

MateFIZIKA: Dimenzióanalízis, skálázás, fraktálok

Tasnádi Tamás*

2016. március 4.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Dimenzióanalízis	2
1.1. SI alapegységek és mértékegységeik	2
1.2. Egyszerű példák dimenzióanalízisre	3
1.3. Sűrűdéses áramlás	5
2. Skálázás	7
2.1. Feladatok tehetetlenségi nyomatékra	7
2.2. További összetett feladatok	9
3. Fraktálok	11
3.1. Egyszerű geometriai fraktálok	11
3.2. Hausdorff-dimenzió	13
3.3. Összegyűrt papírgalacsin fraktáldimenziója	14
3.4. Mandelbrot-halmaz	16
3.5. Mágneses inga	17
Hivatkozások	18

*BME, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Bevezetés

A *dimenzióanalízis* és a *skálázás* összefüggő fogalmak. Mindkét esetben igen egyszerű, elemi megfontolásokkal gyakran messzemenő következtetéseket vonhatunk le egy-egy fizikai összefüggés alakjára vonatkozólag anélkül, hogy a jelenséget részleteiben vizsgálnánk. Ezzel a két módszerrel foglalkozunk az első két fejezetben.

A *fraktálok* tört dimenziós alakzatok; olyan halmazok, amelyek a skálaványostól eltérően skáláznak. A harmadik fejezetben matematikai és fizikai példákat mutatunk fraktálokra, és bevezetjük a *fraktáldimenzió* fogalmát.

1. Dimenzióanalízis

A fizikai mennyiségek numerikus értékből és mértékegységből állnak. A mértékegység utal a fizikai mennyiség *dimenziójára*. Különböző dimenziójú fizikai mennyiségek összehasonlításának nincs értelme. Szükségszerűen minden értelmes fizikai törvényt, összefüggést kifejező egyenlet két oldalán azonos dimenziójú mennyiségek állnak. Ez sokszor igen erős megszorítást jelent az adott összefüggés alakjára.

1.1. SI alapmennyiségek és mértékegységeik

A Magyarországon, Európában, és a világ számos más helyén is fizikai mennyiségek kifejezésére a metrikus, vagy SI Mértékrendszert (*Système International d'Unités*) használják, mely *hét alapmennyiségből* származtat minden más dimenziót illetve mértékegységet (1. táblázat). Az SI alapegységek pontos definíciója megtalálható a [10] Wikipédia lapon.

1. táblázat. Az SI alapmennyiségek és mértékegységeik.

Fizikai mennyiség (dimenzió)	mértékegység neve	mértékegység jele
hosszúság	méter	m
tömeg	kilogramm	kg
idő	másodperc	s
áramerősség	amper	A
hőmérséklet	kelvin	K
anyagmennyiség	mól	mol
fényerősség	kandela	cd

Például az F -el jelölt erő *dimenziója* és *SI mértékegysége*:

$$[F] = \frac{\text{tömeg} \cdot \text{hossz}}{\text{idő}^2} = \text{hossz}^1 \cdot \text{tömeg}^1 \cdot \text{idő}^{-2}, \quad [[F]] = 1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}.$$

Csak a pontosság kedvéért vezettünk be a dimenzióra és a mértékegységre két különböző jelölést, a gyakorlatban a kettő közti különbség sokszor összemosódik. Mindkettőt egyértelműen azonosítja a kitevők sorozata, ami jelen esetben $(1, 1, -2, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{Z}^7$ (a nullák a kifejezésben nem szereplő alapegységek kitevői).

Sok esetben az ily módon származtatott mértékegységek kényelmetlenek, mert túl kicsik vagy túl nagyok az adott feladathoz. Ilyenkor szabványosított *prefixumokat* használunk a mértékegységek jele előtt (2. táblázat).

2. táblázat. SI prefixumok.

előtag	jel	szorzó	előtag	jel	szorzó
yotta-	Y	10^{24}	yocto-	y	10^{-24}
zetta-	Z	10^{21}	zepto-	z	10^{-21}
exa-	E	10^{18}	atto-	a	10^{-18}
peta-	P	10^{15}	femto-	f	10^{-15}
tera-	T	10^{12}	piko-	p	10^{-12}
giga-	G	10^9	nano-	n	10^{-9}
mega-	M	10^6	mikro-	μ	10^{-6}
kilo-	k	10^3	milli-	m	10^{-3}

A nagyságrendek közti szédítő távolságokat illusztrálja az 1977-ben készült „Powers of ten” című rövidfilm, amely a [9] Youtube videón megtekinthető. A film a jelen tudomány által feltárt legkisebb és legnagyobb hosszúságok közti 40 nagyságrendet mutatja be igen érzékletesen.

1.2. Egyszerű példák dimenzióanalízisre

Tekintsünk meg néhány egyszerű példát dimenzióanalízisre!

Feladat: Hogyan függ a h magasságból elengedett test t esési ideje a magasságtól?

Megoldás: A feladatot nyilván egyszerűen megoldhatjuk az egyenletesen gyorsuló mozgás képleteivel. Most azonban oldjuk meg a feladatot pusztán a dimenziók vizsgálatával!

A t esési idő csak a test m tömegétől, a kezdeti h magasságtól és a g nehézségi gyorsulástól függhet, azaz a $t(m, h, g)$ függvényt keressük. A szóban forgó mennyiségek dimenziója:

$$[t] = \text{idő}, \quad [m] = \text{tömeg}, \quad [h] = \text{hossz}, \quad [g] = \frac{\text{hossz}}{\text{idő}^2}.$$

Csak egyféle olyan kombinációja van az m , h és g mennyiségeknek, ami idő dimenziót ad:

$$t(m, g, h) \propto \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Tehát az esési idő *nem függ a tömegetől*, és *a magasság négyzetgyökével* arányos.

Jól tudjuk, hogy a pontos képlet: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. A dimenzióanalízis csak *arányosságok* megállapítására képes. Konstans szorzók, mint ebben a példában a $\sqrt{2}$, nem jönnek ki ilyen egyszerű megfontolásokból. ■

A dimenzióanalízis első lépéseként gondosan meg kell vizsgálni, hogy a keresett egyenletben milyen mennyiségek szerepelhetnek. Csak akkor működik jól a módszer, ha viszonylag kevés, különböző dimenziójú mennyiség között keresünk összefüggést. Egy másik megkötés, hogy ezzel a módszerrel csak hatványfüggvény szerinti összefüggések kaphatóak meg.

Feladat: Hogyan függ a harmonikus rezgés A amplitúdójától az f frekvencia?

Megoldás: Jól tudjuk, hogy *nem függ* a rezgés frekvenciája az amplitúdótól. Ez a tény a dimenziók vizsgálatából is kijön, a mozgásegyenlet megoldása nélkül!

Az f frekvencia az A amplitúdón kívül még a rezgő test m tömegétől és a D rugóállandótól függhet, tehát az $f(A, m, D)$ függvényt keressük. A jelenségben szereplő fizikai mennyiségek dimenziói:

$$[f] = \text{idő}^{-1}, \quad [A] = \text{hossz}, \quad [m] = \text{tömeg}, \quad [D] = \frac{\text{erő}}{\text{hossz}} = \text{tömeg} \cdot \text{idő}^{-2}.$$

Látható, hogy csak az

$$f \propto \sqrt{\frac{D}{m}}$$

kombináció jöhet szóba, tehát a frekvencia valóban *nem függ* az amplitúdótól! A mozgásegyenlet megoldásából az $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$ összefüggés adódik. ■

Feladat: Igazoljuk Kepler III. törvényét körpályákra!

Megoldás: Kepler III. törvénye szerint a Nap körül ellipszispályán keringő bolygók T keringési idejére és a pálya a fél nagytengelyére a $T^2 \propto a^3$ arányosság érvényes. Szorítkozzunk körpályákra, ekkor $a = R$, ahol R a pályasugár.

A bolygók T keringési ideje a Nap M és a bolygó m tömegétől, a γ gravitációs állandótól valamint az R pályasugártól függhet. Ez a feladatot

még nem kezelhető jól a dimenzióanalízis eszközeivel, mert két független, tömeg dimenziójú mennyiség is szerepel a jelenségben. Azonban a

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = mR\omega^2 = mR \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

mozgásegyenletből kiesik a bolygó m tömege, tehát ettől nem függhet a keringési idő sem! Így a jelenségben szereplő dimenziók:

$$[T] = \text{idő}, \quad [M] = \text{tömeg}, \quad [R] = \text{hossz}, \quad [\gamma] = \frac{\text{erő} \cdot \text{hossz}^2}{\text{tömeg}^2} = \frac{\text{hossz}^3}{\text{tömeg} \cdot \text{idő}^2}.$$

A dimenzióanalízisből kapható arányosság (körpályára), valamint a pontos képlet (ellipszispályára):

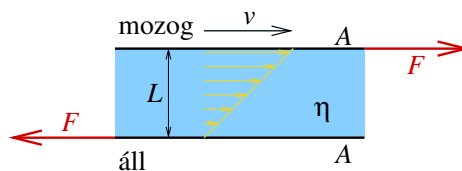
$$T(M, R, \gamma) \propto \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}, \quad T(M, a) = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}.$$

■

1.3. Súrlódásos áramlás

Most egy, a középiskolában kevésbé ismert jelenséget, a súrlódásos (viszkózus) áramlást vizsgáljuk meg dimenzióanalízis segítségével.

A *viszkozitás* folyadékoknak illetve gázoknak a belső súrlódása, nyíró igénybevétellel szemben tanúsított ellenállása. Képzeltben helyezzük a vizsgált folyadékot (vagy gázt) két A felületű, egymástól L távolságra levő párhuzamos lap közé, és mozgassuk az egyik lapot v sebességgel a másikhoz képest, a lappal párhuzamos irányban (1. ábra). A



1. ábra. A viszkozitás méréséhez használt elrendezés.

lapok közvetlen közelében levő folyadékrészecskék (gáزرészecskék) a lapokhoz tapadnak, azokkal együtt mozognak, így és a két lap között a részecskék sebessége folyamatosan változik, kialakul egy, a lapokra merőleges irányú *sebességgradiens*. Ugyanakkor a belső súrlódás miatt a részecskék „szeretnének” egymással is együtt mozogni. A sebességgradiens fenntartásához, a lapok állandó sebességgel való mozgatásához F erőt kell kifejteni a lapokra. Kísérletileg kimutatható, de józan ész alapján is nyilvánvaló, hogy az F erő arányos az A felülettel és fordítottan arányos a $\frac{v}{L}$ egységnyi hosszra eső sebességkülönbséggel. Az arányossági tényező a vizsgált közeg η *viszkozitása*, amely már nem függ a geometriától, csak a közegre jellemző (általában a hőmérséklettől is függő) állandó. Ez a *Newton-féle belső súrlódási törvény*:

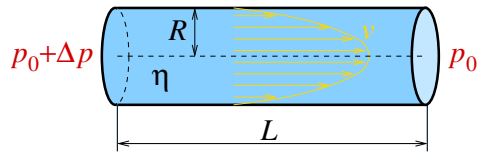
$$F = \eta \frac{Av}{L}.$$

A viszkozitás mértékegysége és dimenziója:

$$[[\eta]] = \left[\left[\frac{F}{A} \right] \right] \cdot \left[\left[\frac{L}{v} \right] \right] = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad [\eta] = \frac{\text{tömeg}}{\text{hossz} \cdot \text{idő}}$$

A következő feladatban egy olyan problémát vizsgálunk meg, amelynek sok gyakorlati és biológiai vonatkozása van.

Feladat: Hengeres, R sugarú, L hosszúságú csőben η viszkozitású folyadék áramlik. Az áramlást a cső két vége közötti Δp nyomáskülönbség tartja fenn (2. ábra). Hogyan függ a csőben áramló folyadék $\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ térfogati áramerőssége vagy hozama (időegységenként átáramlott térfogat) a cső sugarától?



2. ábra. Hengeres csőben áramló viszkózus folyadék.

Megoldás: Feltehetjük, hogy a hozam csak a geometriai paramétereiktől, a nyomáskülönbségtől és a viszkozitástól függ. Mindkét geometriai paraméter hossz dimenziójú, tehát szükség van további feltevésre. Ha két azonos csődarabot egymás után helyezünk, akkor kétszer akkora nyomáskülönbséggel az eredeti hozamot tudjuk fenntartani, tehát valójában a hozam csak a nyomás hosszegységre eső változásától függhet. Így a $\dot{V}(R, \frac{\Delta p}{L}, \eta)$ összefüggést keressük. A dimenziók:

$$[\dot{V}] = \frac{\text{hossz}^3}{\text{idő}}, \quad [R] = \text{hossz},$$

$$\left[\frac{\Delta p}{L} \right] = \frac{\text{nyomás}}{\text{hossz}} = \frac{\text{tömeg}}{\text{hossz}^2 \cdot \text{idő}^2}, \quad [\eta] = \frac{\text{tömeg}}{\text{hossz} \cdot \text{idő}}$$

Keressük a hozamot a $\dot{V} = R^\alpha \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^\beta \eta^\gamma$ alakban. Az egyes dimenziók egyezéséből a következő lineáris egyenletrendszer adódik a keresett kitevőkre:

$$\begin{aligned} \text{hossz} : & & 3 &= \alpha - 2\beta - \gamma, \\ \text{idő} : & & -1 &= -2\beta - \gamma, \\ \text{tömeg} : & & 0 &= \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Az első két egyenletből látható, hogy $\alpha = 4$, a második két egyenletből pedig $\beta = 1$, $\gamma = -1$, tehát

$$\dot{V} \propto \frac{\Delta p R^4}{L \eta}.$$

Bonyolultabb elméleti megfontolásokból megkapható a *Hagen–Poiseuille-törvény*, mely szerint $\dot{V} = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p R^4}{L \eta}$, feltéve, hogy az áramlás viszonylag lassú, nem örvényes. ■

Megjegyezzük, hogy a fenti törvényben R a *negyedik* hatványon szerepel, ami mutatja, hogy a térfogati áramerősség igen érzékenyen függ a cső sugarától. Ha például a sugár csupán 10%-kal nő, akkor (ugyanakkora nyomáskülönbség mellett) az áramlás hozama $1,1^4 = 1,46$ -szorosára, csaknem másfélszeresére nő!

2. Skálázás

A *skálázás* bizonyos kitevőjű hatványfüggvény szerinti viselkedést jelent. A legegyszerűbb példák geometriai jellegűek: hasonlóság során a területek a hasonlóság arányának négyzetével, a térfogatok a hasonlóság arányának köbével változnak. Vagy másként, ha egy alakzat valamely *lineáris mérete* L , akkor:

$$\text{területe:} \quad A \propto L^2, \quad \text{térfogata:} \quad V \propto L^3. \quad (1)$$

Ezekből és hasonló egyszerű megfontolásokból néha igen érdekes következtetések vonhatók le.

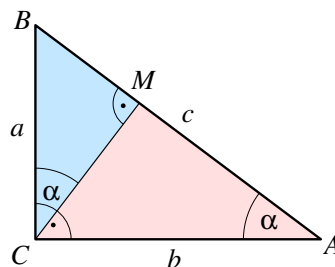
Ennek illusztrálására először a jól ismert Pitagorasz-tételt igazoljuk.

Feladat: Igazoljuk hasonlóság felhasználásával *Pitagorasz-tételét!*

Megoldás: A 3. ábrán látható ABC derékszögű háromszögben jelölje a , b és c a megfelelő oldalakat, és legyen M a C derékszögű csúcshoz tartozó magasság talppontja! Az $\alpha = \angle BAC$ és az $\angle MCB$ merőleges szárú szögek megegyeznek, így az eredeti $ABC\triangle$, az $ACM\triangle$ és a $CBM\triangle$ háromszögek hasonlóak. A hasonlóságok aránya például az átfogók arányával egyezik meg. Ennek négyzete a területek aránya, tehát:

$$T_{ACM\triangle} = T_{ABC\triangle} \left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad T_{CBM\triangle} = T_{ABC\triangle} \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Ugyanakkor $T_{ABC\triangle} = T_{ACM\triangle} + T_{CBM\triangle}$. Ezt az előző egyenletekkel kombinálva adódik a $c^2 = a^2 + b^2$ Pitagorasz-tétel. ■



3. ábra. Az ABC derékszögű háromszög két hasonló háromszögre bontása.

2.1. Feladatok tehetetlenségi nyomatékra

Jó néhány test tehetetlenségi nyomatéka is ötletesen meghatározható skálázási érveléssel. Elevenítsük föl, hogy egy pontrendszer adott tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatéka*:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

ahol n a tömegpontok száma, m_i a tömegük, r_i pedig a tengelytől mért távolságuk. Ezen kívül még két tételt jó tudni a tehetetlenségi nyomatékról.

Párhuzamos tengelyek tétele (Steiner-tétel): Legyen Θ_0 az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka valamely t_0 tömegközépponton átmenő tengelyen keresztül! Ekkor ugyanennek a testnek a t_0 -al párhuzamos, t_0 -tól d távolságra elhelyezkedő t_1 tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_1 = \Theta_0 + md^2. \quad (2)$$

Merőleges tengelyek tétele: Legyen Θ_x és Θ_y egy kétdimenziós test két egymásra merőleges, a test síkjába eső tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka! Ekkor a mindkét tengelyt merőlegesen metsző z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_z = \Theta_x + \Theta_y.$$

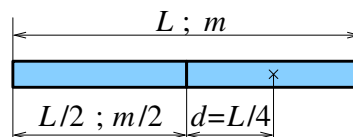
Feladat: Határozzuk meg egy m tömegű, L hosszúságú homogén rúd Θ tehetetlenségi nyomatékát a tömegközépponton átmenő, rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva!

Megoldás (integrálással): Először oldjuk meg a feladatot integrálással! A rudat bontsuk fel kis dx hosszúságú, $dm = \frac{m}{L} dx$ tömegű szakaszokra. A rúd középpontjától x távolságra levő szakasz járuléka: $d\Theta(x) = x^2 dm$. Ezek integrálásával kapjuk az eredményt:

$$\Theta = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\Theta(x) = \frac{m}{L} \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{m}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} mL^2.$$

■

Megoldás (hasonlósággal): Dimenzionális okokból világos, hogy a keresett tehetetlenségi nyomaték csak m -től és L -től függ, és alakja $\Theta(m, L) = \alpha mL^2$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. Bontsuk fel a rudat két félrúdra, a 4. ábrán látható módon! Mindkét félrúd tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta\left(\frac{m}{2}, \frac{L}{2}\right) = \frac{\alpha}{8} mL^2$. A félrudak tömegközéppontja $d = \frac{L}{4}$ távolságra van az eredeti rúd középpontjától. A (2) Steiner-tétel segítségével áttérhetünk az



4. ábra. A rúd két félrúdra bontása.

eredeti középpontra, és a két félrúd együttes tehetetlenségi nyomatéka megadja a teljes rúdét, így:

$$\Theta(m, L) = 2 \left(\Theta \left(\frac{m}{2}, \frac{L}{2} \right) + \frac{m}{2} \left(\frac{L}{4} \right)^2 \right),$$

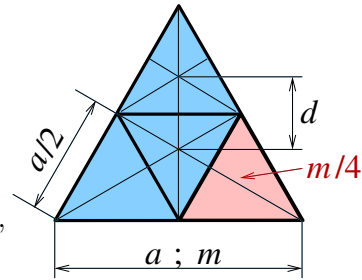
$$\alpha mL^2 = 2 \left(\frac{\alpha}{8} mL^2 + \frac{1}{32} mL^2 \right).$$

Az mL^2 tényező kiesik az egyenletből, és most is az $\alpha = \frac{1}{12}$ eredmény adódik. ■

Hasonlóság alkalmazásával olyan problémákat is megoldhatunk, amelyek megoldása integrálással már sokkal körülményesebb.

Feladat: Határozzuk meg az m tömegű, homogén, a oldalélű szabályos háromszög alakú lap tehetetlenségi nyomatékát a tömegközépponton átmenő, lapra merőleges tengelyre vonatkoztatva!

Megoldás (hasonlósággal): A háromszöglap tehetetlenségi nyomatéka $\Theta(m, a) = \beta ma^2$, ahol $\beta \in \mathbb{R}$. A háromszöget az 5. ábrán látható módon felbonthatjuk négy $\frac{m}{4}$ tömegű, $\frac{a}{2}$ oldalélű kis háromszögre. Ezek közül háromnak a középpontja $d = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ távolságra esik az eredeti középponttól. A négy kis háromszög tehetetlenségi nyomatékának összege most is megadja az eredetiét:



5. ábra. A szabályos háromszög felbontása négy kis háromszögre.

$$\Theta(m, a) = \Theta \left(\frac{m}{2}, \frac{a}{2} \right) + 3 \left(\Theta \left(\frac{m}{2}, \frac{a}{2} \right) + \frac{m}{2} d^2 \right).$$

Beírva a Θ -t és d -t, ma^2 -tel egyszerűsítve a $\beta = \frac{1}{4}$ eredmény adódik. ■

2.2. További összetett feladatok

A következő feladathoz először tekintsük át a *hővezetés* törvényét! Ha egy A felületű, d vastagságú lap két olyan térrészt választ el egymástól, amelyek között ΔT hőmérséklet-különbség van, akkor a melegebb helyről a hidegebbre hőáram indul meg a lapon keresztül. Ennek a hőáramnak a P teljesítménye, tehát az időegység alatt átment hő arányos a hőmérséklet-különbséggel és a lap felszínével, és fordítottan arányos a lap vastagságával. Az arányossági tényező a lap anyagára jellemző λ *hővezetési tényező*. Ez a *Fourier-féle hővezetési törvény*:

$$P = \lambda \frac{A \cdot \Delta T}{d}. \quad (3)$$

Feladat: Ha egy $m_1 = 5$ kg tömegű fagyott pulyka $t_1 = 2$ nap alatt olvad fel, akkor hány nap alatt olvad fel egy $m_2 = 8$ tonna tömegű szibériai mamut? (Tegyük fel, hogy mindkét esetben a környezet illetve a fagyott anyag hőmérséklete azonos, valamint a két állat felépítése hasonló.)

Megoldás: Jelölje L az állat (pulyka vagy mamut) lineáris méretét. Az állat A testfelülete a lineáris méret négyzetével arányos: $A \propto L^2$. Feltételezve, hogy a szövetek sűrűsége azonos, az állat m tömege illetve V térfogata a lineáris méret köbével arányos: $m \propto V \propto L^3$. A felolvasztáshoz szükséges Q hő arányos a testtömeggel: $Q \propto m \propto L^3$. Ugyanakkor a (3) Fourier-féle hővezetési törvény értelmében az állat testébe áramló hő P teljesítménye arányos a testfelülettel, és fordítottan arányos a „vastagsággal”, ami jelen esetben a lineáris mérettel arányos. Mindezeket összerakva, a felengedéshez szükséges t idő:

$$t = \frac{Q}{P} \propto \frac{L^3}{A/L} \propto L^2 \propto m^{\frac{2}{3}}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mamut felengedéséhez szükséges idő:

$$t_2 = t_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{2}{3}} = 2 \text{ nap} \cdot \left(\frac{8000 \text{ kg}}{5 \text{ kg}} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 274 \text{ nap} \approx 9 \text{ hónap.}$$

■

A biológia területén is számos érdekes jelenséget magyarázhatunk meg egyszerű skálatörvényekkel. Közismert, hogy százmillió évekkel ezelőtt hatalmas gerincesek, a dinoszauruszok uralták a Földet. Vajon határt szab-e valamilyen fizikai elv a gerincesek méretének?

Feladat: Becsüljük meg, hogyan skálázik egy gerinces állat csontvázának m tömege az állat teljes M tömegével!

Megoldás: Először azt állapítsuk meg, hogyan skáláznak a tömegek az állat L lineáris méretével! Nyilván a teljes M tömeg a lineáris méret köbével nő, azaz $M \propto L^3$. Nagyobb testtömeg megtartásához nagyobb csontozatra is van szükség. Induljunk ki abból az egyszerű modelltől, hogy egyetlen függőleges csont tartja az állat teljes testsúlyát! (Két lábon járó állat esetén például mindkét combcsont nagyjából az állat súlyának a felét tartja.) A csont függőleges irányú terheléssel szemben mutatott teherbírása a csont A keresztmetszetével arányos. (Ha két egyforma csontot egymás mellé teszünk, kétszer akkora terhet bírnak el.) Tehát $A \propto M \propto L^3$. A csontok hossza azonban L -el arányos, így a csontváz tömegére az

$$m \propto A \cdot L \propto L^4 \propto M^{\frac{4}{3}}$$

összefüggést kapjuk.

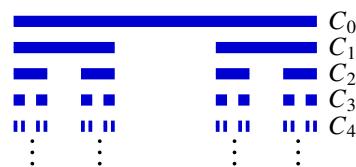
Ez azt jelenti, hogy nagyobb testtömegű állatok csontvázának tömege nem a testtömeggel arányosan nő, hanem annál kicsit gyorsabban. Ez határt szab a méret növekedésének. ■

A valóságban a csontváz skálázásának exponense valamivel nagyobb, mint 1, de az exponens függ a vizsgált állatfajoktól, egyedektől, és általában jóval kisebb a fenti elméletből kapott $\frac{4}{3}$ értéknél.

3. Fraktálok

Az előző fejezet legelején szereplő (1) egyenlet azt mutatja, hogy egyszerű geometriai alakzatok „mértéke” (területe, térfogata) a lineáris méret egész hatványával skálázik, ahol a kitevő éppen az alakzat *dimenziója*. A fejezet végén láttunk más érdekes skálatörvényeket is, amelyekben a kitevők törtszámok voltak. Vajon előfordul-e a geometriában törtkitevős skálázás? Beszélhetünk-e törtdimenziós alakzatokról?

A kérdésre meglepő módon *igen* a válasz; léteznek törtdimenziós alakzatok a geometriában! Már a XIX. század végén születtek (más jellegű vizsgálatok során) ilyen konstrukciók, de a jelenség szisztematikus vizsgálata csak a XX. század második felében kezdődött el, a lengyel származású matematikus, *Benoît Mandelbrot* [1] úttörő munkásságának eredményeként. Mandelbrot vezette be a *fraktál* elnevezést az általa vizsgált furcsa alakzatokra. De mi is a fraktál?



6. ábra. A Cantor-halmaz konstrukciója.

Érdekes módon a *fraktálnak* matematikailag precíz definíciója nem létezik [2]. Ez egy heurisztikus fogalom, melyet legegyszerűbben a fraktálokra jellemző általános tulajdonságokkal körvonalazhatunk:

- A fraktálok *dimenziója tört szám*.
- A fraktálok sokszor mutatnak *önhasonló* tulajdonságot.
- A fraktálok *végtelenül finom struktúrával* rendelkeznek.

Ismerjük meg a legegyszerűbb példákat szabályos geometriai fraktálokra!

3.1. Egyszerű geometriai fraktálok

Példa (Cantor-halmaz): Legyen $C_0 = [0, 1]$ az egységintervallum. Első lépésben hagyjuk el ebből a középső nyílt harmadot, tehát $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Ezután hagyjuk el a C_1 halmazt alkotó két szakasznak a

középső (nyílt) egyharmadát:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Így folytassuk vég nélkül a C_n halmazok konstrukcióját (6. ábra). A C_n halmaz 2^n darab 3^{-n} hosszúságú intervallumból áll, és a C_{n+1} halmaz ebből úgy adódik, hogy minden intervallumból a középső (nyílt) harmadot elhagyjuk. A \mathcal{C} Cantor-halmaz a C_n halmazok metszete.

A konstrukcióból látható, hogy a Cantor-halmaz pontjait a következő egyszerű módon jellemezhetjük:

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] \mid \begin{array}{l} \text{hármasszámrendszerben } x \text{ felírható} \\ \text{csak a 0 és a 2 számjegy használatá-} \\ \text{val, az 1 számjegy használata nélkül.} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Hármasszámrendszerben a végtelen sok 2 számjegyre vagy a végtelen sok 0 számjegyre végződő számok felírása nem egyértelmű. Például $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \in \mathcal{C}$, mert ezeket a számokat a következő módon írhatjuk föl hármasszámrendszerben:

$$\frac{1}{3} = (0,1)_3 = (0,0222\dots)_3, \quad \frac{2}{3} = (0,2)_3, \quad 1 = (0,222\dots)_3.$$

A Cantor-halmaz rendkívül sok érdekes tulajdonsággal bír!

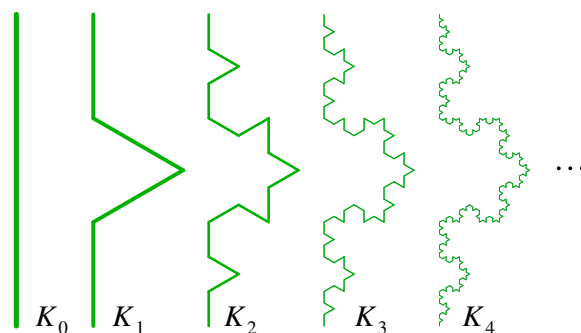
Önhasonló fraktál: A konstrukcióból adódik, hogy C_n tetszőleges intervallumának ugyanolyan a szerkezete kicsiben, mint a teljes \mathcal{C} halmaznak.

Nullmértékű: A Cantor-halmaz lefedhető tetszőlegesen kicsiny összhosszúságú intervallumrendszerrel. Valóban, $C_n \supset \mathcal{C}$ lefedhető 2^n darab 3^{-n} hosszú intervallummal, amelyek teljes hossza $\frac{2^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Kontinuum számosságú: A Cantor-halmazban „ugyanannyi” pont van, mint akár a $[0, 1]$ intervallumban, akár a teljes \mathbb{R} valós számhalmazban. Valóban, ha a (4) meghatározásban a 2 számjegyeket 1-re cseréljük, és hármasszámrendszer helyett kettes számrendszert használunk, megkapjuk a $[0, 1]$ intervallum összes pontját.

Totálisan összefüggéstelen: A Cantor-halmaz tetszőleges két különböző pontja elég nagy n -re C_n -nek (és így \mathcal{C} -nek is) két különböző intervallumába (komponensébe) esik.

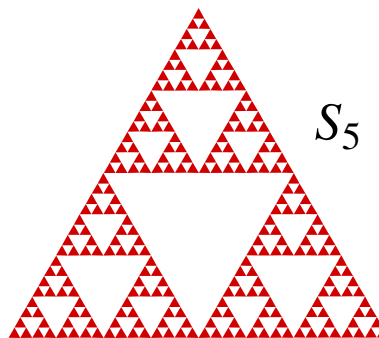
Példa (Koch-görbe): Induljunk ki a K_0 egységnyi hosszú szakaszból! A szakaszt harmadoljuk el, a középső harmadot hagyjuk el, és helyére illesszünk be egy törtvonalat, amely két ugyanakkora szakaszból áll, mint az elhagyott (7. ábra)! Ezt a 4 darab $\frac{1}{3}$ hosszú szakaszból álló törtvonalat jelöljük K_1 -el!



7. ábra. A Koch-görbe konstrukciója.

Ezután az előző harmadolás konstrukciót ismételjük meg a törtvonal minden szakaszára, így kapjuk K_2 -t, amely már 16 darab $\frac{1}{9}$ hosszúságú szakaszból álló törtvonal. Ezt az eljárást folytassuk vég nélkül! A K_n törtvonal 4^n darab 3^{-n} hosszúságú szakaszból áll. A \mathcal{K} Koch-görbe ezen végtelenül finomodó törtvonalak „határértéke”, $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}$.

Példa (Sierpiński-háromszög): Induljunk ki az S_0 egységnyi oldalú, szabályos háromszöglapból! Bontsuk fel a háromszöget négy feleakkora háromszögre és hagyjuk el a középsőt, így kapjuk S_1 -et. Ezután a maradék három háromszöget bontsuk föl újra négy-négy háromszögre és hagyjuk el a középső kis háromszögeket! Ezt hívjuk S_2 -nek! Az eljárást így folytassuk! Általában az S_n halmaz 3^n darab 2^{-n} oldalélű szabályos háromszöglapból áll, és S_{n+1} ebből úgy adódik, hogy mindegyik kis háromszögnek elhagyjuk a közepét. Az S_5 alakzat a 8. ábrán látható.



8. ábra. A Sierpiński-háromszög konstrukciójának ötödik lépése.

3.2. Hausdorff-dimenzió

Ahogy a bevezetőben említettük, a fraktálok törtdimenziós alakzatok, méretük szokatlan módon skálázik. A *fraktáldimenzió* vagy *Hausdorff-dimenzió* meghatározására képzeljük el a következőt! Fedjük le a fraktált λ lineáris méretű alakzatokkal (szakaszokkal, négyzetekkel, kockákkal), és számoljuk meg, hogy „optimális esetben” hány ilyen alakzatra van szükségünk! Jelöljük a lefedéshez szükséges alakzatok számát $N(\lambda)$ -val! Például $\lambda = \frac{1}{2}$ esetén az egységszakaszt $2 = 2^1$ darab fél hosszúságú szakasszal fedhetjük le, az egység négyzetet lefedéséhez $4 = 2^2$ darab fél oldalhosszú négyzetre van szükségünk,

míg az egység kockába $8 = 2^3$ darab fél oldalélű kockát tehetünk bele. Általában, ha $\lambda = \frac{1}{n}$, és az alakzatunk d dimenziós, akkor $N(\lambda) \propto n^d = \frac{1}{\lambda^d}$. Ezt az arányosságot logaritmálva kifejezhetjük a dimenziót:

$$d = \frac{\log N\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n} = \frac{\log(n\text{-szer kisebb skálán a lefedő alakzatok száma})}{\log(n)}.$$

(Az itt szereplő logaritmusok alapja tetszőleges lehet, csak a számlálóban és a nevezőben is ugyanazt az alapot kell használnunk.)

Ezt a definíciót könnyen alkalmazhatjuk az előző alfejezetben szereplő szabályos fraktálokra. A Cantor-halmaz (6. ábra) konstrukciójából látszik, hogy a $C_k \supset C$ halmaz 2^k darab $\lambda = \frac{1}{n} = 3^{-k}$ hosszú szakasszal fedhető le, így $n = 3^k$ esetén $N(3^{-k}) = 2^k$. Ez azt jelenti, hogy a Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója:

$$d_C = \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{k \cdot \log 2}{k \cdot \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 = 0,63.$$

A kapott dimenzió nulla és egy között van, ami jól mutatja, hogy a Cantor-halmaz „kisebb”, mint egy folytonos görbe.

A Koch-görbe esetében (7. ábra) a K_k törtvonal $N(3^{-k}) = 4^k$ darab $\lambda = \frac{1}{n} = 3^{-k}$ hosszúságú szakasszal fedhető le, így ebben az esetben a Hausdorff-dimenzió:

$$d_K = \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26.$$

A kapott érték egynél kicsit nagyobb, ami azt mutatja, hogy a Koch-görbe kicsit „nagyobb”, mint egy sima görbe.

A Sierpiński-háromszög (8. ábra) fedésekor fele oldalhosszúságú háromszögekből háromszor annyi kell, ezért $d_S = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58$.

3.3. Összegyűrt papírgalacsin fraktáldimenziója

Feladat: Vegyünk két A3 méretű papírlapot! Az egyiket gyűrjük galacsinná! A másikat felezzük el, majd egyik felét gyűrjük galacsinná! A megmaradt darabot újra felezzük el, és az egyik darabot gyűrjük galacsinná! Így folytassuk az eljárást, és készítsünk hét darab egyre csökkenő méretű papírgalacsint (9. ábra)! határozzuk meg az összegyűrt papír fraktáldimenzióját!

A gyűrésnél igyekezzünk gömb alakú galacsinokat formázni, és az összegyűrt papírt minden irányból alaposan nyomjuk össze!

Megoldás: A legkisebb galacsin átmérőjét jelölje x_0 , az eggyel nagyobbét x_1 , és így tovább, a legnagyobb átmérő legyen x_6 ! A felezéses konstrukció miatt az x_i átmérőjű galacsin m_i tömege arányos 2^i -vel.

Azt kell meghatároznunk, hogy az m_i tömeg az x_i átmérő milyen d hatványával skálázik, tehát az

$$m_i = Ax_i^d$$

összefüggésben d -t keressük. (Itt A valamilyen arányossági tényező, értéke a feladat szempontjából érdektelen.) Az egyenletnek a kettős alapú logaritmusát véve, és felhasználva, hogy $m_i = C \cdot 2^i$:

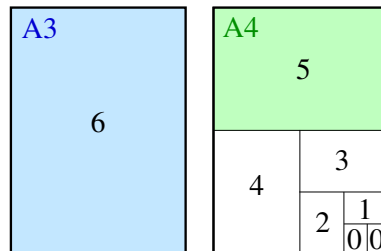
$$\log_2 m_i = i + \log_2 C = d \log_2 x_i + \log_2 A.$$

Tehát $\log_2 x_i$ függvényében ábrázolva i -t, a kapott egyenes meredeksége megadja a keresett dimenziót!

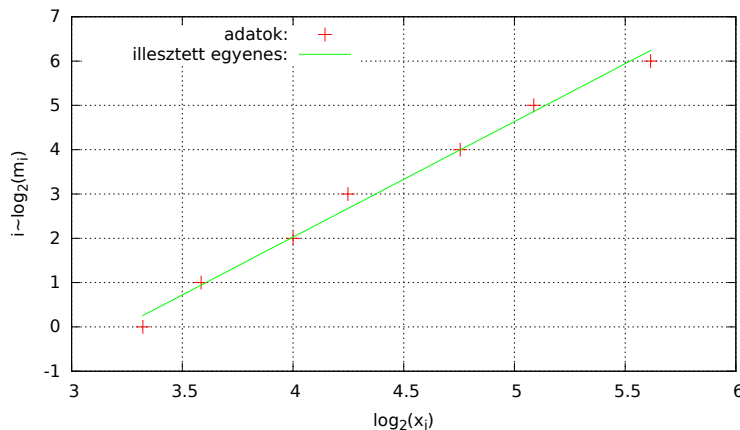
A 10. ábra mutatja az egyik diák által az előadáson elvégzett mérés eredményeit az illesztett egyenessel. Az egyenes meredeksége, azaz a papírgalacsin fraktáldimenziója:

$$d = 2,6 \pm 0,1 .$$

Ahogy az várható, a fraktáldimenzió kettő és három közé esik.



9. ábra. A két A3 méretű lap feldarabolása.



10. ábra. Az előadáson kapott eredmények. Az illesztett egyenes meredeksége, tehát a gyűrt papír fraktáldimenziója: $d = 2,6 \pm 0,1$.

Ha nem gyűrtük volna össze a papírlapot, akkor a tömeg a lineáris méret négyzetével skálázna. Ha a papírlap teljes anyagát egy homogén gömbbé sikerült volna összegyűrtetni, amiben nincsenek légrések, akkor a galacsin tömege a lineáris méret köbével skálázna. A valódi gyűrt galacsin viselkedése e két végtel között van.

Megjegyezzük, hogy akkor beszélhetünk igazán jó fraktál viselkedésről, ha a törtkitevős skálázás több nagyságrenden keresztül fennáll. Esetünkben a legkisebb és a legnagyobb papírlap tömegaránya csupán 64, ami két nagyságrend sincs. ■

3.4. Mandelbrot-halmaz

Az egyik leglátványosabb, legközismertebb fraktál a felfedezője nevét viselő *Mandelbrot-halmaz* [8] (11. ábra), amely igen egyszerű rekurzióval kapható meg, és mégis hihetetlenül bonyolult és szép struktúrákat eredményez. A halmazt a következőképpen konstruáljuk meg.

A sík minden c pontjához hozzárendelünk egy rekurzióval adott $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pontsorozatot. Amennyiben a $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat *korlátos*, akkor c a Mandelbrot-halmazhoz tartozik, egyébként pedig nem. A rekurzió matematikai részletei a *komplex számok* nyelvén írhatók le könnyen.

A komplex számok a valós számegegyenes bővítésével kaphatók meg, és a sík pontjaival reprezentálhatóak. Adott egyszerű szabályok szerint lehet velük is elvégezni az aritmetika alaplőveleteit. Segítségükkel az \mathcal{M} Mandelbrot-halmaz definíciója a következő:

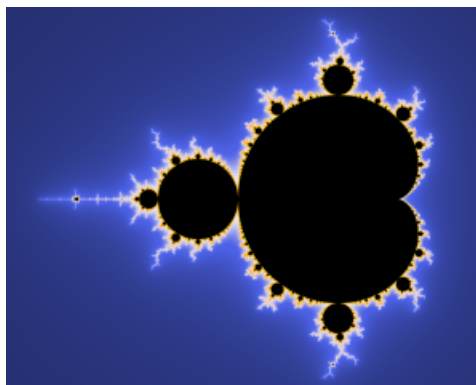
$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \text{az } x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^2 + c \text{ rekurzióval} \\ \text{megadott komplex számsorozat} \\ \text{korlátos} \end{array} \right. \right\}$$

A gyakorlatban persze nincs mód a végtelen $x_n(c)$ sorozatok előállítására. Azonban könnyen belátható, hogy ha $|x_n| > 2$, akkor a sorozat exponenciálisan tart a végtelenhez, tehát a vizsgált $c \notin \mathcal{M}$. Ha azonban elegendően sok iterációt elvégezve $|x_n| \leq 2$, akkor feltehető, hogy $c \in \mathcal{M}$.

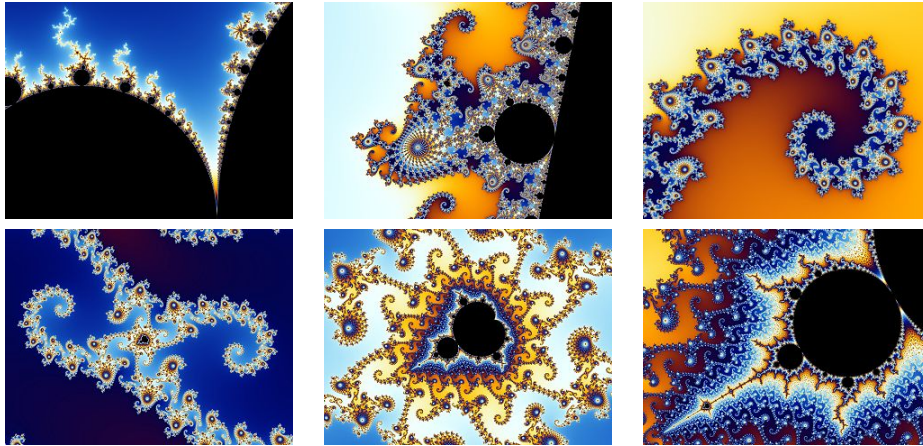
A látványosság kedvéért a Mandelbrot-halmazt (pontosabban komplementerét) különböző szabályok szerint szokás színezzni is. Leggyakrabban a fekete szín jelöli \mathcal{M} elemeit, és a különböző egyéb színek például aszerint változnak, hogy $c \notin \mathcal{M}$ esetén milyen n -re teljesül először, hogy $|x_n| > 2$. Igazolható, hogy \mathcal{M} összefüggő halmaz, a fekete területek vékony szálakkal mind összekapcsolódnak.

A 12. ábrán néhány igen szép részlete látható a Mandelbrot-halmaznak.

A [6, 7] videók elképesztő utazások a Mandelbrot-halmaz belsejében, *több száz* nagyságrenden keresztül. Mit jelentenek ezek a nagyságrendek? Emlékezzünk az első fejezetben megismert „Powers of ten” filmre [9], amely nem



11. ábra. A Mandelbrot-halmaz.



12. ábra. Részletek a Mandelbrot-halmazból. (A képek a [8] oldalról vannak átvéve.)

egy virtuális, matematikai világban, hanem a valódi univerzumban nagyított illetve kicsinyített az elemi részecskéktől a teljes ismert univerzum méretéig, „csupán” *negyven* nagyságrenden keresztül.

A [3] oldalról letölthető *GNU XiaoS* programmal [11] magunk is utazhatunk valós időben a Mandelbrot-halmaz belsejében, de a program segítségével egyszerűen készíthetünk saját képeket, videókat erről és sok más hasonló fraktálról is.

3.5. Mágneses inga

Az előző fejezetben bemutatott Mandelbrot-halmazra úgy is gondolhatunk, mint egy diszkrét időben fejlődő, determinisztikus *dinamikai rendszerre*. A rendszer pillanatnyi állapotát a (c, z) pár „kódolja”, és a „dinamikát” a

$$(c, z) \mapsto (c, z^2 + c)$$

leképezés írja le. Azt vizsgáljuk, hogy a $(c, 0)$ kezdőpontokból indulva nagyon hosszú idő alatt mi lesz a rendszer „végzete”, korlátos marad-e a második koordináta vagy nem. A Mandelbrot-halmaz komplementere a végtelen távoli pont *vonzási tartománya*.

Hasonló vonzási tartományok valódi dinamikai rendszerek esetében is vizsgálhatók, és igen gyakran eredményeznek a Mandelbrot-halmazhoz hasonló fraktál-képződményeket. Ezt a jelenséget a *mágneses ingán* mutatjuk be.

Kísérlet: Erősítsünk egy rúd inga végére erős mágnezt, és rögzítsünk a rúd inga alatt három másik mágnezt úgy, hogy azok vonzzák az ingán levő mágnezt, és az inga bármelyikük fölött stabil helyzetben maradjon.

Figyeljük meg, hogy ha az ingát kellően nagy kezdeti kitéréssel indítjuk, akkor eleinte szabálytalan, *kaotikus* mozgást végez a három vonzó mágnes között, majd ahogy csillapodik, megállapodik az egyik mágnes fölött.

Vajon hogyan függ az inga kezdeti helyzetétől a mozgás „végső kimenetele”? Hogyan helyezkedik el a három mágnes *vonzási tartománya*?

Bár a mozgást determinisztikus törvények irányítják, úgy tűnik, mintha az inga véletlenszerűen mozogna a vonzó mágnesek között. Az ilyen mozgást hívják *kaotikusnak*.

A [4] videón a mágneses inga animált mozgása látható. Az alsó síkon a három szín a három mágnes vonzási tartományát jelöli, tehát azokat a kezdőpontokat, ahonnan indítva az inga az adott színhez tartozó mágnes fölött áll meg.

Látható, hogy az egyes vonzási tartományok határa igen bonyolult, fraktálszerű alakzat. A nagy kitérésekhez tartozó kezdőpontok kis környezetében mindhárom szín megtalálható. Ez azt jelenti, hogy egy *kicsit* megváltoztatva a kezdőpontot átkerülhetünk egy másik mágnes vonzási tartományába, és a mozgás végső kimenetele teljesen megváltozik. Lényegében ez a kaotikus dinamika definíciója.

Az [5] számítógéppel készített videón látható, hogy a csillapítás mértékének fokozatos csökkenésével hogyan változnak a vonzási tartományok. Az animációban folyamatosan csökken a csillapítás. Ahogy csökken a mágneses inga csillapítása, az inga egyre többet „vacillál” az egyes mágnesek között, és ennek megfelelően egyre bonyolultabb a vonzási tartományok közti határvonal. Természetesen nulla csillapítás esetén a jelenség (elméletben sem) tanulmányozható, mert ekkor az inga soha nem állna meg, örökké mozogna.

Hivatkozások

- [1] Benoît Mandelbrot. Wikipédia.
URL https://hu.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%A9t_Mandelbrot.
- [2] Fraktál. Wikipédia.
URL <https://hu.wikipedia.org/wiki/Frakt%C3%A1l>.
- [3] GNU XaoS. URL <http://matek.hu/xaos/doku.php>.
- [4] Magnetic pendulum animation. Video.
URL <http://bugman123.com/Fractals/MagneticPendulum2.m1v>.
- [5] Magnetic pendulum, chaotic attractor. Video.
URL <http://bugman123.com/Fractals/MagneticPendulum1.m1v>.
- [6] Mandelbot set zoom (10^{275}). Youtube.
URL <https://www.youtube.com/watch?v=0jGai087u3A>.

- [7] Mandelbot set zoom (10^{341}). Youtube.
URL <https://www.youtube.com/watch?v=V9EU1TcF1u4>.
- [8] Mandelbrot-halmaz. Wikipédia.
URL <https://hu.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-halmaz>.
- [9] Eames Office: Powers of ten. Youtube, 1977.
URL <https://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0>.
- [10] Si-alapegység. Wikipédia.
URL <https://hu.wikipedia.org/wiki/SI-alapegység>.
- [11] XaoS. Wikipedia. URL <https://en.wikipedia.org/wiki/XaoS>.