Matlab programozás féléves házi feladat
Gerendák lehajlásának számítógépes vizsgálata
Szabadszállási Tibor

1. A feladat kitűzése

A végtelen hosszú vasúti sínek igénybevételeinek alakulása már Zimmermann óta megoldott probléma [1]. Rugalmasan ágyazott végtelen hosszú gerenda modellt használva az alábbi:

$$-y = \frac{EI}{C}\frac{d^4 y}{dx^4} \tag{1}$$

negyedrendű differenciálegyenlet irható fel a koncentrált kerékteherrel terhelt rugalmasan ágyazott gerenda lehajlásfüggvényére (ahol C a gerenda ágyazási tényezője [kN/m^2], EI a sínszál hajlítási merevsége [kNm^2], x a hely, y a lehajlás függvénye). A vasúti sín hajlítonyomatékai -a gerenda legjentősebb igénybevétele-, a differenciálegyenlet megoldásaként kapható lehajlás függvény második derivátjaként származtatható. Ha egyes szakaszokon más a gerenda ágyazása, vagy a keresztaljak távolsága, akkor a szakaszokra külön kell felírni a rugalmas ágyazású gerenda differenciálegyenletét, és a szakaszok megfelelő csatlakozását feltételekkel kell előírni.

A feladat numerikus megoldása egy véges hosszúságú rugalmasan alátámasztott folytatólagos többtámaszú tartóval modellezi a vasúti sínt. Ez a megoldás jól megközelíti az analitikus megoldást -ha elég hosszú a figyelembe vett véges hosszúság-, mert az analitikus megoldással kapható lehajlás függvény hamar lecseng.

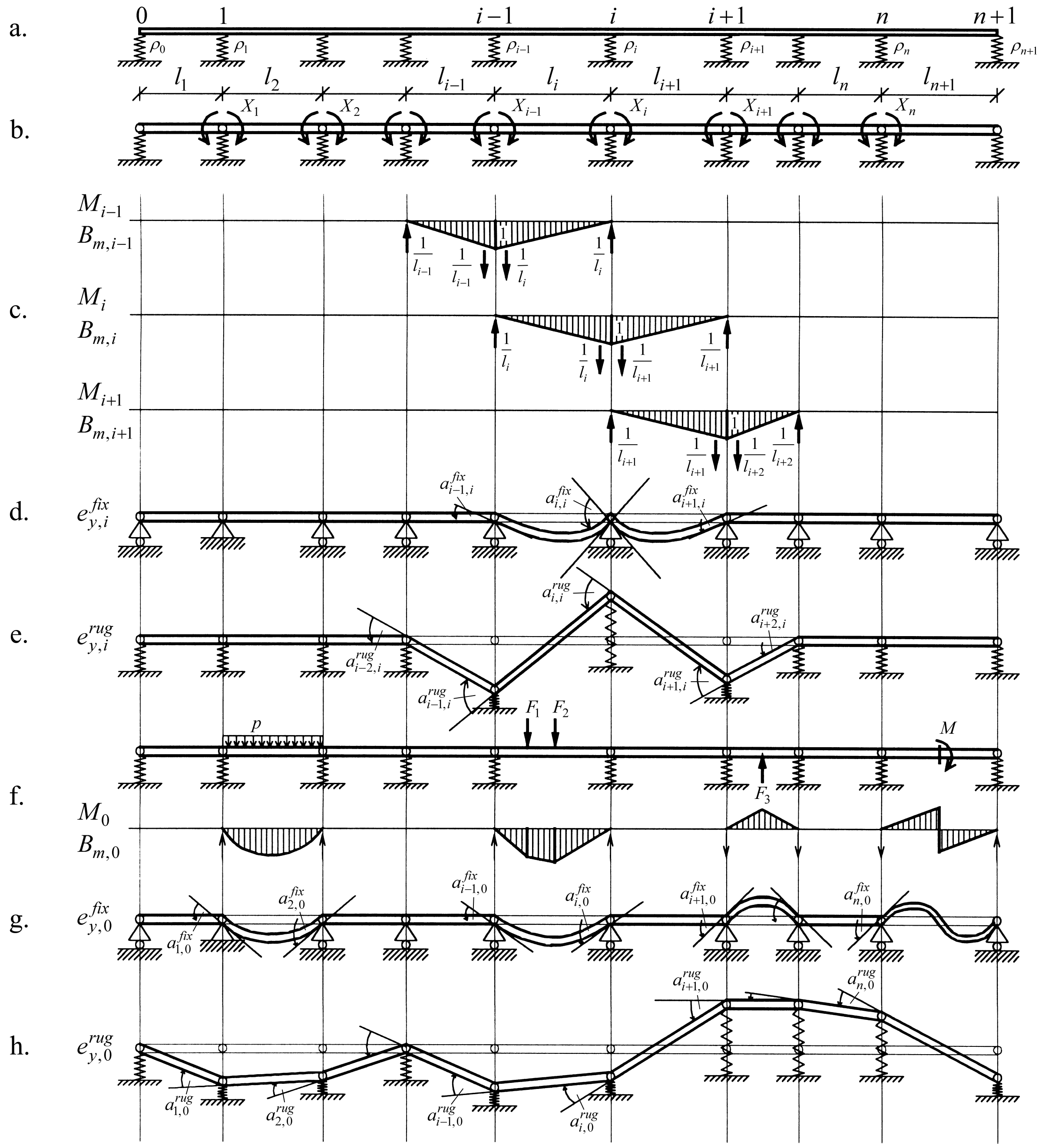
A házi feladat célja egy olyan program megírása, mely lehetőséget biztosít annak vizsgálatára, hogy ha két markánsan különböző ágyazású szakasz csatlakozik egymáshoz, akkor milyen átmenettel biztosítható a legkedvezőbb igénybevétel eloszlása. Ilyen lényegesen különböző ágyazás alakul ki, amikor egy töltésről egy hídra vezet a vasúti pálya. A különböző ágyazás határán a vasúi kocsik áthaladásakor jelentős feszültségváltozások következnek be, melyek hamarabb vezetnek a vasúti sín lokális tönkremeneteléhez, mint egy általános szakasz keresztmetszetében. A két szakasz éles váltását mindenképpen csökkenteni kell egy átmeneti szakasz beiktatásával.

A felhasználó beállíthatja külön-külön a három szakasz ágyazásának rugóállandóját, keresztaljainak a távolságát, a szakaszokon alkalmazott keresztajak számát. Bemeneti adat továbbá a sínszál rugalmassági modulusa és a keresztmetszetének másodrendű statikai nyomatéka. A felhasználó legfeljebb négy koncentrált erőt adhat meg teherként, úgy hogy két keresztalj közé csak egy erő eshet.

2. A megoldás elméletének rövid leírása

Annak ellenére, hogy a numerikus megoldás nagyobb egyenletrendszer megoldását igényli, mégis ezt választottam, mert így a reakcióerők is egyszerűen meghatározhatók. A numerikus megoldás során a statikailag sokszorosan határozatlan feladatot az úgynevezett erőmódszerrel oldottam meg [2]. Ennek az a lényege, hogy a fölösleges statikai kapcsolatok megszüntetésével egy úgynevezett törzstartót veszünk fel. Így a megszüntetett kapcsolatok helyén relatív elmozdulások alakulnak ki a terhek hatására. *A megszüntetett kapcsolatokban pontosan akkora erők ébrednek, hogy a terhek hatására kialakuló relatív elmozdulásokat megszüntessék.*

A leghatékonyabb módszer, ha a folytatólagos többtámaszú tartót az 1b ábrának megfelelően rugalmasan megtámasztott kéttámaszú tartók sorozatára bontjuk. Így az X_i-vel jelölt ismeretlenek (fölösleges kapcsolati erők) a támaszok feletti nyomatékok. Az i-edik fölösleges kapcsolatban kialakuló relatív elmozdulást a terhek hatására a_{i0}-val jelöljük (terhelési tényező). Az egységnyi X_j fölösleges kapcsolati erő hatására a i-edik fölösleges kapcsolatban kialakuló relatív elmozdulást a_{ij}- vel jelöljük (egység tényező). Az 1d-e valamint 1g-h ábrák jól szemléltetik hogy mind az egység- és terhelési tényezők két komponensből állíthatók elő. Az első tagok $-a_{i0}^{fix}$ és a_{ij}^{fix}-, azt az elmozdulás összetevőt jelölik ami akkor alakulna ki ha a rugalmas támaszok teljesen merevek és a gerendák pedig hajlíthatóak, a második tagok $-a_{i0}^{rug}$ és a_{ij}^{rug}-, azt az elmozdulás összetevőt jelölik ami akkor alakulna ki ha a gerendák teljesen merevek és a rugalmas támaszok pedig a tényleges merevségüknek megfelelőek.



1. ábra Rugalmasan ágyazott folytatólagos többtámaszú tartó

3. A numerikus megoldás rövid leírása

A kívánt elmozdulások meghatározására a virtuális erők tételét használtam fel. Melynek lényege, hogy az a_{ij} egység tényező az egységnyinek feltételezett X_i és X_j fölösleges kapcsolati erők hatására keletkező M_i és M_j nyomatékábrák, valamint B_i és B_j reakcióerők összeintegrálásával adódik. Így a fix alátámasztású folytatólagos többtámaszú tartón a következő relatív elmozdulás alakul ki az *i*-edik helyen, a *j*-edik helyre beiktatott egységnyi kapcsolati erőből:

$$a_{ij}^{fix} = \int_l \frac{M_i M_j}{EI} ds . \tag{2}$$

A rugalmasan alátámasztott merev kéttámaszú gerenda sor *i*-edik helyén kialakuló relatív elmozdulás, a *j*-edik helyre beiktatott egységnyi kapcsolati erőből a munkatétel (virtuális erők) alapján:

$$a_{ij}^{rug} = \sum_m B_{mi} \rho_m B_{mj} , \tag{3}$$

ahol ρ_m az *m*-edik támasz rugóállandója, B_{mi} és B_{mj} az *m*-edik támasznál keletkező reakcióerők az $X_i = 1$, illetve $X_j = 1$ nyomatékpárból a 1c ábrának megfelelően. Így a teljes egységtényező

$$a_{ij} = a_{ij}^{fix} + a_{ij}^{rug} = \int_l \frac{M_i M_j}{EI} ds + \sum_m B_{mi} \rho_m B_{mj} . \tag{4}$$

Ehhez hasonlóan az a_{i0} terhelési tényező

$$\mathrm{a}_{i0} = a_{i0}^{fix} + a_{i0}^{rug} = \int_l \frac{M_i M_0}{EI} ds + \sum_m B_{mi} \rho_m B_{m0} . \tag{5}$$

az M_i és M_0 nyomatékábrák valamint B_i és B_0 reakcióerők összeintegrálásával adódik, ahol M_0 és B_{m0} a terhek hatására keletkező nyomatékábra és reakcióerő az *m*-edik támasznál.
A numerikus megoldás alapgondolata tehát, hogy minden fölösleges kapcsolati helyen a fölösleges kapcsolati erők és a terhek hatására kialakuló relatív elmozdulás nulla. Ez az i-edik kapcsolatban a következőképpen alakul:

$$a_{i,0} + a_{i,1} X_1 + a_{i,2} X_2 + \cdots + a_{i,i-1} X_{i-1} + a_{i,i} X_i + a_{i,i+1} X_{i+1} + \cdots + a_{i,n-1} X_{n-1} + a_{i,n} X_n = 0 . \tag{6}$$

Minden fölösleges kapcsolati helyre felírható (6)-nak megfelelő egyenlet, és így egy n ismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk. A terhekből keletkező relatív elmozdulásokat (terhelési tényezőket) az $\underline{\mathbf{a}}_0$ vektorba, az egységtényezőket pedig az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ együttható mátrixba gyűjtve. Az alábbi egyenlet:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{a}}_0 = \underline{\mathbf{0}} \tag{7}$$

fogalmazza meg, hogy a megszüntetett kapcsolatokban pontosan akkora erők ébrednek, hogy a terhek hatására kialakuló relatív elmozdulásokat megszüntessék. A fölösleges kapcsolati erők meghatározása után, már meghatározható a folytatólagos többtámaszú tartó nyomatékábrája, a rugalmas támaszokban keletkező reakcióerők, valamint a rugómerevségek ismeretében a támaszok elmozdulásai.

4. A megoldó mag

A megoldó magban a program a bemeneti adatok megadása után összeállítja a (7) egyenletrendszer $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ együttható mátrixát majd a megadott koncentrált terheként külön-külön az $\underline{\mathbf{a}}_0$ vektort . Aztán megoldja az egyenletrendszereket, majd szuperponálja a koncentrált terhek hatását.
Az egységtényezőknek megfelelően az egyenletrendszer $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ együttható mátrixa is felbontható egy $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{fix}}$ és egy $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{rug}}$ mátrix összegére. Az 1d ábra jól szemlélteti, hogy ha a rugalmas támaszok végtelen merevek, akkor az adott kapcsolati nyomatékpárból csak az adott és a

közvetlen szomszédos támaszoknál keletkezik relatív elfordulás. Számszerűen ez az M_i és M_j nyomatékábrák közötti „átfedésből” következik. Belátható tehát, hogy:

$$a_{ij}^{fix} = 0 \ , \quad \text{ha} \quad |i-j| > 1 \, . \tag{8}$$

Az 1e ábra pedig azt szemlélteti, hogy ha a gerendák végtelen merevek, akkor az adott kapcsolati nyomatékpárból nemcsak az adott és a közvetlen szomszédos támaszoknál, hanem a szomszédos második támaszoknál is keletkezik relatív elfordulás. Számszerűen ez a B_{mi} és B_{mj} reakcióerők közötti „átfedésből” következik. Belátható tehát, hogy:

$$a_{ij}^{rug} = 0 \ , \quad \text{ha} \quad |i-j| > 2 \, . \tag{9}$$

Tehát az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\text{fix}}$ mátrixnak a főátlóján kívül az alsó és felső kodiagonálisokban van nullától különböző eleme:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{fix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{fix} & a_{12}^{fix} & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{fix} & a_{22}^{fix} & a_{23}^{fix} & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32}^{fix} & a_{33}^{fix} & a_{34}^{fix} & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,i-1}^{fix} & a_{ii}^{fix} & a_{i,i+1}^{fix} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_{n-2,n-3}^{fix} & a_{n-2,n-2}^{fix} & a_{n-2,n-1}^{fix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_{n-1,n-2}^{fix} & a_{n-1,n-1}^{fix} & a_{n-1,n}^{fix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & a_{n,n-1}^{fix} & a_{nn}^{fix} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

ahol az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\text{fix}}$ mátrix nullától különböző elemei (2)-nek megfelelően:

$$a_{i,i}^{fix} = \frac{2l_i + 2l_{i+1}}{6EI}, \qquad a_{i,i+1}^{fix} = a_{i+1,i}^{fix} = \frac{l_{i+1}}{6EI} \, . \tag{11}$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\text{rug}}$ mátrixnak viszont a főátlótól számított második alsó és felső diagonálisokban is van nullától különböző elem:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{rug} = \begin{bmatrix} a_{11}^{rug} & a_{12}^{rug} & a_{13}^{rug} & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{rug} & a_{22}^{rug} & a_{23}^{rug} & a_{24}^{rug} & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{rug} & a_{32}^{rug} & a_{33}^{rug} & a_{34}^{rug} & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{i,i-2}^{rug} & a_{i,i-1}^{rug} & a_{ii}^{rug} & a_{i,i+1}^{rug} & a_{i,i+2}^{rug} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_{n-2,n-3}^{rug} & a_{n-2,n-2}^{rug} & a_{n-2,n-1}^{rug} & a_{n-2,n}^{rug} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_{n-1,n-3}^{rug} & a_{n-1,n-2}^{rug} & a_{n-1,n-1}^{rug} & a_{n-1,n}^{rug} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_{n,n-2}^{rug} & a_{n,n-1}^{rug} & a_{nn}^{rug} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

ahol az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\text{rug}}$ mátrix nem nulla elemei pedig (3)-nak megfelelően:

$$a_{i,i}^{rug} = \left(\frac{1}{l_i}\right)^2 \rho_i + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 \rho_{i+2} + \left(\frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 \rho_{i+2} \, , \tag{13}$$

$$a_{i,i+1}^{rug} = a_{i+1,i}^{rug} = -\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\frac{1}{l_{i+1}} \rho_{i+2} - \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right)\frac{1}{l_{i+1}} \rho_{i+2} \, , \tag{14}$$

$$a_{i,i+2}^{rug} = a_{i+2,i}^{rug} = \frac{1}{l_{i+1}} \frac{1}{l_{i+2}} \rho_{i+2}, \tag{15}$$

Az $\mathbf{\underline{a}_0}$ vektort is hasonlóan fel lehet bontani $\mathbf{\underline{a}}_0^{\mathrm{fix}}$ és $\mathbf{\underline{a}}_0^{\mathrm{rug}}$ részekre. Ahol $\mathbf{\underline{a}}_0^{\mathrm{fix}}$ a gerendák lehajlásából kialakuló relatív elfordulás a koncentrált teher hatására a támaszok felett, és $\mathbf{\underline{a}}_0^{\mathrm{rug}}$ pedig a rugalmas támaszok süllyedésének a következtében kialakuló relatív elfordulás a támaszok felett. Az 1g ábra jól szemlélteti, hogy jobbról a második mezőben lévő teher a fix alátámasztású tartón csak a terhelt szakasz határainál lévő támaszok felett okoz relatív elfordulást. Tehát az *i*-edik rúdon lévő koncentrált teher esetén -a 2. ábra alapján-, $\mathbf{\underline{a}}_0^{\mathrm{fix}}$-nek a következő két zérustól különböző eleme van:

$$a_{i-1,0}^{fix} = \frac{Fx^2(l_i - x)}{2l_i EI}\left(\frac{l_i - x}{l_i}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{Fx(l_i - x)^2}{2l_i EI}\frac{l_i - x}{l_i}\frac{2}{3}, \tag{16}$$

$$a_{i-1,0}^{fix} = \frac{Fx^2(l_i - x)}{2l_i EI}\frac{x}{l_i}\frac{2}{3} + \frac{Fx(l_i - x)^2}{2l_i EI}\left(\frac{x}{l_i}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right). \tag{17}$$

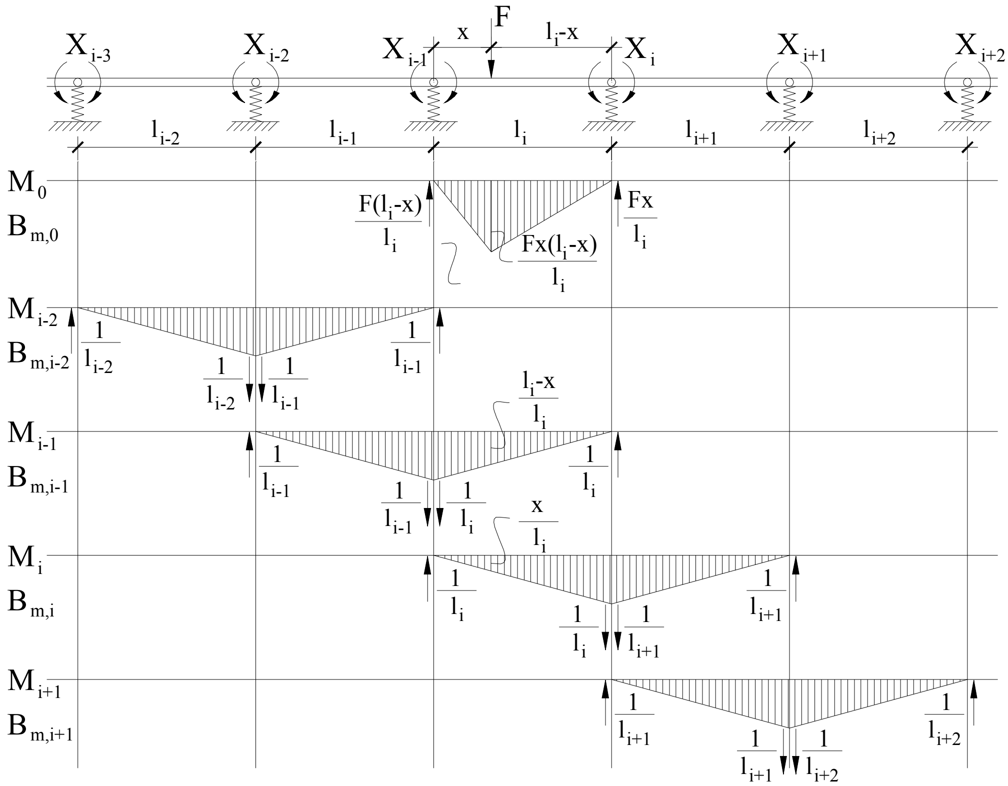
Az 1h ábrán pedig jól látható, hogy ugyancsak a második mezőben lévő teher, nemcsak a terhelt mező határain, hanem azok szomszédos támaszai felett is okoz relatív elfordulást, ha a támaszok rugalmasak, a gerendák viszont teljesen merevek. Így koncentrált teher esetén -a 2. ábra alapján-, $\mathbf{\underline{a}}_0^{\mathrm{rug}}$-nak a következő négy zérustól különböző eleme van:

$$a_{i-2,0}^{rug} = \frac{1}{l_{i-1}}\frac{F(l_i - x)}{l_i}\rho_i, \tag{18}$$

$$a_{i-1,0}^{rug} = -\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)\frac{F(l_i - x)}{l_i}\rho_i + \frac{1}{l_i}\frac{Fx}{l_i}\rho_{i+1}, \tag{19}$$

$$a_{i,0}^{rug} = \frac{1}{l_i}\frac{F(l_i - x)}{l_i}\rho_i - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\frac{Fx}{l_i}\rho_{i+1}, \tag{20}$$

$$a_{i+1,0}^{rug} = \frac{1}{l_{i+1}}\frac{Fx}{l_i}\rho_{i+1}. \tag{21}$$



2. ábra Rugalmasan ágyazott gerenda terhelési tényezője koncentrált teherre

Tehát a (4)-es és (5)-ös formuláknak megfelelően összegezhetők a terhelési és egységtényezők, és minden koncentrált teherre összeállítható a (7) egyenletrendszer $\underline{\mathbf{A}}$ együttható mátrixa és $\underline{\mathbf{a}}_0$ vektora. Az egyenletrendszer megoldása a teher hatására kialakuló nyomatékábra támaszok feletti értékeit adja meg. A terhek hatásának összegzése így egyszerűen megoldható, a különböző terheknek megfelelő megoldások összegzésével. Ezek után már csak a terheknek megfelelő M_0-ábrákat kell hozzáadni az összegzett nyomatékábrához. Az m-edik reakcióerőt pedig a következő formula szolgáltatja:

$$B_m = \sum_i B_{mi} X_i \ , \tag{22}$$

Ahol B_m a terhek hatására kialakuló reakcióerő az m-edik támaszban, B_{mi} a 2. ábrának megfelelő reakcióerők az egységnyi fölösleges kapcsolati erőkből, X_i pedig az összegzett támasz feletti nyomaték. A reakcióerőkből pedig a tartó lehajlása (e) a rugóállandók ismeretében egyszerű szorzással számítható:

$$e_m = B_m \rho_m \,. \tag{23}$$

5. Grafikus felhasználói felület és a program használatának rövid leírása

A felhasználó egy grafikus felhasználói felületen definiálhatja a rugalmasan ágyazott gerenda modelljét, definiálhatja a terheket, és a sínszál anyagjellemzőjét és keresztmetszetét. A rugalmasan ágyazott folytatólagos gerenda definiálásakor három szakaszra külön megadható a rugalmas támaszok merevsége, a keresztaljak távolsága és a keresztaljak száma a különböző szakaszokon. Beállítható a sínszál anyagának rugalmassági modulusa, és keresztmetszetének másodrendű statikai nyomatéka. A felhasználó maximum 4 koncentrált erőt adhat meg. A nagyságát mindegyiknek változtathatja. Az első erő helyzetét az első szakasz első keresztaljának helyzetéhez képest adhatja meg, a többi erőt, pedig az első erőhöz képest.
A számolj gomb megnyomásával a program megjeleníti a gerenda modelljét, a tartó nyomatékábráját, reakcióerőit, és lehajlását. A jobb oldali listában pedig számszerűen

jelennek meg az eredmények. A felhasználó a megadott névvel adatfájlba is mentheti az adatokat. Ezenkívül a felhasználónak figyelnie kell arra, hogy a bemeneti adatok a számítási algoritmusnak megfelelőek legyenek. A program ugyanis csak úgy tudja kezelni a terheket, ha két keresztalj között csak egy koncentrált erő van. Ha két szomszédos erő távolsága túl kicsi - a keresztaljak távolságához képest-, akkor a lista helyett egy üzenet jelenik meg, ami felszólítja a felhasználót, hogy módosítsa a terhek megadását. Hasonló üzenet érkezik akkor is ha az első vagy az utolsó teher túlságosan közel van a tartó széléhez.

Irodalom

[1] Megyeri Jenő: *Vasútépítés*, Műegyetem Kiadó, 1994.

[2] Kurutzné Kovács Márta: *Tartók statikája*, Műegyetem Kiadó, 2003.