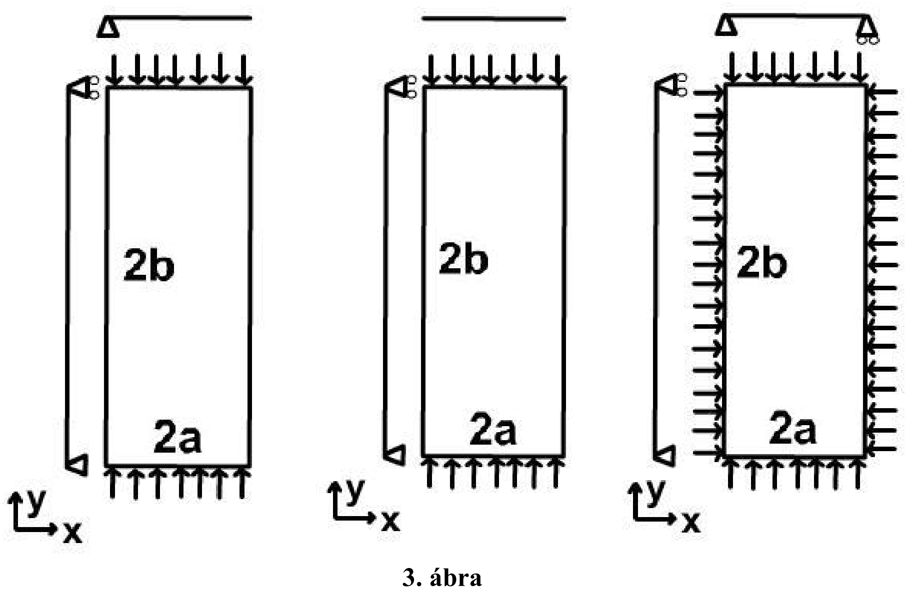
A kerülete mentén egyenletes erővel terhelt lemez (3.c ábra):

$$w(x,y)=q_1\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$z_0(x,y)=q_0\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$$

$$u(x,y)=q_2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b}-e(x+a)$$

$$v(x,y)=q_2\cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{b}-e(y+b)$$



3. ábra

3., A számítógépes algoritmus kidolgozása, a program használata

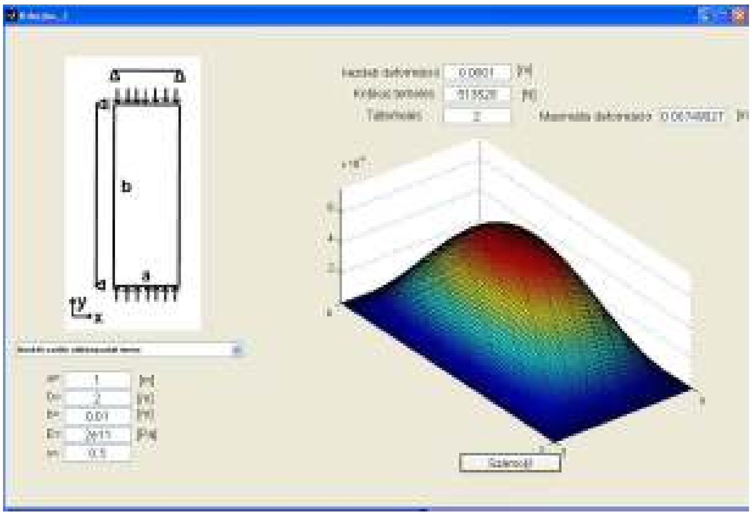
A számítógépes program bemenő adatai a lemez geometriai méretei (a, b, h), anyagjellemzői (E, ν), a kezdeti deformáció mértéke (q_0), a túlterhelés mértéke (n).

Az előző fejezetben leírt egyenletek $2a$ és $2b$ méretű lemezre voltak igazak, így első lépésként a program bemeneteként megadott geometriai méretek felét vesszük. Az algoritmus elején a *syms* utasítással megadjuk az egyenletek során alkalmazott változókat (x, y, q_0, q_1, q_2, e). Ezek után a négy különböző terhelési módnak megfelelő elmozdulási egyenleteket (w, u, v, z_0) egy *if* logikai függvény alkalmazásával az előző fejezetben tárgyaltak szerint megadjuk. Az energiaegyenletekben szereplő deriváltakat a *diff* utasítás használatával kapjuk meg, majd az *int* utasítással a két energiaegyenletet (U_1, U_2) megkaphatjuk. A tárgyalt módon először kifejezzük *solve* utasítással q_2-t az összenergia q_2 szerinti deriváltjából, majd azt a *subs* utasítással az összenergia q_1 szerinti deriváltjának egyenletébe helyettesítjük. Ezt az egyenletet e-re rendezve, az előzőekben tárgyaltak szerint $q_1 = q_0 = 0$-ra megkapjuk a kritikus terhelés mértékét e_{kr}-t. A bemenetkor megadott túlterhelés mértékének értékéből megkapjuk a terhelés mértékét, majd q_0 értékének felhasználásával q_1 és q_2 kiszámítható.

A kapott paraméter értékeket a w egyenletébe visszahelyettesítve *surf* utasítással a lemez kihajlási alakja kirajzoltatható.

A program forráskódja a mellékletben megtalálható.

A programhoz készült grafikus felület (4. ábra) egyszerűbb kezelhetőséget nyújt. A baloldalon a legördülő menüsorból kilehet választani a megfelelő terhelési módot, illetve a bemenő paramétereket meglehet adni. A program ezután elvégzi a számításokat és kirajzolja a megadott terhelés mértékéhez tartozó lemez alakot és megadja a kritikus erő és a legnagyobb deformáció értékét. Amennyiben a lemez kezdeti deformációjának mértéke zérus annyiban a terhelés mértékét kifejező szorzó értékét egynél nagyobbra vegyük (lásd 2.ábra).



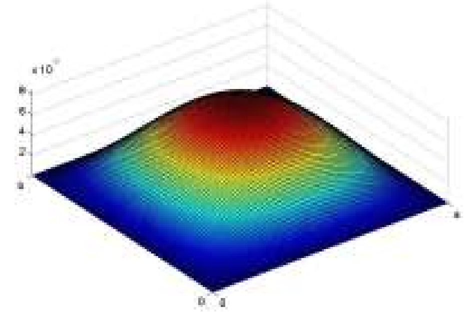
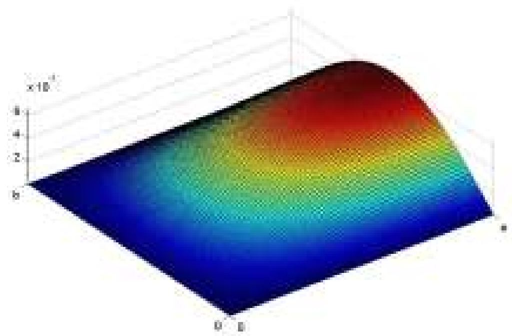
4. ábra

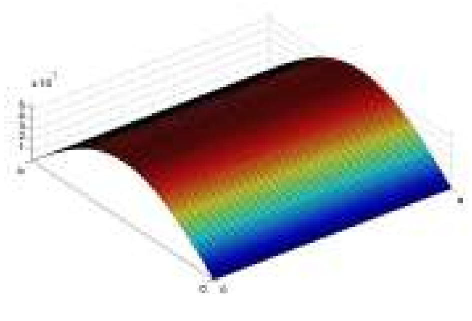
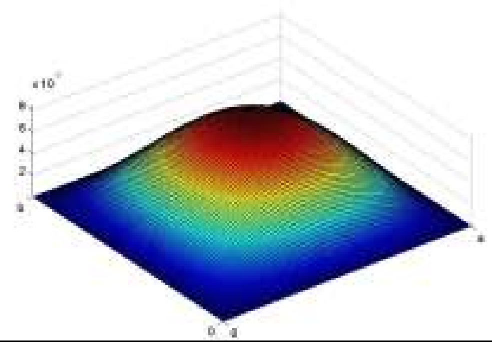
4., Eredmények

Az alábbiakban egy négyzet alakú lemez kihajlás számításának eredményeit közöljük. A lemez adatai:

$a = b = 0.5[m]$, $h = 0.01[m]$, $E = 200[GPa]$, $\nu = 0.3$, $q_0 = 0[m]$

A kritikus erő értéke és az $n = 2$ túlterheléshez tartozó maximális deformáció értéke és a kihajolt lemez alak:

	Mindkét szélén alátámasztott lemez	*Egyik szélén szabad, másik szélén alátámasztott lemez*
Kritikus erő	$F = 2224.8[kN]$	$F = 1050.9[kN]$
max. deformáció	$q = 0.084[m]$	$q = 0.066[m]$
lemez alak		

	Mindkét szélén szabad lemez	*Minden oldaláról terhelt lemez*
Kritikus erő	$F = 723[kN]$	$F = 1124[kN]$
max. deformáció ($n = 2$)	$q = 0.057[m]$	$q = 0.084[m]$
A kihajolt lemez alak		

A [1.] hivatkozásban ugyanezt a módszert alkalmazva csak a mindkét szélén alátámasztott lemezre szerepelnek számítási eredmények, összefüggések. Ezek megegyeznek a program által számoltakkal. Emellett a 2.ábrán szereplő diagram, mely a program alapján lett elkészítve megegyezik a [1.]-ben szereplővel.

Az egyik szélén szabad, másik szélén alátámasztott lemezt egy másik módszer alkalmazásával tárgyalja az [1.] hivatkozás. A kritikus erőre kapott eredmény alig 1%-al tér el a másik módszer által számított értéktől.

A másik két terhelési módra kapott eredményeket egyenlőre nem tudtam alátámasztani mérési vagy szakirodalomban szereplő eredményekkel.

5., Konklúzió

A program elsősorban a kritikus terhelés meghatározására alkalmas, illetve a kritikus erőnél nem sokkal nagyobb terheléshez tartozó lemez alak megrajzolásához. Minél nagyobb a túlterhelés, annál nagyobb az eltérés a számított és a valódi, tényleges lemez alak között.

A peremfeltételeket kielégítő próbafüggvényeket trigonometrikus alakban kerestük. Természetesen a próbafüggvény változtatásával, a valóságos kihajolt lemez alakot jobban közelítő (például polinomos) függvényekkel a számítás tovább pontosítható.

6., Irodalomjegyzék

[1] Zdeněk P. Bažant, Luigi Cedolin: Stability of Structures, 7th chapter, Oxford University Press, 1991, ISBN 0-19-505529-2

[2] Dr. Kovács Ádám: Szilárdsági méretezés, órai jegyzet