MateFIZIKA: Szélsőértékelvek a fizikában

Tasnádi Tamás[1]

2015. április 10.,17.

[1] BME, Mat. Int., Analízis Tsz.

Tartalom

Energiaminimum-elv a mechanikában (ápr. 10.)

„Okos" szappanhártyák (ápr. 10.)

Legrövidebb idő elve az optikában (ápr. 17.)

Tartalom

Energiaminimum-elv a mechanikában (ápr. 10.)

„Okos” szappanhártyák (ápr. 10.)

Legrövidebb idő elve az optikában (ápr. 17.)

Egyensúlyi helyzet

Egyensúly feltétele:

- zérus eredő erő és zérus eredő forgatónyomaték
- energia-függvénynek szélsőértéke van

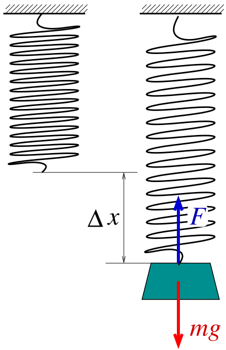
Stabil egyensúly:

- kis kitérésre visszatérítő erő, forgatónyomaték
- kis kitérésekre energianövekedés

Sok sztatika feladat erők vizsgálatával és energetikai megfontolással is megoldható.

Példa: Rugón nyugvó test

Feladat: Egy D direkciós erejű, függőleges rugóra m tömegű testet akasztunk. Mennyivel nyúlik meg a rugó?



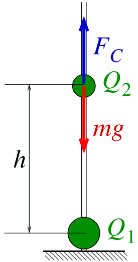
Kísérlet: A jelenség bemutatása.

1. Megoldás: A rugóra akasztott testre zérus eredő erő hat.

2. Megoldás: A rendszer teljes energiája minimális.

Példa: Töltések egyensúlya függőleges helyzetben

Feladat: Egy rögzített $Q_1 > 0$ ponttöltés fölötti függőleges félegyenesen egy m tömegű, $Q_2 > 0$ töltésű test mozoghat szabadon. Milyen h magasságban lesz a felső töltés egyensúlyban?

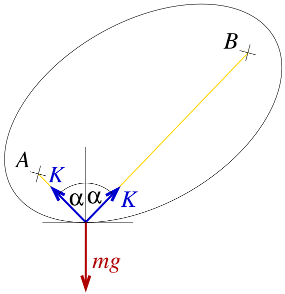


1. Megoldás: A felső testre zérus eredő erő hat.

2. Megoldás: A rendszer teljes energiája minimális.
(Számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséggel.)

Példa: Belógó kötélre akasztott csiga

Feladat: Egy $2a$ hosszúságú kötél két végpontját rögzítjük, és a kötélre csigát teszünk, arra súlyt akasztunk. Hol lesz a csiga egyensúlyban?



Kísérlet: A jelenség bemutatása.

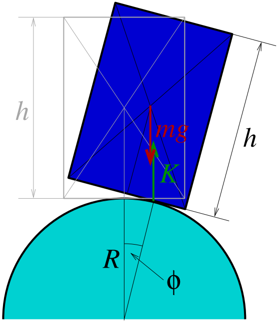
Kényszer: A csiga ellipszisen mozog.

1. Megoldás: A csigára ható erők eredője zérus. $\Longrightarrow$ A kötélszárak szögfelezője függőleges.

2. Megoldás: A csiga helyzeti energiája minimális. $\Longrightarrow$ Az ellipszis érintője vízszintes.

Geometriai tétel: Az ellipszis érintője felezi az adott pontba húzott vezérsugarak külső szögét.

Példa: Félgömbön billegő tégla



Feladat: Milyen h magasságú homogén tégla áll meg stabilan egy R sugarú félgömbön?

Kísérlet: A jelenség bemutatása.

1. Megoldás: A kitérített téglára ható forgatónyomaték vizsgálatával.

2. Megoldás: A kitérített tégla potenciális energiájának vizsgálatával.

Matematikai kitekintés

Ha $\varepsilon \ll 1$ (például: $\varepsilon \approx 10^{-2}$) $\Longrightarrow$ $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$

Közelítő formulák:

$$\sin\varepsilon \approx \varepsilon, \qquad \tan\varepsilon \approx \varepsilon,$$

$$(1+\varepsilon)^2 \approx 1+2\varepsilon, \qquad (1+\varepsilon)^3 \approx 1+3\varepsilon,$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon, \qquad \sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{1}{2}\varepsilon,$$

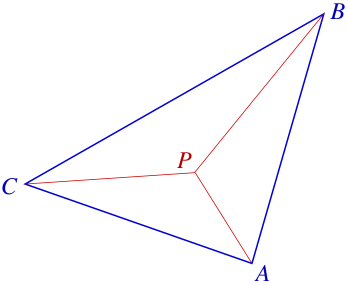
$$\boxed{(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\varepsilon \quad (\forall\alpha\in\mathbb{R}),} \qquad \cos\varepsilon \approx 1-\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Általában:

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\cdot(\Delta x)^2 + \dots}$$

Példa: Háromszög izogonális pontja

Feladat: Adott az ABC háromszög. A sík mely P pontjára minimális a háromszög csúcsaitól mért távolságok $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ összege?



Történet: Pierre de Fermat fedezte fel, és feladványul adta Eevangelista Torricellinek. (Wikipédia)

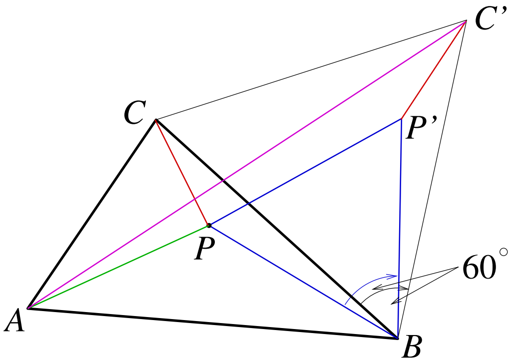
1. Megoldás: Geometriai úton.

2. Megoldás: Fizikai gondolatmenettel: lógó súlyok potenciális energiájának minimalizálásával.

Kísérlet: a 2. megoldás bemutatása.

Izogonális pont geometriai megkeresése

Forgassuk el a $PBC\triangle$-et B körül 60°-kal!



Minimum esetén az A, P, P' és C' pontok egy egyenesre esnek.
$\Longrightarrow$ Az izogonális pont rajta van az AC' egyenesen.
$\Longrightarrow$ $APB\sphericalangle = AP'C'\sphericalangle = APC\sphericalangle = 120^\circ$.

Tartalom

Energiaminimum-elv a mechanikában (ápr. 10.)

„Okos" szappanhártyák (ápr. 10.)

Legrövidebb idő elve az optikában (ápr. 17.)

Felületi feszültség

Ok: A felszínhez közeli részecskék környezete más, mint a folyadék belsejében evőké.

A felületi feszültség két egyenértékű definíciója:

1. egységnyi hosszon ható erő: $\gamma = \dfrac{F}{l}$;
2. egységnyi felület energiája: $\gamma = \dfrac{E}{A}$.

Kísérletek szappanhártyával

A szappanhártyák az adott kényszerek mellett minimális felületűek.

Kísérletek:

- szappanbuborék alakja gömb,
- laza cérna alakja körív,
- két buborékos kísérlet (kisebb felfújja a nagyobbat),
- sík lapokból álló szappanhártyákon a 120°-os illeszkedési szög megfigyelése,
- görbült minimálfelületek bemutatása.

Görbületi nyomás

Általában: $p_{\text{görb.}} = \gamma\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right);$

Szappanbuborékban: $p_{\text{bub.}} = \dfrac{4\gamma}{R}$ (két felület, $R_1 = R_2$).

Számolás: Görbületi nyomás kétféle levezetése:

1. erőkkel;
2. energiával.

Tartalom

Energiaminimum-elv a mechanikában (ápr. 10.)

„Okos” szappanhártyák (ápr. 10.)

Legrövidebb idő elve az optikában (ápr. 17.)

Fermat-elv

Fermat-elv: adott kényszerek mellett két pont között a fény azon az úton halad, amelyhez a legrövidebb befutási idő tartozik.

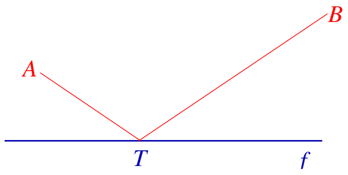
Optikai úthossz=geometriai úthossz szorozva törésmutató

Az optikai úthossz arányos a befutási idővel.

Következmény: Homogén közegben a fény egyenes vonalban terjed.

Példa: Visszaverődés törvénye

Feladat: Milyen úton ér a lovas a legrövidebb idő alatt az A városból a B-be, ha útközben az f folyónál még meg szeretné itatni a lovát?



1. Megoldás: geometriai úton, tükrözéssel.

2. Megoldás: analitikus úton, a T pont kicsiny elmozdításával.

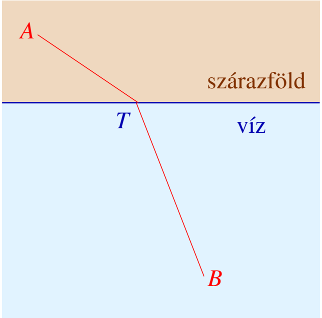
3. Megoldás: mechanikai analógiával, az egyenesen csúszó T pontot két kötéllel, azonos erővel húzzuk.

Eredmény: szabályos fényvisszaverődés törvénye.

Kísérlet: A jelenség bemutatása.

Példa: Fénytörés törvénye

Feladat: Milyen úton ér a parti őr a leggyorsabban a parton levő A pontból a B pontban fuldoklóhoz, ha a szárazföldön v_1, a vízben $v_2 < v_1$ sebességgel tud mozogni?



1. Megoldás: analitikus úton, a T pont kicsiny elmozdításával.

2. Megoldás: mechanikai analógiával, az egyenesen csúszó T pontot két kötéllel, különböző erővel húzzuk.

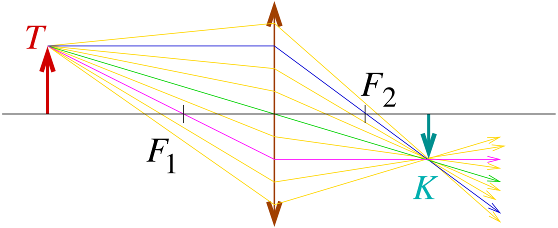
Eredmény: Snellius–Descartes törvény.

Szemléltetés: Hullámfrontokkal.

Kísérlet: A jelenség bemutatása.

Képalkotás és a Fermat-elv

Képalkotás: A T tárgypontból különböző irányokba kiinduló fénysugarak mindegyike a K képpontba jut.
Fermat-elv: A legrövidebb időhöz tartozó fényút valósul meg.

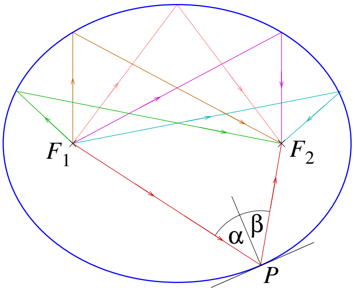


Következmény: A képalkotásban résztvevő fénysugarak optikai úthossza azonos.

Ellipszis-tükör képalkotása

Az ellipszis három egyenértékű megadása:

1. Az F_1 fókuszból kiinduló fénysugarak visszaverődés után keresztülmennek az F_2 fókuszon.
2. $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} =$ állandó;
3. $\alpha = \beta$;

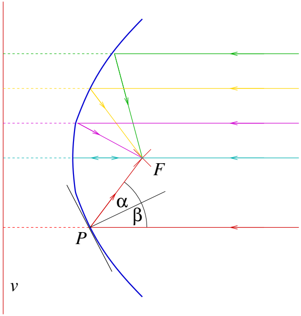


„Bizonyítás": Fermat-elv és visszaverődés törvénye.

Parabolatükör képalkotása

A parabola három egyenértékű megadása:

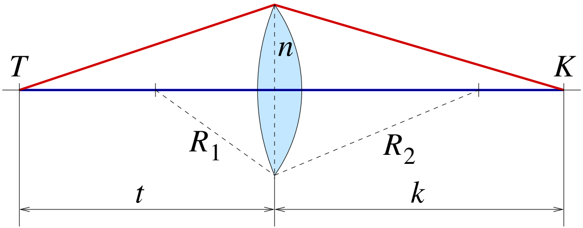
1. A v vezéregyenesre merőlegesen érkező fénysugarak visszaverődés után keresztülmennek az F fókuszon.
2. v és P távolsága $= \overline{FP}$;
3. $\alpha = \beta$;



„Bizonyítás": Fermat-elv és visszaverődés törvénye.

Példa: Vékony lencse leképezési törvénye

Feladat: Vezessük le a Fermat-elvből a vékony lencsék leképezési törvényét, valamint a lencse fókusztávolságát megadó egyenletet.
Ötlet: Képalkotáskor az optikai tengelyen és a lencse legszélén haladó két fényút optikai úthossza megegyezik.



Hosszabb számolás...
Eredmény:

$$\underbrace{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}_{\frac{1}{f}}=\frac{1}{k}+\frac{1}{t}$$

Miért olyan sietős a fénynek?

Huygens–Fresnel elv:

1. A hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja.
2. Egy későbbi időpontban a hullámteret az elemi hullámok interferenciája adja.

Interpretáció: Két pont között terjedő fény minden lehetséges utat bejár, és ezen útvonalak fázishelyes interferenciája adja a magvalósuló hullámteret.

A legtöbb fényutat kicsit megváltoztatva a fázis gyorsan változik, így ezek a fényutak kioltják egymást.

Fermat-elv: A legnagyobb járulékot az a fényút adja, amelynek optikai úthossza minimális (szélsőértéket mutat).