

## Vasmagos tekercs önindukciós együtthatója

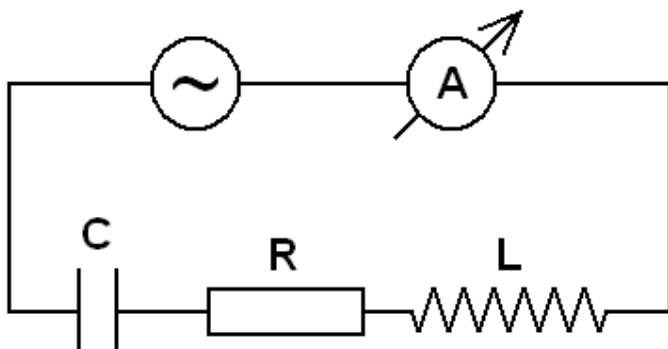
Rengeteg fizika tankönyvben és képletgyűjteményben [1] szerepel alapvető összefüggésként, hogy egy „hosszú, egyenes tekercs” önindukciós együtthatóját a következő képlet adja meg:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{l}. \quad (1)$$

Itt  $N$  a menetek száma,  $l$  a tekercs hossza,  $A$  a keresztmetszetének területe,  $\mu_r$  pedig a tekercset kitöltő anyag relatív mágneses permeabilitása. Légmagos esetben ennek értéke 1 körüli, míg a gyakorlatban használt lágyvasmagok esetén 100 és 1000 közötti szám. Fontos kihangsúlyozni, hogy egy anyag permeabilitása csak akkor tekinthető állandónak, ha a mágneses térerősség ( $H$ ) függvényében a mágneses indukció ( $B$ ) lineárisan változik. A továbbiakban lágymágneses anyagokkal foglalkozom, melyekben elegendően kis térerősség esetén teljesül ez a feltétel, tehát a nemlineáris hatások (telítés, hiszterézis) jogosan elhanyagolhatóak.

Az (1) összefüggés igazolása légmagos esetben ( $\mu_r = 1$ ) igen egyszerű, szinte minden fizika tankönyvben megtalálható. A tekercsen kívüli szórt tér elhanyagolása után az Ampère-féle gerjesztési törvényből azonnal adódik a tekercs belsejében kialakuló homogén mágneses tér nagysága, abból pedig az önindukciós együttható. Ezután következik a képlet általánosítása, miszerint a vasmag behelyezésével „ $B$  értéke megnő a vákuumbelihez képest”, így „az eddigi összefüggés a  $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_r$  helyettesítéssel érvényes” [1].

Az utolsó lépés akkor volna jogos, ha az egész teret homogén módon töltené ki a  $\mu_r$  relatív permeabilitású anyag. Elsőre logikus érvelésnek tűnhet, hogy csak a tekercs belseje számít, hiszen a külső szórt tér hatása úgyszólván elhanyagolható; jobban megvizsgálva ez a gondolatmenet teljesen hibás. Mivel a levegő és a vasmag határán az indukció ( $B$ ) normális komponense folytonosan viselkedik, a térerősségnek ( $H$ ) itt ugrást kell szenvednie. A vasmagból kilépve a térerősség normális összetevője  $\mu_r$ -szeresére növekszik, így a gerjesztési törvény felírásakor a külső mágneses tér jelentős szerephez is juthat.



1. ábra: Egyszerű RLC-áramkör az  $L$  induktivitás mérésére

Az (1) összefüggés érvényességét kísérletileg is megvizsgáltam az 1. ábrán látható egyszerű elrendezés segítségével. Az RLC-körben folyó áram erősségét mértem a feszültséggenerátor frekvenciájának függvényében, és megkerestem a legerősebb áramhoz tartozó rezonanciafrekvenciát. Ismert, hogy ennek értéke soros RLC-kör esetén:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2)$$

A kondenzátor kapacitásának ( $C = 4.21 \mu\text{F}$ ) ismeretében tehát a rezonanciafrekvencia mérésével kiszámítható a tekercs  $L$  önindukciós együtthatója.

Elsőként egy légmagos tekercset kötöttem az 1. ábrán látható RLC-körbe, ekkor a rezonanciafrekvencia és az önindukciós együttható rendre:

$$f = 1420 \text{ Hz} \pm 20 \text{ Hz}; \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = (2.98 \pm 0.08) \text{ mH.} \quad (3)$$

Az  $N = 600$  menetszámú tekercsbe tökéletesen illeszkedő, négyzet keresztmetszetű vasmag hosszúsága  $l = (39 \pm 1)$  mm, szélessége pedig  $d = (13 \pm 0.5)$  mm; az (1) képlet alkalmazásakor jó közelítéssel ezek tekinthetők a tekercs megfelelő méreteinek is:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 d^2}{l} = (2.0 \pm 0.2) \text{ mH.} \quad (4)$$

A (3) mért és a (4) számolt érték közötti eltérés főként annak tulajdonítható, hogy a tekercs a szoros csévélés ellenére is jelentősen szélesebb a vasmagnál. Ettől függetlenül egyértelmű azonban, hogy az (1) összefüggés légmagos esetben megfelelő becslést ad a hosszú, egyenes tekercs önindukciós együtthatójára – teljes összhangban az elméleti megfontolásokkal.

A tekercset tökéletesen kitöltő vasmag behelyezése után újabb méréseket végeztem, ekkor a rezonanciafrekvencia és az önindukciós együttható értéke:

$$f = 595 \text{ Hz} \pm 5 \text{ Hz}; \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = (17.0 \pm 0.3) \text{ mH.} \quad (5)$$

Az alkalmazott vasmag permeabilitását zárt vasmagos tekercs önindukciós együtthatójának mérésével határoztam meg [2], relatív értéke  $\mu_r = 670 \pm 70$ . A már ismert méretekkel együtt behelyettesítve az (1) képletbe:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 d^2}{l} = (1300 \pm 300) \text{ mH.} \quad (6)$$

Az (1) összefüggés alapján számolt önindukciós együttható két nagyságrenddel nagyobb az (5) kísérleti értéknél; úgy tűnik, a szokásos képlet nagy permeabilitású vasmag használata esetén teljesen hibás eredményre vezet.

Érdemes megvizsgálni, hogyan változik az önindukciós együttható, ha két azonos vasmagos tekercset kapcsolunk be sorosan az RLC-körbe. Lényeges a tekercsek egymáshoz képesti helyzete is, hiszen az egyikben változó fluxus feszültséget indukálhat a másikban. Ennek elkerülése végett először gondosan eltávolítottam őket egymástól, ekkor:

$$f = 420 \text{ Hz} \pm 5 \text{ Hz}; \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = (34.1 \pm 0.8) \text{ mH.} \quad (7)$$

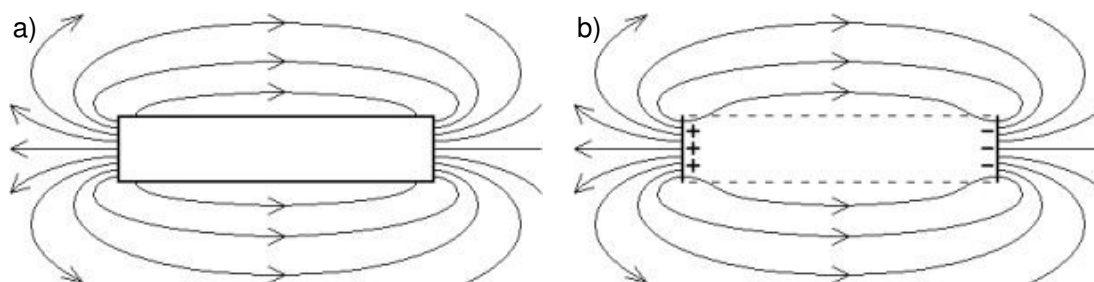
A tekercsek közti mágneses kapcsolat hiányában az induktivitások egyszerűen összeadódnak, így érthető, hogy az önindukciós együttható kétszeresére növekszik az (5) értékhez képest. Egészen más helyzet áll elő, ha a két tekercset a bennük levő vasmagokkal együtt szorosan összeillesztjük – vigyázva a bennük folyó áramok azonos irányítására. Ekkor pontosan úgy viselkednek, mint egy nagyobb tekercs, melynek menetszáma és hosszúsága is kétszerese az eredetiének. Az (1) összefüggés alapján egy ilyen tekercs esetében is az (5) érték kétszeresét kellene kapnunk, ehelyett egészen más eredmény adódik:

$$f = 285 \text{ Hz} \pm 5 \text{ Hz}; \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = (74 \pm 3) \text{ mH.} \quad (8)$$

A (7) és (8) eredmények jelentős eltérése azt bizonyítja, hogy az (1) összefüggés által jól leírt légmagos esettel ellentétben nagy permeabilitású vasmag alkalmazásakor fontossá válhat a tekercsek közti induktív kapcsolat. A vasmag az egyik tekercs fluxusát szinte teljes egészében

átvezeti a másikba; ennek köszönhető, hogy az önindukciós együttható (8) értéke körülbelül négyszerese az (5) induktivitásnak.

Említettem már, hogy a tekercsen kívüli szórt mágneses tér elhanyagolása vasmagos esetben nem feltétlenül tehető meg. Ha a vasmag elég nagy permeabilitással rendelkezik, előfordulhat, hogy éppen ez a külső tér válik meghatározóvá, és a belsőt lehet figyelmen kívül hagyni. Az előbbi mérési eredmények alapján jogosnak tűnik a feltevés, hogy a mágneses tér lényegében csak a tekercs végein lép ki a vasmagból, így a fluxus a tekercs teljes hosszában állandónak tekinthető. Ekkor a 2. ábrán vázolt elektrosztatikus analógia alapján levezethető egy közelítő képlet a vasmagos tekercs önindukciós együtthatójára.



2. ábra: a) Vasmagos tekercs külső mágneses terének vázlata  
b) Két ellentétesen töltött fémlap elektrosztatikus tere a szaggatott vonalakkal határolt területen kívül

Tekintsük a 2a. ábrán látható,  $N$  menetes tekercset, melynek hosszúsága  $l$ , keresztmetszete pedig egy  $R$  sugarú kör. A belső tér elhanyagolása miatt a gerjesztési törvény felírásakor csak a külső tér járuléka számít, így a mágneses térerősség ( $H$ ) integrálja a tekercs végeit összekötő összes erővonal mentén  $NI$ , ahol  $I$  a tekercsben folyó áram erőssége. Ha az elektrosztatikus minta alapján bevezetünk egy „mágneses potenciált”, akkor a tekercs végeit alkotó mindkét körlapnak egy jól meghatározott potenciálja lesz a másik laphoz és a végtelen távoli ponthoz képest is. Pontosan ugyanez a helyzet a 2b. ábrán látható elektrosztatikus elrendezés esetén is, itt ellentétes töltésű,  $R$  sugarú fémlapok találhatók egymástól  $l$  távolságban. Megmutatható, hogy egy  $Q$  töltést hordozó,  $R$  sugarú fémkorong elektromos potenciálja [3]:

$$U = \frac{1}{8\epsilon_0} \frac{Q}{R}. \quad (9)$$

Ugyanakkor a Gauss-tétel értelmében a korongból kilépő teljes elektromos fluxus:

$$\Psi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

A (9) és (10) egyenletekből viszont  $Q$  kiküszöbölésével egy igen egyszerű összefüggés adódik a fluxus és a potenciál között:

$$U = \frac{\Psi}{8R}. \quad (11)$$

Az ellentétes töltésű fémlap megjelenése (2b. ábra) természetesen újabb nehézségeket okoz, a korongok között mérhető  $\Delta U$  feszültség kisebb lesz, mint a (11) érték kétszerese. Ugyanakkor a fémlapok közelítése esetén nagyjából ezzel a feszültséggel arányosan csökken a 2b. ábra szaggatott vonalai által határolt területről kilépő  $\Psi'$  fluxus. Ha a fémlapokat nagyon messzire távolítjuk egymástól, akkor  $\Psi' \rightarrow \Psi$  és  $\Delta U \rightarrow 2U$ , ezért a (11) képlet csak így módosulhat:

$$\Delta U \approx \frac{\Psi'}{4R}. \quad (12)$$

Nyilvánvalóan nem állíthatunk pontos egyenlőséget, közelítésnek azonban a (12) összefüggés helytálló és rendkívül hasznosnak bizonyul, amikor az analógia alapján a 2a. ábra tekercsére

alkalmazzuk; ekkor  $\Psi'$  helyére éppen a mágneses térerősség ( $H$ ) tekercsbe belépő fluxusa kerül. Ennek  $\mu_0$ -szorosa az indukció ( $B$ ) belépő fluxusa, mely viszont a határfeltételek miatt az indukció tekercsen belüli  $\Phi$  fluxusával egyenlő. A körlapok közti „mágneses potenciálkülönbség” pedig a gerjesztési törvény értelmében  $N I$ -vel egyezik meg, ezért:

$$NI \approx \frac{1}{4\mu_0} \frac{\Phi}{R}. \quad (13)$$

Ebből pedig az önindukciós együttható értéke rendkívül egyszerűen adódik:

$$L \approx 4\mu_0 N^2 R. \quad (14)$$

Figyelemre méltó, hogy (14) alapján az önindukciós együttható független a vasmag relatív permeabilitásától – feltéve, hogy az elég nagy a belső tér elhanyagolásához. Pontosabban ez azt jelenti, hogy a tekercsen belüli tér járuléka a gerjesztési törvény felírásakor legyen jóval kisebb, mint a (13) jobb oldalán látható érték, tehát:

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi}{R^2 \pi} l \ll \frac{1}{4\mu_0} \frac{\Phi}{R}. \quad (15)$$

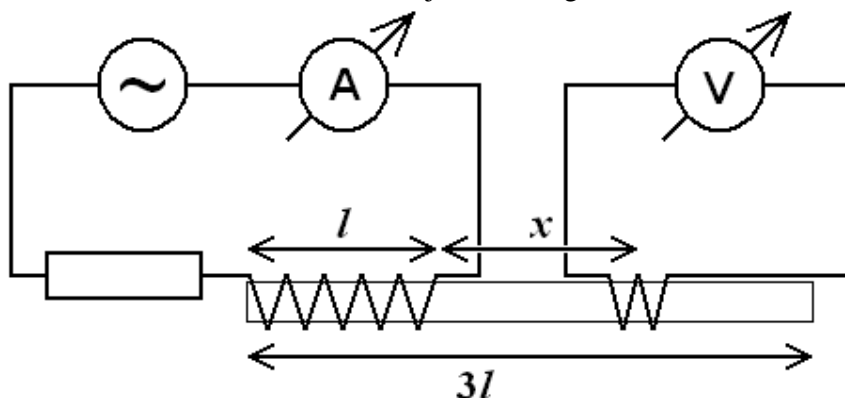
Az 1 körüli számfaktorok ( $4, \pi$ ) ilyen esetben nyugodtan elhagyhatóak, ezért a keresett feltétel a relatív permeabilitásra vonatkozóan:

$$\mu_r \gg \frac{l}{R}. \quad (16)$$

Az általam mért vasmagos tekercsek permeabilitása a (16) feltételt kielégíti, így érthető, hogy az (1) összefüggés miatt vezet teljesen rossz eredményre. Annak levezetésekor ugyanis éppen a tekercsen kívüli tér járulékát hanyagoljuk el, ez pedig csak akkor jogos, ha a (16) feltételben fordított a reláció iránya. Próbáljunk ezért (1) helyett inkább a (14) képlettel számolni; ekkor a négyzet keresztmetszetű tekercsnek valamilyen effektív sugarat kell tulajdonítani, hiszen a (14) összefüggés eredetileg hengeres tekercsre vonatkozik. Választhatjuk például a négyzettel megegyező területű kör sugarát, melynek nagysága  $R = d / \sqrt{\pi} = (7.3 \pm 0.5)$  mm, az  $N = 600$  menetszámú tekercs önindukciós együtthatója pedig ekkor:

$$L \approx 4\mu_0 N^2 R = (13.2 \pm 0.9) \text{ mH}. \quad (17)$$

Az így kapott eredmény az alkalmazott becslések durvaságához mérten igen jó egyezést mutat az (5) kísérleti értékkel; úgy tűnik, a (14) összefüggés alkalmas a hosszú vasmagos tekercs önindukciós együtthatójának közelítő számítására. Visszaadja a két tekercs összeillesztésekor tapasztaltakat is, mert a menetszám és a hosszúság kétszerezésével (14) szerint négyszeresére növekszik a tekercs induktivitása – teljes összhangban a kísérletekkel.



3. ábra: A vasmagban maradó fluxus mérésére szolgáló elrendezés – az  $n = 10$  menetes kis tekercs  $x$  távolságra található az  $l$  hosszúságú nagy tekercs végétől

A (14) összefüggéshez vezető gondolatmenetben alapfeltevés, hogy a vasmag a tekercs egyik része által keltett fluxust szinte teljes egészében átvezeti a másik részbe, így a mágneses tér az egész tekercsben ugyanakkorának tekinthető. Ennek ellenőrzéseként a 3. ábrán látható módon mértem a tekercsből kilógó vasmagban bennmaradó fluxust a tekercs végétől való  $x$  távolság függvényében. Lakkozott drótból egyszerű hurkolással készítettem egy  $n = 10$  menetes kis tekercset; az ebben indukálódó  $U$  feszültség arányos a  $\Phi$  fluxus helyi értékével:

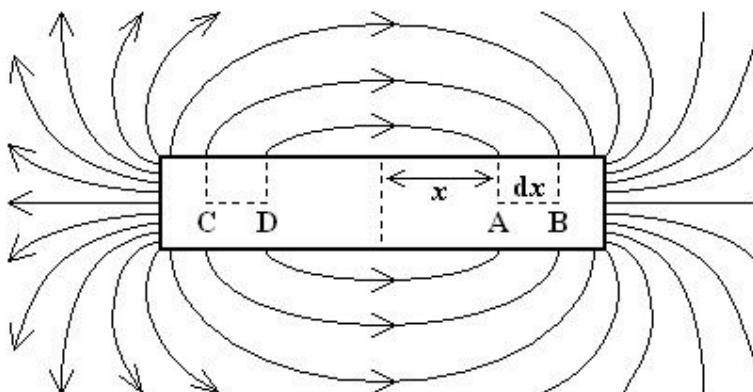
$$U(x) = 2\pi \cdot f \cdot n \cdot \Phi(x). \quad (18)$$

A feszültséggenerátor frekvenciáját a mérések során gondosan az állandó  $f = 1000$  Hz értéken tartottam, az ampermérővel pedig az átfolyó áram változatlanóságát ellenőriztem. A kis tekercs mozgatása a vártnak megfelelően nem befolyásolja az áram erősségét, ezért a különböző helyeken mért fluxusok közvetlenül összehasonlíthatóak (ld. 1. táblázat).

$x$ [mm]	$U(x)$ [mV]	$\Phi(x)$ [ $10^{-6}$ Vs]
0	$47 \pm 2$	$0.75 \pm 0.03$
20	$34 \pm 2$	$0.54 \pm 0.03$
39	$25 \pm 2$	$0.40 \pm 0.03$
52	$19 \pm 2$	$0.30 \pm 0.03$
65	$12 \pm 2$	$0.19 \pm 0.03$
78	$6 \pm 1$	$0.10 \pm 0.02$

1. táblázat: A vasmagban maradó fluxus a tekercs végétől mért  $x$  távolság függvényében

A mérési eredmények szerint a fluxus a tekercsből kilógó vasmag végéig kezdeti értékének töredékére csökken, hosszabb tekercsek esetében tehát nem lehet feltenni a belső mágneses tér állandóságát. Felmerül a kérdés, hogy mennyire hosszú tekercs esetén válik fontossá a fluxus kiszóródása, hiszen az általam vizsgált tekercsek leírására a fluxus állandóságából levezetett (14) összefüggés egészen jól működik. Ennek megválaszolásához az önindukciós együttható pontosítására van szükség – annak tudatában, hogy a belső mágneses tér mégsem állandó.



4. ábra: Vasmagos tekercs külső terének realisabb vázlata –  $x$  a tekercs közepétől mért előjeles távolságot jelöli

Tekintsük a 4. ábrán látható  $R$  sugarú,  $l$  hosszúságú,  $N$  menetes hengeres tekercset. Középen a fluxus nyilván nagyobb lesz, mint a tekercs végeinél, ezért az önindukciós együttható a (14) értékhez képest megnövekszik. Vegyünk egy kicsiny  $dx$  szakaszt, ahol a vasmagból  $d\Phi$  fluxus lép ki; számfaktoroktól eltekintve ez egy  $x \cdot dx$  nagyságrendű felületen oszlik el (4. ábra), így a mágneses térerősség ( $H$ ) integráljának nagyságrendje a tekercs másik feléig haladó,  $x$ -szel összemérhető hosszúságú erővonal mentén:

$$\int H ds \sim \frac{1}{\mu_0} \frac{d\Phi}{x \cdot dx} \cdot x = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\Phi}{dx}. \quad (19)$$

A (19) arányosság egyenlőséggé alakításához még egy 1 körüli számfaktor bevezetésére van szükség, melynek konkrét értéke a mágneses tér pontos geometriájától függ. Szabályos félkör alakú erővonalakat feltételezve például:

$$\lambda = 2 \int_{R/x}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi \sin(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{\pi} \ln(\cot(\frac{R}{2x})). \quad (20)$$

Látható, hogy a számfaktor értéke akár függhet is az  $x$  távolságtól, de annyira gyengén, hogy ettől nyugodtan eltekinthetünk. A (20) képlet alkalmazásával  $x = 10R$  esetén  $\lambda = 0.95$ , míg az  $x = 100R$  értéket behelyettesítve  $\lambda = 1.7$ ; a továbbiakban számoljunk a  $\lambda = 1$  állandóval. Írjuk fel a gerjesztési törvényt a 4. ábrán látható ABCDA zárt görbére, ekkor (19) alapján:

$$NI \frac{2dx}{l} = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\Phi}{dx}(x) - \frac{1}{\mu_0} \frac{d\Phi}{dx}(x+dx). \quad (21)$$

Itt felhasználtuk, hogy a belső mágneses tér járuléka a külső teréhez képest elhanyagolható. A (21) összefüggés egyszerű átrendezés után egy másodrendű differenciálegyenletre vezet:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -2\mu_0 \frac{NI}{l}. \quad (22)$$

Jó közelítéssel feltehetjük, hogy a fluxus értéke a tekercs végeinél továbbra is a (13) képletből következő érték:

$$\Phi(-l/2) = \Phi(l/2) = 4\mu_0 NI \cdot R. \quad (23)$$

A (22) differenciálegyenletnek a (23) feltételeket kielégítő megoldása:

$$\Phi(x) = 4\mu_0 NI \cdot R + \frac{\mu_0}{4} NI \cdot l - \mu_0 \frac{NI}{l} x^2. \quad (24)$$

A fluxusnak a tekercs hosszára vett átlagából pedig az önindukciós együttható közelítő értéke:

$$L \approx \mu_0 N^2 (4R + \frac{1}{6}l). \quad (25)$$

A (14) induktivitáshoz tehát egy másik tag adódik hozzá, mely az általam vizsgált tekercsek esetében még nem igazán jelentős; így érthető, hogy miért alkalmazható rájuk a (14) képlet. Ugyanakkor viszont az attól való eltérést magyarázhatja a (25) összefüggésben megjelenő új tag, hiszen az (5) kísérleti érték valamennyivel nagyobb a (14) által jósoltnál. Igazán hosszú tekercsre vizsgálva pedig éppen a (25) képlet első tagja válik jelentéktelenné a másodikhoz képest, ekkor az önindukciós együttható gyakorlatilag egyenesen arányos a tekercs hosszával.

Hátravan még annak vizsgálata, hogy a (21) gerjesztési törvény felírásakor milyen feltételek teljesülése esetén hanyagolható el a belső mágneses tér szerepe; járulékanak még a (24) fluxus legnagyobb értéke mellett is sokkal kisebbnek kell lennie (21) bal oldalánál:

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{2dx}{R^2 \pi} \frac{\mu_0}{4} NI \cdot l \ll NI \frac{2dx}{l}. \quad (26)$$

Nagy permeabilitású vasmag használata esetén még igen hosszú tekercsre is érvényes a (25) összefüggés, ezért lehet itt a (24) fluxus első tagját figyelmen kívül hagyni. A (26) feltételből az 1 körüli számfaktorok ( $4, \pi$ ) elhagyása és átrendezés után:

$$\mu_r \gg \frac{l^2}{R^2}. \quad (27)$$

Vegyük észre, hogy ez jelentősen különbözik a fluxus állandóságából adódó (16) feltételtől, annál kisebb hosszúságig engedi a belső tér elhanyagolását. Ha a (27) feltételben fordított a reláció iránya, akkor a (21) gerjesztési törvényből éppen a külső tér járuléka hagyható el, így az (1) összefüggés lép életbe. Mindezeket összefoglalva az  $R$  sugarú,  $l$  hosszúságú,  $N$  menetes hengeres tekercs önindukciós együtthatója általánosan:

$$L \approx \mu_0 N^2 \left(4R + \frac{1}{6}l\right), \text{ ha } 1 \ll \frac{l}{R} \ll \sqrt{\mu_r}; \quad (28a)$$

$$L = \mu_0 \mu_r N^2 \frac{R^2 \pi}{l}, \text{ ha } \sqrt{\mu_r} \ll \frac{l}{R}. \quad (28b)$$

A képletekben szereplő  $\mu_r$  a tekercs belsejét kitöltő anyag relatív permeabilitása, mely levegő ( $\mu_r = 1$ ) vagy erősen ferromágneses tulajdonságú vasmag ( $\mu_r \gg 1$ ) is lehet; utóbbi esetben fontos, hogy a mágneses anyag pontosan a tekercs belső részének határáig terjedjen. A (28) összefüggések érvényességi köre tehát elég erősen behatárolt, azon belül viszont elméletileg és kísérletileg is igazolt módon használhatóak az önindukciós együttható becslésére.

Végül köszönetemet fejezem ki Dr. Vankó Péternek (BME Kísérleti Fizika Tanszék), aki a kísérleti eszközök biztosítása mellett hasznos tanácsaival is hozzájárult eme cikk létrejöttéhez.

## Irodalom

- [1] Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok; Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004
- [2] Vannay László, Fülöp Ferenc, Máthé József, Nagy Tamás, Vankó Péter: A fizika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny harmadik fordulója a harmadik kategória részére – 2004; Fizikai Szemle 54, pp. 390-393 (2004)
- [3] Jack A. Soules: Precise calculation of the electrostatic force between charged spheres including induction effects; American Journal of Physics 58, pp. 1195-1199 (1990)